Ime in priimek: ______________________________ Vpisna št:

Predavalnica: __________ Vrsta: ____________ Kolona: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: ____________

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Kemija – univerzitetni študij

8. april 2013

A

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Poišči $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tako da za vse $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ velja

$$\big((\alpha a+b) \times (\beta b+c)\big) \cdot (c+a) = \gamma(a\times b)\cdot c.$$

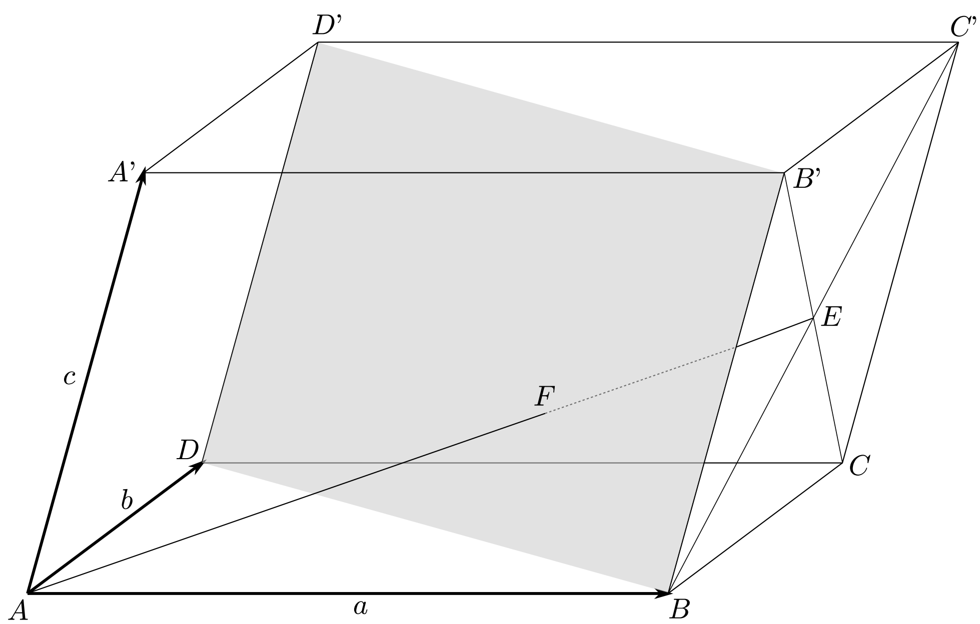
Rešitev: Z uporabo pravil za vektorski in skalarni produkt dano enačbo preoblikujemo do ekvivalentne a bolj pregledne oblike:

$$\begin{aligned}
\big((\alpha a+b) \times (\beta b+c)\big) \cdot (c+a) &= \gamma(a\times b)\cdot c\\
\big(\alpha\beta a\times b + \alpha a\times c + \beta \cancel{b\times b} + b\times c\big)\cdot(c+a) &= \gamma(a\times b)\cdot c\\
\alpha\beta(a\times b)\cdot c + \alpha\cancel{(a\times c)\cdot c} + \cancel{(b\times c)\cdot c} + \alpha\beta\cancel{(a\times b)\cdot a} + \alpha\cancel{(a\times c)\cdot a} + (b\times c)\cdot a &= \gamma(a\times b)\cdot c\\
\alpha\beta(a\times b)\cdot c + (b\times c)\cdot a &= \gamma(a\times b)\cdot c\\
\alpha\beta(a\times b)\cdot c + (a\times b)\cdot c &= \gamma(a\times b)\cdot c\\
(\alpha\beta+1-\gamma)(a\times b)\cdot c &= 0
\end{aligned}$$

Ker je $(a\times b)\cdot c$ lahko tudi neničelno število, enakost pa mora veljati pri vseh izbirah a, b, c, je rešitev enaka $\underline{\underline{\{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R};\ \alpha\beta+1-\gamma=0\}}}$.

2. [25] Paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$, točke A', B', C', D' pa zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C, D. Točka E je presek diagonal ploskve $BCC'B'$. V kolikšnem razmerju odreže paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

Rešitev: Vektorji $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$ tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Pri pouku smo pokazali, da se diagonali paralelograma razpolavljata. Vektorja $b - a$ in c tvorita bazo ravnine $BB'D'D$. Od A do F pridemo na dva načina: $AF = \alpha AE = \alpha(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c)$ in $AF = a + \beta(b - a) + \gamma c$, kjer so α, β, γ neznani skalarji. Velja torej $\alpha(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = a + \beta(b - a) + \gamma c$, oziroma $(\alpha - 1 + \beta)a + (\frac{\alpha}{2} - \beta)b + (\frac{\alpha}{2} - \gamma)c = 0$, in iz linearne neodvisnosti vektorjev a, b, c sledi, da je $\alpha - 1 + \beta = 0$ in $\frac{\alpha}{2} - \beta = 0$ in $\frac{\alpha}{2} - \gamma = 0$, oziroma $\alpha + \beta = 1$ in $\alpha = 2\beta$ in $\alpha = 2\gamma$, torej $\underline{\underline{\alpha = \frac{2}{3}}}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.



3. [25] Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} - 5x - 3y &= 0, \\ \dot{y} + 3x + y &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: Prvo enačbo odvajamo: $\ddot{x} - 5\dot{x} - 3\dot{y} = 0$, nato pa iz druge enačbe izrazimo $\dot{y}$ in ga vstavimo notri: dobimo $\ddot{x} - 5\dot{x} - 3(-3x - y) = 0$, oziroma $\ddot{x} - 5\dot{x} + 9x + 3y = 0$. Sedaj še iz prve enačbe izrazimo y in ga vstavimo notri: dobimo $\ddot{x} - 5\dot{x} + 9x + \dot{x} - 5x = 0$ oziroma $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$, kar je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Njen karakteristični polinom je $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Po izreku velja $\underline{\underline{x(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}}}$, kjer sta A in B konstanti. Od tod in prve enačbe sledi $y(t) = \frac{1}{3}(\dot{x} - 5x) = \frac{1}{3}(2Ae^{2t} + Be^{2t} + 2Bte^{2t} - 5Ae^{2t} - 5Bte^{2t}) = \underline{\underline{(-A + \frac{B}{3})e^{2t} - Bte^{2t}}}$.

4. [25] Reši diferencialno enačbo $y''' - 4y' = x + e^x$. Namig: reši $y''' - 4y' = x$ in $y''' - 4y' = e^x$.

Rešitev: Opravka imamo z nehomogeno linearno diferencialno enačbo tretjega reda s konstantnimi koeficienti. Prvo rešimo homogeni del $y''' - 4y' = 0$. Karakteristični polinom je $\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)$. Rešitev je torej $y_H(x) = A + Be^{2x} + Ce^{-2x}$. Za reševanje nehomogene enačbe izrek pravi, da če imamo linearno diferencialno enačbo oblike $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = f(x)e^{ax}$, kjer so $p_i \in \mathbb{R}$ ter $a \in \mathbb{R}$ in je $f(x)$ polinom stopnje m, potem je nastavek za iskanje partikularne rešitve enak $y_P = g(x)x^k e^{ax}$, kjer je g 'splošen' polinom stopnje m (tj. vsebuje $m+1$ neznanih konstant), število k pa je kratnost a-ja v karakterističnem polinomu (kolikokrat je a ničla v karakterističnem polinomu). Ker naša enačba ni oblike $\ldots = f(x)e^{ax}$, raje obravnavamo enačbi $y''' - 4y' = x$ (1) in $y''' - 4y' = e^x$ (2), ki pa sta tega tipa. Za (1) je $a = 0$ in $m = 1$ in $k = 1$, torej je rešitev oblike $y_{P1} = (D + Ex)x$. Ko to vstavimo v (1), dobimo $-4(D + 2Ex) = x$, torej je $D = 0$ in $E = -\frac{1}{8}$, ter zato $y_{P1} = -\frac{1}{8}x^2$. Za (2) je $a = 1$ in $m = 0$ in $k = 0$, torej je rešitev oblike $y_{P2} = Fe^x$. Ko to vstavimo v (2), dobimo $Fe^x - 4Fe^x = e^x$, torej je $F = -\frac{1}{3}$, ter zato $y_{P2} = -\frac{1}{3}e^x$. Dobili smo partikularni rešitvi za (1) in (2). Ker pa velja $(y_{P1} + y_{P2})''' - 4(y_{P1} + y_{P2})' = y_{P1}''' + y_{P2}''' - 4y_{P1}' - 4y_{P2}' = (y_{P1}''' - 4y_{P1}') + (y_{P2}''' - 4y_{P2}') = x + e^x$, je $y_{P1} + y_{P2}$ partikularna rešitev prvotne enačbe. Končna rešitev je torej $y = y_H + y_{P1} + y_{P2} = \underline{\underline{A + Be^{2x} + Ce^{-2x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{3}e^x}}$.

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Predavalnica: __________ Vrsta: __________ Kolona: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: __________

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Kemija – univerzitetni študij

8. april 2013

B

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Reši diferencialno enačbo $y''' - 4y' = x + e^{2x}$. Namig: reši $y''' - 4y' = x$ in $y''' - 4y' = e^{2x}$.

Rešitev: Podobno kot pri A: $y(x) = \underline{\underline{A + Be^{2x} + Ce^{-2x} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}xe^{2x}}}$.

2. [25] Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} + 5x + 3y &= 0, \\ \dot{y} - 3x - y &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: Podobno kot pri A: $x(t) = \underline{\underline{Ae^{-2t} + Bte^{-2t}}}$ in $y(t) = \underline{\underline{-(A + \frac{B}{3})e^{-2t} - Bte^{-2t}}}$.

3. [25] Paralelepiped $ABCDA'B'C'D'$ ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$, točke A', B', C', D' pa zaporedoma ležijo nad točkami A, B, C, D. Točka E je presek diagonal ploskve $BCC'B'$. V kolikšnem razmerju odreže paralelogram $BB'D'D$ daljico AE?

Rešitev: Enako kot pri A.

4. [25] Poišči $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tako da za vse $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ velja

$$\big((a+\alpha b) \times (\beta b+c)\big) \cdot (c+a) = (a \times b) \cdot (\gamma c).$$

Rešitev: Podobno kot pri A: $\underline{\underline{\{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R};\ \alpha+\beta-\gamma=0\}}}$.