Matematika 2 za kemike - 2. kolokvij

27.2.2003

A

Ime in priimek: Vpisna številka:

1. Naj bo $a > 0$. Krivulja $\mathcal{K}$ je dana kot presek ploskve $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ z valjem $x^2 + y^2 = ax$. Poišči kako parametrizacijo te krivulje ter izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost krivulje $\mathcal{K}$ v točki $T(0, 0, a)$.

   Rešitev: Iz pogoja $x^2 + y^2 = ax$ dobimo $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, zato lahko x in y parametriziramo s premaknjenimi polarnimi koordinatami: $x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)$, $y = \frac{a}{2}\sin t$, kjer je $t \in [0, 2\pi]$. Nato določimo še z:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}(1 + \cos t)^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2 t} = \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 - \cos t)} = a \sin\frac{t}{2}.$$

   Tako imamo naslednjo parametrizacijo krivulje: $\vec{r}(t) = (\frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2}\sin t, a\sin\frac{t}{2})$. Prvi trije odvodi tega vektorja so:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= (-\frac{a}{2}\sin t, \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}\cos\frac{t}{2}) \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= (-\frac{a}{2}\cos t, -\frac{a}{2}\sin t, -\frac{a}{4}\sin\frac{t}{2}) \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= (\frac{a}{2}\sin t, -\frac{a}{2}\cos t, -\frac{a}{8}\cos\frac{t}{2})
\end{aligned}$$

   Točki $T(0, 0, a)$ ustreza $t = \pi$, zato

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(\pi) &= (0, -\frac{a}{2}, 0) \\
\ddot{\vec{r}}(\pi) &= (\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{4}) \\
\dddot{\vec{r}}(\pi) &= (0, \frac{a}{2}, 0)
\end{aligned}$$

   Zato je $|\dot{\vec{r}}(\pi)| = \frac{a}{2}$ in $|\dot{\vec{r}}(\pi) \times \ddot{\vec{r}}(\pi)| = |(\frac{a^2}{8}, 0, \frac{a^2}{4})| = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. Torej je

$$\kappa(\pi) = \frac{|\dot{\vec{r}}(\pi) \times \ddot{\vec{r}}(\pi)|}{|\dot{\vec{r}}(\pi)|^3} = \frac{\sqrt{5}}{a}.$$

   Ker je vektor $\dot{\vec{r}}(\pi)$ vzporeden $\dddot{\vec{r}}(\pi)$, je $(\dot{\vec{r}}(\pi), \ddot{\vec{r}}(\pi), \dddot{\vec{r}}(\pi)) = 0$, torej je

$$\tau(\pi) = \frac{(\dot{\vec{r}}(\pi), \ddot{\vec{r}}(\pi), \dddot{\vec{r}}(\pi))}{|\dot{\vec{r}}(\pi) \times \ddot{\vec{r}}(\pi)|^2} = 0.$$

2. Dano je vektorsko polje $\vec{F} = (4y^2 + 2x^2, z + x, y)$. Izračunaj

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r},$$

kjer je $\mathcal{C}$ krivulja, dana z relacijama $z = 4 - x^2 - y^2$ in $z = y^2$.

Rešitev: Krivulja je dana kot presek ploskve $z = 4 - x^2 - y^2$ in $z = y^2$. če primerjamo obe enačbi, dobimo $x^2 + 2y^2 = 4$, $z = y^2$, torej lahko krivuljo parametriziramo z

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2\sin^2 t).$$

Ker orientacija ni predpisana, lahko privzamemo, da t teče od 0 do 2π. Zato je

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (8, 2\sin^2 t + 2\cos t, \sqrt{2}\sin t) \cdot (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, 4\sin t\cos t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-16\sin t + 6\sqrt{2}\sin^2 t\cos t + 2\sqrt{2}\cos^2 t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-16\sin t + 6\sqrt{2}\sin^2 t\cos t + \sqrt{2}(1 + \cos 2t))\, \mathrm{d}t \\
&= 16\cos t + 2\sqrt{2}\sin^3 t + \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t \Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

3. Določi težišče homogene ravninske plošče, omejene s krivuljama $y = 2x^3$ in $y^2 = 4x$.

Rešitev: Krivulji se sekata v točki $T(1,2)$, zato lahko ploščo opišemo z

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

Ker je telo homogeno, lahko predpostavimo, da je gostota v vsaki točki enaka 1. Zato je

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{5}{6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{m}\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{12}{5}\int_0^1 (x^{3/2} - x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{12}{5}\left(\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{12}{25},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_T &= \frac{1}{m}\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{12}{5}\int_0^1 (x - x^6)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{12}{5}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{6}{7},
\end{aligned}$$

torej je težišče v točki $T(\frac{12}{25}, \frac{6}{7})$.

4. Izračunaj volumen telesa, ki ga omejujeta ploskvi $z = x^2 + y^2$ in $z = x - y$.

Rešitev: Presečišče ploskev je določeno s pogojem $x^2 + y^2 = x - y$, od koder sledi $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, torej je njegova projekcija na ravnino $z = 0$ krožnica s središčem $S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in polmerom $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Območje $\mathcal{D}$, ki ga ta krožnica omejuje, lahko parametriziramo s polarnimi koordinatami: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Meje za r dobimo, če to vstavimo v enačbo krožnice: $r \in [0, \cos\varphi - \sin\varphi]$. To je smiselno le, če je $\cos\varphi - \sin\varphi \geq 0$, torej $\varphi \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Zato je

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{D}} ((x - y - (x^2 + y^2))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi - \sin\varphi} (r^2(\cos\varphi - \sin\varphi) - r^3)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{12}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi - \sin\varphi)^4\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Izračunajmo najprej ustrezni nedoločeni integral:

$$\begin{aligned} \int (\cos\varphi - \sin\varphi)^4\,\mathrm{d}\varphi &= \int (\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) - \sin\varphi)^4\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int (2\cos(\frac{\pi}{4} - \varphi)\sin\frac{\pi}{4})^4\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\int \cos^4(\frac{\pi}{4} - \varphi)\,\mathrm{d}\varphi \qquad (\text{subst. } t = \tfrac{\pi}{4} - \varphi) \\ &= -4\int \cos^4 t\,\mathrm{d}t \\ &= -\int (1 + \cos 2t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= -\int (1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2})\,\mathrm{d}t \\ &= = -\frac{3}{2}(\frac{\pi}{4} - \varphi) - \sin(\frac{\pi}{2} - 2\varphi) - \frac{1}{8}\sin(\pi - 4\varphi) + c. \end{aligned}$$

Zato je

$$V = \frac{1}{12}\left(-\frac{3}{2}(\frac{\pi}{4} - \varphi) - \sin(\frac{\pi}{2} - 2\varphi) - \frac{1}{8}\sin(\pi - 4\varphi)\right)\Bigg|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Matematika 2 za kemike - 2. kolokvij

27.2.2003

B

Ime in priimek: Vpisna številka:

1. Naj bo $b > 0$. Krivulja $\mathcal{K}$ je dana kot presek ploskve $z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$ z valjem $x^2 + y^2 = by$. Poišči kako parametrizacijo te krivulje ter izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost krivulje $\mathcal{K}$ v točki $T(0, 0, b)$.

2. Dano je vektorsko polje $\vec{F} = (z + y, 4x^2 + 2y^2, x)$. Izračunaj

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r},$$

kjer je $\mathcal{C}$ krivulja, dana z relacijama $z = 4 - x^2 - y^2$ in $z = x^2$.

3. Določi težišče homogene ravninske plošče, omejene s krivuljama $y = 3x^3$ in $y^2 = 9x$.

4. Izračunaj volumen telesa, ki ga omejujeta ploskvi $z = x^2 + y^2$ in $z = y - x$.