Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Predavalnica: __________ Vrsta: __________ Kolona: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: __________

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Kemija – univerzitetni študij skupina A

26. maj 2014

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Določi enačbo ravnine, ki je vzporedna premicama $\frac{x}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z-1}{4}$ in $x+4 = \frac{y-2}{3} = z-5$ ter gre skozi točko $(4, 2, -1)$.

Rešitev: Prva premica ima smerni vektor $s_1 = (2, -3, 4)$, druga premica pa $s_2 = (1, 3, 1)$. Iskana ravnina je vzporedna s_1 in s_2, torej je njena normala pravokotna na s_1 in s_2, kar pomeni da je normala n vzporedna vektorju $s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3-12, -2+4, 6+3) = (-15, 2, 9)$. Točka (x, y, z) leži na ravnini z normalo n skozi točko T natanko tedaj ko velja $\big((x, y, z) - T\big) \cdot n = 0$, torej v našem primeru $\big((x, y, z) - (4, 2, -1)\big) \cdot (-15, 2, 9) = 0$ oziroma $\underline{\underline{-15x + 2y + 9z = -65}}$.

2. [25] Za $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in $b=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ poišči vse rešitve sistema $Ax = b$ ter kako bazo jedra matrike A.

Rešitev: Enačba $Ax = b$ je linearen sisten štirih enačb s petimi neznankami (x, y, z, u, v), ki ga rešujemo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4)+(1)+(2)-(3) \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

Rang te matrike je 4, torej bo spremenljivka v postala parameter in bo množica rešitev enodimenzionalna. Sistem razpišemo od spodaj navzgor in vse izrazimo z v:

$$\begin{aligned} &u = -v/8 - 1 \\ &z = 2u + 2v + 3 = -v/4 - 2 + 2v + 3 = 7v/4 + 1 \\ &y = 3z - 4u - 2 = 21v/4 + 3 + v/2 + 4 - 2 = 23v/4 + 5 \\ &x = -2z + u + v + 1 = -7v/2 - 2 - v/8 - 1 + v + 1 = -21v/8 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21v/8-2 \\ 23v/4+5 \\ 7v/4+1 \\ -v/8-1 \\ v \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -21/8 \\ 23/4 \\ 7/4 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} -21 \\ 46 \\ 14 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}\} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Za računanje jedra rešujemo sistem $Ax = 0$. To je podoben sistem kot zgoraj, le da imamo za črtkano črto same ničle, torej se x, y, z, u podobno izražajo z v, le brez konstant:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -21/8 \\ 23/4 \\ 7/4 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} -21/8 \\ 23/4 \\ 7/4 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix}\} = \mathrm{Lin}\{8\begin{bmatrix} -21/8 \\ 23/4 \\ 7/4 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix}\} = \underline{\underline{\mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} -21 \\ 46 \\ 14 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}\}}}$$

3. [25] Ugotovi ali velja $\mathrm{Lin}\left\{\begin{bmatrix}3\\-3\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}=\mathrm{Lin}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\-2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$.

Rešitev: Zgornje vektorje zapored označimo z u,v,x,y,z. Enakost $\mathrm{Lin}\{u,v\}=\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$ velja natanko tedaj ko veljata inkluziji $\mathrm{Lin}\{u,v\}\subseteq\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$ in $\mathrm{Lin}\{u,v\}\supseteq\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$, torej natanko tedaj ko velja $u,v\in\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$ in $\mathrm{Lin}\{u,v\}\ni x,y,z$.
Inkluzija $u\in\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$ velja natanko tedaj ko obstajajo $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ da velja $\alpha x+\beta y+\gamma z=u$, torej ko je sistem $[x,y,z]\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=u$ rešljiv. Podobno velja za $v\in\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$. Preverimo:

$$[x\ y\ z\,\vdots\,u]=\left[\begin{array}{rrr:r}1&0&2&3\\-2&3&-1&-3\\2&-2&2&4\\0&2&2&2\end{array}\right]\sim\begin{array}{r}(1)\\(2)+2(1)\\(3)-2(1)\\(4)\end{array}\left[\begin{array}{rrr:r}1&0&2&3\\0&3&3&3\\0&-2&-2&-2\\0&2&2&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrr:r}1&0&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$[x\ y\ z\,\vdots\,v]=\left[\begin{array}{rrr:r}1&0&2&1\\-2&3&-1&1\\2&-2&2&0\\0&2&2&2\end{array}\right]\sim\begin{array}{r}(1)\\(2)+2(1)\\(3)-2(1)\\(4)\end{array}\left[\begin{array}{rrr:r}1&0&2&3\\0&3&3&3\\0&-2&-2&-2\\0&2&2&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrr:r}1&0&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Vidimo, da sta oba sistema rešljiva. Inkluzije $x,y,z\in\mathrm{Lin}\{u,v\}$ so ekvivalentne rešljivosti sistemov $[u,v]\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right]=x,y,z$. Tokrat to preverimo kar hkrati:

$$[u\ v\,\vdots\,x\ y\ z]=\left[\begin{array}{rr:rrr}3&1&1&0&2\\-3&1&-2&3&-1\\4&0&2&-2&2\\2&2&0&2&2\end{array}\right]\sim\begin{array}{r}(1)-(4)\\(2)+(1)\\(3)-2(4)\\(4)/2\end{array}\left[\begin{array}{rr:rrr}1&-1&1&-2&0\\0&2&-1&3&1\\0&-4&2&-6&-2\\1&1&0&1&1\end{array}\right]\sim\begin{array}{r}(1)\\(2)\\(3)+2(2)\\(4)-(1)-(2)\end{array}\left[\begin{array}{rr:rrr}1&-1&1&-2&0\\0&2&-1&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Vidimo, da so vsi trije sistemi rešljivi. Torej res velja $\mathrm{Lin}\{u,v\}=\mathrm{Lin}\{x,y,z\}$. Mimogrede: $x=\frac{u-v}{2}$, $y=\frac{3v-u}{2}$, $z=\frac{u+v}{2}$.

4. [25] Izračunaj determinanto matrike $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a+1 & 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+3 & a+4 & a+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{smallmatrix}\right]$ in ugotovi pri katerih $a \in \mathbb{R}$ je matrika obrnljiva.

Rešitev: Na determinanti naredimo vrstične operacije, nato zamenjamo prvi dve vrstici, ter izvedemo razvoj po prvi vrstici:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a+1 & 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+3 & a+4 & a+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (1) \\ (2)-(1) \\ (3)+(4) \\ (4) \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & 0 & a & 0 \\ 2 & a & a & a \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (2) \\ (1) \\ (3) \\ (4)+(1) \end{array} - \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & a & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-a\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & a & a \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & a \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} -a\big(2(-a+a)-3(-a+a)+4(-a+a)\big) \\ -a\big(1(-a+a)-2(-2-2a)+4(-2-2a)\big) \end{array} = \underline{\underline{4a(a+1)}}$$

Matrika je obrnljiva natanko tedaj ko je njena determinanta neničelna, torej ko je $\underline{\underline{a \neq 0, -1}}$.