MATEMATIKA 2, FKKT-KEMIJA, 2. KOLOKVIJ
5. februar 2009

1. Krivulji, podani s parametrizacijo

$$\mathbf{r}(t) = (t, 3\sin(t) - 1, 3\cos(t)),$$

določi spremljajoči trieder in enačbo pritisnjene ravnine pri $t = \frac{\pi}{3}$.

2. Podana je ploskev S:

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ in } 4x^2y^2 \leqslant z \leqslant 5\}.$$

Prepričaj se, da podaja

$$\mathbf{r}(\varphi, t) = \Big(\cos\varphi, \sin\varphi, (1-t)\cdot 4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + 5t\Big)$$

parametrizacijo za S (kjer $\varphi \in [0, 2\pi]$ in $t \in [0, 1]$) in izračunaj površino ploskve S.

3. Ploskev

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ 1 \leqslant z \leqslant 3\}$$

je orientirana s poljem normal, ki kažejo stran od osi z.

Podano je vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \Big(xyz + e^y, y^3 + 3x^2y + e^z, z + e^{x^2+y^2}\Big).$$

Izračunaj pretok $\iint_S \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{S}$ s pomočjo Gaußovega izreka.

4. Krivulja C je podana kot presek ploskev $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in $x = 0$:

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \mid x = 0\}.$$

(a) Podano je vektorsko polje

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{3x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{3y}{x^2+y^2+z^2}, 0\right).$$

Zapiši definicijsko območje polja $\mathbf{A}$ in izračunaj integral $\int_C \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{s}$ po definiciji. Orientacijo si izberi in izbrano orientacijo primerno označi na skici.

(b) Podano je vektorsko polje

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \left(\frac{3x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{3y-2z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z+3y}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Izračunaj integral $\int_C \mathbf{B}\cdot\, d\mathbf{s}$ s pomočjo Stokesovega izreka.
Pomagaj si s formulo (ki je ni potrebno dokazati)

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{F}}{f}\right) = \frac{1}{f}\operatorname{rot}\mathbf{F} + \frac{1}{f^2}\mathbf{F}\times(\operatorname{grad} f) \qquad (*)$$

za skalarno polje f in vektorsko polje $\mathbf{F}$.

Za izračun skalarnega produkta $\operatorname{rot}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$ najprej uporabi enačbo $(*)$ in jo poenostavi pred izračunom vektorskega produkta.