Matematika 2 za kemike - 1. kolokvij

11.12.2002

A

Ime in priimek: Vpisna številka:

1. Škatla v obliki kvadra (brez zgornje ploskve) ima površino a. Kolikšne morajo biti stranice škatle, da bo prostornina največja?

   Rešitev: Naj bodo x, y in z robovi kvadra. Iščemo maksimum volumna $V = xyz$ pri pogoju $xy + 2xz + 2yz = a$, $x, y, z \geq 0$. Ustrezna Lagrangeova funkcija je $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - a)$. Rešiti moramo sistem enačb $L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
yz + \lambda y + 2\lambda z &= 0 \\
xz + \lambda x + 2\lambda z &= 0 \\
xy + 2\lambda x + 2\lambda y &= 0 \\
xy + 2yz + 2xz &= a
\end{aligned}
$$

   Če odštejemo prvi enačbi, dobimo $(y - x)(z + \lambda) = 0$. V primeru, ko je $z = -\lambda$, iz prve enačbe dobimo $-2\lambda^2 = 0$, torej $\lambda = 0$. Od tod sledi $z = 0$, torej v tem primeru dobimo minimalni volumen $V = 0$.
   Ostane nam še primer, ko je $y = x$. Če to upoštevamo v tretji enačbi, dobimo $x^2 + 4\lambda x = 0$. Ker lahko brez škode predpostavimo $x \neq 0$, od tod sledi $x = -4\lambda$. Iz prve enačbe sedaj dobimo še $-2\lambda z - 4\lambda^2 = 0$, torej $z = -2\lambda$. Če vse skupaj vstavimo v četrto enačbo, dobimo $\lambda^2 = a/48$. Ker so x, y, z nenegativna števila, je $\lambda = -\frac{\sqrt{a}}{4\sqrt{3}}$. To pomeni, da je

$$
x = y = \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}.
$$

   To je v resnici maksimum, saj je funkcija $V(x, y, z) = xyz$ zvezna na omejenem in zaprtem območju $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xy + 2xz + 2yz = a\}$.

2. Za funkcijo $z = z(x, y)$ velja

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2. \tag{1}$$

Postavimo $x = t$, $y = \frac{t}{1+tu}$ in $z = \frac{t}{1+tv}$. Izračunaj $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Rešitev: Najprej opazimo, da sta t in u novi neodvisni spremenljivki, v pa je funkcija spremenljivk t in u (torej to velja tudi za z). Najprej si oglejmo, v kaj se spremeni dana enačba po uvedbi novih spremenljivk. S pomočjo verižnega pravila dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{(1+tu)^2}\frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{t^2}{(1+tu)^2}\frac{\partial z}{\partial y}
\end{aligned}$$

Iz teh dveh enakosti dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{t^2}\frac{\partial z}{\partial u}$$

in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(1+tu)^2}{t^2}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Vstavimo to v (1) in po krajšem računu dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{(1+tv)^2}. \tag{2}$$

Po drugi strani pa je

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{1+tv}\right) = \frac{1 - t^2\frac{\partial v}{\partial t}}{(1+tv)^2}.$$

Primerjamo to z (2) in dobimo $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

3. Funkcijo $f(x,y)=\sin(x^2y)$ Razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $(\pi,0)$ do vključno členov stopnje 2.

Rešitev: Najprej izračunamo vse parcialne odvode funkcije f do vključno reda 2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy\cos x^2y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2\cos x^2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2y\cos x^2y-4x^2y^2\sin x^2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= 2x\cos x^2y-2x^3y\sin x^2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^4\sin x^2y
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,0) &= \pi^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\pi,0) &= 2\pi \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pi,0) &= 0
\end{aligned}$$

Razvoj v Taylorjevo vrsto okoli točke $(\pi,0)$ se glasi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(\pi,0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0)(x-\pi)+\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,0)y\right)+ \\
&\quad +\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi,0)(x-\pi)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\pi,0)(x-\pi)y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pi,0)y^2\right)+\ldots \\
&= \pi^2y+2\pi(x-\pi)y+\ldots.
\end{aligned}$$

4. Krivuljo $\vec{r}(t) = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \ln \cos t)$ parametriziraj z naravnim parametrom. Izračunaj enačbo tangente v $T(1/2, 1/2, -\ln 2/2)$.

Rešitev: Krivulja je definirana za tiste t, pri katerih je $\cos t > 0$, torej za t-je iz unije intervalov oblike $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$. Oglejmo si npr. naravno parametrizacijo za $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ (v resnici je zaradi periodičnosti dovolj gledati ta interval):

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + \tan^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
& \text{(Nova spr. } u = \sin t) \\
&= \int_0^{\sin t} \frac{1}{1 - u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sin t} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}
\end{aligned}
$$

Od tod z antilogaritmiranjem dobimo $\sin t = \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}$ in še $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{2e^{2s}}{e^{2s}+1}$. Vstavimo to v enačbo krivulje:

$$
\vec{r}(s) = \left(\left(\frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1} \right)^2, \frac{2e^{2s}(e^{2s} - 1)}{(e^{2s} + 1)^2}, \ln \frac{2e^{2s}}{e^{2s} + 1} \right).
$$

Za enačbo tangente najprej izračunamo

$$
\dot{\vec{r}}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, -\tan t)
$$

in opazimo, da točki $T(1/2, 1/2, -\ln 2/2)$ ustreza $t = \frac{\pi}{4}$. Smerni vektor tangente je torej

$$
\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1, 0, -1),
$$

enačba tangente pa se glasi

$$
\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z + \frac{\ln 2}{2}}{-1}.
$$

Matematika 2 za kemike - 1. kolokvij
11.12.2002
B

Ime in priimek: Vpisna številka:

1. Škatla v obliki kvadra (brez zgornje ploskve) ima površino b. Kolikšne morajo biti stranice škatle, da bo prostornina največja?

2. Za funkcijo $z = z(x, y)$ velja

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2.$$

Postavimo $x = t$, $y = \frac{t}{1+tu}$ in $z = \frac{t}{1+tv}$. Izračunaj $\frac{\partial v}{\partial t}$.

3. Funkcijo $f(x, y) = \sin(xy^2)$ Razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0, \pi)$ do vključno členov stopnje 2.

4. Krivuljo $\vec{r}(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \ln \cos t)$ parametriziraj z naravnim parametrom. Izračunaj enačbo tangente v $T(1/2, 1/2, -\ln 2/2)$.