MATEMATIKA 2, FKKT-KEMIJA, 3. KOLOKVIJ Z DNE 1. 4. 2009, REŠITEV

1. Podana je diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + 2y = 5\cos(2x) \qquad (*)$$

(a) Diferencialna enačba $(*)$:

- ☐ ima ločljivi spremenljivki
- ☐ je homogena
- ☒ je linearna (kateregakoli reda)
- ☐ je Bernoullijeva
- ☐ ne ustreza naštetim kategorijam

(b) Splošno rešitev enačbe $(*)$ predstavlja:

- ☐ natančno določena funkcija
- ☐ par natančno določenih funkcij
- ☐ enoparametrična družina funkcij
- ☒ dvoparametrična družina funkcij
- ☐ nekaj, kar ni moč opisati kot zgoraj

2. Izračunaj splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = \frac{(2x^{\frac{1}{2}} + 3x^5 - 4x^{-3})(1 + y^3)}{y^2}$$

Enačba ima ločljivi spremenljivki, zato jo preoblikujemo v

$$\frac{y'y^2}{(1 + y^3)} = 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^5 - 4x^{-3}$$

in pripravimo za integriranje:

$$\frac{y^2\ \mathrm{d}y}{(1 + y^3)} = \left(2x^{\frac{1}{2}} + 3x^5 - 4x^{-3}\right)\mathrm{d}x.$$

Za integral leve strani vpeljemo neznanko $u = 1 + y^3$ z diferencialom $\mathrm{d}u = 3y^2\ \mathrm{d}x$:

$$\int \frac{y^2\ \mathrm{d}y}{(1 + y^3)} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{3}\log|u| = \frac{1}{3}\log|1 + y^3|.$$

Integral desne strani je preprost:

$$\int \left(2x^{\frac{1}{2}} + 3x^5 - 4x^{-3}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^6 + 2x^{-2}.$$

Splošno rešitev tako lahko podamo v obliki:

$$\boxed{\frac{1}{3}\log|1 + y^3| = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^6 + 2x^{-2} + C.}$$

3. Izračunaj splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + 3x^4 y = x^9 y^3.$$

Enačba je Bernoullijeva. Za pretvorbo v linearno enačbo jo pomnožimo z y^{-3}:

$$y' y^{-3} + 3x^4 y^{-2} = x^9.$$

Napravimo substitucijo $u = y^{-2}$, $u' = -2y^{-3} \cdot y'$, in dobimo:

$$-\frac{1}{2}u' + 3x^4 u = x^9. \qquad (*)$$

To je nehomogena linearna enačba. Pridružena homogena enačba se glasi

$$-\frac{1}{2}u' + 3x^4 u = 0 \quad \text{oziroma} \quad \frac{u'}{u} = 6x^4, \qquad (**)$$

kar lahko že integriramo in dobimo:

$$\log|u| = 6 \cdot \frac{x^5}{5} + \log C, \quad C > 0 \qquad \text{oziroma} \qquad u = C \cdot e^{6x^5/5}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

To je splošna rešitev homogene enačbe $(**)$. Nastavek za rešitev enačbe $(*)$ je variacija konstante:

$$u = C(x) \cdot e^{6x^5/5}.$$

Odvajamo:

$$u' = C' \cdot e^{6x^5/5} + e^{6x^5/5} \cdot 6x^4.$$

Ko izraza za u in u' vstavimo v $(*)$, dobimo:

$$-\frac{1}{2}C' \cdot e^{6x^5/5} = x^9$$

oziroma

$$C'(x) = -2e^{-6x^5/5}x^9, \qquad C(x) = -2\int e^{-6x^5/5}x^9 \, dx = -2\int e^{-6x^5/5} \cdot x^5 \cdot x^4 \, dx.$$

Substitucija se ponuja sama od sebe:

$$t = -\tfrac{6x^5}{5} \implies dt = -6x^4 \, dx \quad \text{in zato} \quad x^5 = -\tfrac{5t}{6} \quad \text{ter} \quad x^4 \, dx = -\tfrac{1}{6} \, dt.$$

To pomeni:

$$C(x) = -2\int e^t \cdot (-\tfrac{5}{6}t) \cdot (-\tfrac{1}{6}) \, dt = -\tfrac{5}{18}\int e^t \; t \, dt.$$

Izračunamo še $\int e^t \; t \, dt = e^t \; (t-1) + D$, zato

$$C(x) = -\tfrac{5}{18}e^t \; (t-1) + D = -\tfrac{5}{18}e^{-6x^5/5}\Big(-\tfrac{6x^5}{5} - 1\Big) + D = e^{-6x^5/5}\Big(\tfrac{1}{3}x^5 + \tfrac{5}{18}\Big) + D.$$

Odtod izrazimo

$$u = \Big(\frac{x^5}{3} + \frac{5}{18}\Big) + De^{6x^5/5} \quad \text{in končno} \quad \boxed{y = \bigg(\Big(\frac{x^5}{3} + \frac{5}{18}\Big) + De^{6x^5/5}\bigg)^{-\frac{1}{2}}.}$$

4. Izračunaj splošni rešitvi naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $y'' - y' - 6y = e^{3x}$

(b) $y'' - 6y' + 34y = \dfrac{e^{3x}}{\cos(5x)}$

(**a**)
Enačba je nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda. Prirejena homogena enačba $y'' - y' - 6y = 0$ ima karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

in splošna rešitev prirejene homogene enačbe je $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.
Za partikularno rešitev se poslužimo nastavka $y_p = a \cdot x \cdot e^{3x}$.
Odvajamo $y_p' = ae^{3x}(3x + 1)$, $y_p'' = ae^{3x}(9x + 6)$.
in vstavimo v nehomogeno enačbo, pa dobimo $5a \cdot e^{3x} = e^{3x}$ in zato $a = \frac{1}{5}$, iz česar zaključimo, da se splošna rešitev enačbe glasi:

$$\boxed{y = \frac{1}{5} x e^{3x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.}$$

(**b**)
Enačba je nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda. Prirejena homogena enačba $y'' - 6y' + 34y = 0$ ima karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 34.$$

Diskriminanta $D = -100$ je negativna, ničli sta konjugirano kompleksni $\lambda_{1,2} = 3 \pm 5i$. Splošna rešitev homogene enačbe se glasi:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad \text{kjer} \qquad y_1 = e^{3x}\cos(5x), \qquad y_2 = e^{3x}\sin(5x).$$

Nastavek za splošno rešitev je variacija parametrov $y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$. Wronskijeva determinanta je enaka

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3x}\cos(5x) & e^{3x}\sin(5x) \\ 3e^{3x}\cos(5x) - 5e^{3x}\sin(5x) & 3e^{3x}\sin(5x) + 5e^{3x}\cos(5x) \end{vmatrix} = 5e^{6x}.$$

Velja $C_1' = -\frac{f \cdot y_2}{W}$ in $C_2' = \frac{f \cdot y_1}{W}$, kjer je $f(x) = \frac{e^{3x}}{\cos(5x)}$ desna stran enačbe.
To pomeni

$$C_1' = -\frac{1}{5}\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}, \qquad C_2' = \frac{1}{5}.$$

Integrala sta elementarna (prvega lahko izračunamo s pomočjo substitucije $u = \cos(5x)$. Torej $C_1 = \frac{1}{25}\log|\cos(5x)| + A$, $C_2 = \frac{1}{5}x + B$. zato se splošna rešitev glasi:

$$\boxed{y = \left(\tfrac{1}{25}\log|\cos(5x)| + A\right)e^{3x}\cos(5x) + \left(\tfrac{1}{5}x + B\right)e^{3x}\sin(5x).}$$