$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$

$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

$\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(k\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{ctg}(k\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{ctg}\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\mathrm{ctg}\alpha$

$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\mathrm{tg}\alpha$

$\sin(k2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$

$\cos(k2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos$

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{ctg}\beta\pm\mathrm{ct}}$

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin$

$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta}{\sin\alpha\sin}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

$(kx+n)'=k$

$(C)'=0$

$(C\cdot f)'(x)=C\cdot f'(x)$

$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1};n\in R$

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a;a>0$

$(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a;a>0$

$(e^x)'=e^x$

$x=e^{\ln x}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\mathrm{tg}x)'=$ … co

$(\mathrm{ctg}x)'=-$

$(\arcsin x)'$

$(\arccos x)'$

$(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2};g(x)\neq0$

T: f in g sta odvedljivi funkciji.

$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx};u=g(x),y=f(u)$

T: f je odvedljiva in bijektivna. Potem je f^{-1} tudi odvedljiva in velja:

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

DIFERENCIAL: $dy=f'(x_0)dx$

$\int(f\pm g)dx=\int f\,dx\pm\int g\,dx$

$\int C\cdot f\,dx=C\cdot\int f\,dx$

$\int u\,dv=uv-\int v\,du$ PERPARTES

$\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$

$\int\dfrac{f'}{f}dx=\ln|f|+C$

$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C;n\neq1$

$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

$\int a^{kx}dx=\dfrac{a^{kx}}{k\cdot\ln a}+C$

$\int e^x dx=e^x+C$

$\int e^{kx}dx=\dfrac{1}{k}e^{kx}+C$

$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

$\int\cos x\,dx=\sin x+C$

$\int\mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x+C$

$\int\mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x+C$

$\int\dfrac{dx}{\sin^2x}=-\mathrm{ctg}x+C$

$\int\dfrac{dx}{\cos^2x}=\mathrm{tg}\,x+C$

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x+C$

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$

$\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$

$\int\dfrac{p^{(n)}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=q^{(n-1)}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$

$\int\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\dfrac{T^{(2n-3)}(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\int$

$\int\dfrac{S^{(m)}(x)}{(x-k)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},m<n:x-k=\dfrac{1}{t}$

$t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\quad\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\quad\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\quad dx$

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f($$

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx +$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

P: (**DRUGI OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA**): Če je $G'(x) = f(x)\ \forall x$, je $\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

T: Če je $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ monotona odvedljiva funkcija in f zvezna, potem velja $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$, če je

$\varphi(\alpha) = a$ in $\varphi(\beta) = b$.

/rd/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
/°/	0	30	45	60	90	180	270
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

PLOSKOVNI INTEGRALI

PLOSKOVNI INTEGRAL SKALARNEGA POLJA:

$$\text{skalarno polje } \varphi: R^2 \to R^2,\ \varphi = \varphi(x,y,z),\ \vec{r} = (x,y,z) = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D,\ P: z = z(x,y),\ \vec{r}_u = \frac{\partial r}{\partial u},\ \vec{r}_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

$$E = \vec{r}_u \circ \vec{r}_u$$
$$F = \vec{r}_u \circ \vec{r}_v \qquad \iint_P \varphi(x,y,z)dS = \iint_D \varphi\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$
$$G = r_v \circ r_v$$

Površina ploskve: $S = \iint_P dS$

Masa ploskve: $m = \iint_P \rho\,dS$

Težišče ploskve: $x_T = \frac{1}{m}\iint_P x\rho\,dS, \quad y_T = \frac{1}{m}\iint_P y\rho\,dS, \quad z_T = \frac{1}{m}\iint_P \rho\,dS$

Sferične koordinate:

$$x = a\sin\vartheta\cos\varphi \quad \vec{r} = (a\sin\vartheta\cos\varphi, a\sin\vartheta\sin\varphi, a\cos\vartheta) \quad E = a^2\sin^2\vartheta \quad \sqrt{EG - F^2} = a^2\sin\vartheta \quad (\vartheta \in [0,\pi])$$
$$y = a\sin\vartheta\sin\varphi \quad \vec{r}_\vartheta = (a\cos\vartheta\cos\varphi, a\cos\vartheta\sin\varphi, -a\sin\vartheta) \quad F = 0 \quad \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\vartheta = -a^2 \cdot (\sin^2\vartheta\cos\varphi, \sin^2\vartheta\sin$$
$$z = a\cos\vartheta \quad r_\varphi = (-a\sin\vartheta\sin\varphi, a\sin\vartheta\cos\varphi, 0) \quad G = a^2$$

D: Koordinate, pri katerih je $F = 0,$ so **ORTOGONALNE**.

PLOSKOVNI INTEGRAL VEKTORSKEGA POLJA:

$$P: \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D, \quad \text{vektorsko polje } \vec{F}: R^3 \to R^3,\ \vec{F} = (P,Q,R)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \qquad \iint_P \vec{F} \circ \vec{n} \cdot dS = \iint_P P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = (\pm)\iint_D \vec{F} \circ (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,du\,dv = (\pm)\iint_D (\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\,du\,dv$$

D: Ploskev z zvezno spreminjajočim se normalnim enotskim vektorskim poljem imenujemo **ORIENTIRANA PLOSKEV**.

D: **DIVERGENCA POLJA**: $\vec{F} = (P,Q,R), \quad \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

GAUSSOV IZREK: Naj bo Ω območje v prostoru, omejeno s končno mnogo sklenjenimi ploskvami, ki se dajo parametrizirati z odsekoma zvezno odvedljivimi funkcijami. Na vsaki robni ploskvi izberemo $\vec{n}$, ki kaže ven iz telesa. Naj bo $\vec{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje, definirano za $\Omega \cup \partial\Omega$. Potem velja: $\oiint_{\partial\Omega} \vec{F} \circ d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\, dV.$

D: **ROTOR**: $\vec{F} = (P,Q,R), \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

T: Vektorsko polje $\vec{F}$ na R^3 je potencialno $\iff \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}.$

STOKESOV IZREK: Naj bo P orientirana odsekoma zvezno odvedljiva ploskev z zveznim enotskim normalnim poljem N in ∂P sestavljen iz končno mnogo odsekoma zvezno odvedljivih krivulj, usmerjenih v skladu z orientacijo ploskve. Naj bo $\vec{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje v okolici ploskve P. Potem velja: $\oint_{\partial P} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_P \operatorname{rot}\vec{F} \circ d\vec{S}.$

DIFERENCIALNE ENAČBE

D: **RED** diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi. **REŠITEV** pa so vse take funkcije, ki zadoščajo enačbi.

DIFERENCIALNE ENAČBE 1. REDA: $f(x, y, y') = 0$

1. *z ločljivima spremenljivkama*: $y' = \frac{F(x)}{G(y)} \iff \int G(y)dy = \int F(x)dx$

2. *homogena*: $y' = f(x,y)$ $\quad u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xu,\ y' = u + xu' \longrightarrow$ enačba z ločljivima spremenljivkama

¤ $f(x,y)$ je **HOMOGENA FUNKCIJA** $\iff f(tx,ty) = f(x,y).$

3. *skoraj homogena*: $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ a) premici se sekata v točki (x_0, y_0) : nove koordinate:

$$u = x - x_0,\ v = y - y_0 \Leftrightarrow y' = v'\left(= \frac{dv}{du}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \longrightarrow \text{homogena enačba;}$$

b) premici sta vzporedni $\iff (a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$: nova funkcija: $z(x) = a_1x + b_1y \Leftrightarrow y' = \frac{z' - a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right) \longrightarrow$ enačba z ločljivima spremenljivkama

4. *linearna*: $y' + p(x)y = f(x)$ a) rešimo homogeni del $y' + p(x)y = 0$, b) variiramo konstanto

5. *Bernoullijeva enačba*: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $\Leftrightarrow z = y^{1-n} \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = p(x)z + q(x) \longrightarrow$ linearna enačba

6. *Lagrangeova*: $y = x f(y') + g(y')$ $\Leftrightarrow y' = \varphi(t)_{(=t)} = \frac{dy}{dx} \quad y = \psi(t),\ x = \vartheta(t)$

I: **EULERJEVA METODA**: Naj bo f zvezna funkcija na $P = (a,b) \times (c,d)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ tudi zvezna. Potem za $\forall (x_0, y_0) \in P\ \exists$ funkcija

$y = y(x):\ y' = f(x,y),\ y_0 = y(x_0).$ Funkcija $y = y(x)$ obstaja v splošnem le za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ za nek δ. Če je

$P = (a,b) \times (-\infty, \infty)$ in $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M\ \forall (x,y) \in P,$ potem je $y = y(x)$ definirana na celotnem intervalu $[a,b].$

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE 2. REDA: $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$

IZREK O EKSISTENCI IN ENOLIČNOSTI: Na bodo a, b in f zvezne funkcije na intervalu $[\alpha, \beta],\ x_0 \in [\alpha, \beta]$ in $y_0, z_0 \in R.$ Potem $\exists!$ rešitev enačbe $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$, ki zadošča pogojema $y(x_0) = y_0$ in $y'(x_0) = z_0.$ Ta rešitev je definirana na celem intervalu $[\alpha, \beta].$

T: Vsako rešitev y enačbe $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ lahko izrazimo kot vsoto $y = y_P + y_H$, kjer je y_P partikularna rešitev te enačbe, y_H pa rešitev homogene enačbe $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$

D: Dve funkciji y_1 in y_2 sta **LINEARNO NEODVISNI**, če nobena od njiju ni konstanten mnogokratnik druge.

I: Če sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$, potem lahko vsako rešitev y te enačbe izrazimo v obliki

$y=C_1y_1+C_2y_2,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$ Množica vseh rešitev homogene linearne diferencialne enačbe 2. reda je dvorazsežen vektorski prostor.

1. ***homogena***: $\boxed{a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0}$ $\Leftrightarrow$ determinanta Wronskega: $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}$, Liouvillova formula: $W(x)=e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$;

$$C'(x)=\frac{W(x)}{y_y^2},\ y_2=C(x)\cdot y_1$$

T: Če je v eni točki $W(x_0)=0,$ potem je $W(x)=0\ \text{za}\ \forall x\in[\alpha,\beta].$ (Takrat sta rešitvi linearno odvisni.)

2. ***s konstantnimi koeficienti***: $\boxed{ay''+by'+cy=0}$ $\Leftrightarrow$ karakteristična enačba: $a\lambda^2+b\lambda+c=0$; a)

$\lambda_1\neq\lambda_2\wedge\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\Rightarrow y_1=e^{\lambda_1x},y_2=e^{\lambda_2x};$ b) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\Rightarrow y_1=e^{\lambda x},y_2=xe^{\lambda x};$

c) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i\Rightarrow y_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$

3. ***nehomogena***: $\boxed{a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x)}$ $\Leftrightarrow$ a) rešimo homogeni del $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$, b) rešimo sistem

$$C_1'(x)\cdot y_1+C_2'(x)\cdot y_2=0$$
$$C_1'(x)\cdot y_1'+C_2'(x)\cdot y_2'=f(x)$$

4. ***enačba oblike***: $\boxed{ay''+by'+cy=f_n(x)\cdot e^{\lambda x}}$ (n – stopnja polinoma f) $\Leftrightarrow$ a) rešimo homogeni del $ay''+by'+cy=0$, b) izračunamo partikularno rešitev z nastavkom: $y_P=g_n(x)\cdot x^k\cdot e^{\lambda x}$ (k – število, kolikokrat se ponovi rešitev $y=\lambda, k=0,1,2;$ q je splošni polinom stopnje n)

5. ***Eulerjeva***: $\boxed{x^2\cdot y''+p\cdot x\cdot y'+q\cdot y=0}$ $\Leftrightarrow x=e^t,\quad y'=\dot{y}\cdot e^{-t},\ y''=(\ddot{y}-\dot{y})\cdot e^{-2t}$ $\longrightarrow$ homogena enačba s konstantnimi koeficienti

DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJEGA REDA: $\boxed{f(x,y,y',y'',\ldots)=0}$

1. ***ki jim lahko znižamo red***: $\boxed{f(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots)=0}$ $\Leftrightarrow$ nova funkcija: $z=y^{(k)}$ $\longrightarrow f(x,z,z',\ldots)=0$

2. ***kjer x ne nastopa***: $\boxed{f(y,y',y'',\ldots)=0}$ $\Leftrightarrow$ nova neodvisna spremenljivka: y; nova funkcija:

$$y'=:z(y),\quad y''=zz',\ y'''=z^2z''+zz'^2\quad\to\ f(y,z,zz',z^2z''+zz'^2,\ldots)=0$$