| /rd/ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| /°/ | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 270 |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | –1 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | –1 | 0 |
| tg | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ |
| ctg | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\infty$ | 0 |

$x^n = ?$

| x\n | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 |
| 7 | 79 | 343 | 2401 | |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | |
| 11 | 121 | 1331 | | |
| 12 | 144 | 1728 | | |
| 13 | 169 | | | |
| 14 | 196 | | | |
| 15 | 225 | | | |
| 16 | 256 | | | |
| 17 | 289 | | | |
| 18 | 324 | | | |
| 19 | 361 | | | |
| 20 | 400 | | | |

$\sin^2\alpha + \mathrm{co}$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha = -$

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha =$

$\sin(-\alpha) =$

$\cos(-\alpha) =$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -$

$\mathrm{ctg}(-\alpha) =$

$\sin(\pi\pm\alpha)$

$\cos(\pi\pm\alpha)$

$\mathrm{tg}(k\pi\pm\alpha)$

$\mathrm{ctg}(k\pi\pm$

$\sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \mathrm{co}$

$\cos(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \pm\mathrm{s}$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \mp\mathrm{ct}$

$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \mp\mathrm{t}$

$\sin(k2\pi\pm\alpha) = \pm$

$\cos(k2\pi\pm\alpha) = \mathrm{c}$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \mathrm{co}$

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{tg}}{1\mp}$

$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{ctg}}{\mathrm{ct}}$

$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = -$

$\mathrm{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = -$

$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$

$\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$

$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x$

$\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}x$

$\mathrm{cth}(-x) = -\mathrm{cth}x$

$\mathrm{arsh}x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$\mathrm{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

**EULERJEVE FORMULE:**

$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad e^{k2\pi i} = 1; k\in Z$

$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = -\mathrm{sh}(ix)$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \cos x = \mathrm{ch}(ix)$

---

$\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin$

$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm}{\sin\alpha\sin}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos($

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin($

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\mathrm{c}$

$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{tg}^2\alpha - 1}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos}{1+\cos}}$

$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} =$

$z = a+bi$

$\bar{z} = a-bi$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

$\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

$|z+w| \le |z| + |w|$

$|z-w| \ge \left||z|-|w|\right|$

$z = a+bi$

$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + k\pi, k = 0,1,2$

$a = 0, b > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$a = 0, b < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$a > 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$a < 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$

$z\cdot w = |z|\cdot|w|\cdot(\cos(\varphi_z + \varphi_w) +$

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\cdot(\cos(\varphi_z - \varphi_w) + i\cdot\mathrm{s}$

$z^{-1} = |z|^{-1}\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)$

$z^n = |z|^n\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n =$

$x^n - z = 0$

$x_{k+1} = \sqrt[n]{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n}$

$(k = 0,1,2,\dots,n-1)$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1$

$\lim_{n\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(k-r)!} \quad n\in$

$\binom{r}{k} = \frac{r\cdot(r-1)(r-2)..}{k!}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

**PRAŠTEVILA:**
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

$\pi \approx 3,1416 \approx \frac{22}{7}$

$\pi^2 \approx 9,8696$

$e \approx 2,71828$

$\sqrt{2} \approx 1,4142$

$\sqrt{3} \approx 1,7321$

$\sqrt{5} \approx 2,2361$

$\sqrt{7} \approx 2,6458$

$\sqrt{11} \approx 3,3166$

$\sqrt{13} \approx 3,6056$

$\sqrt{19} \approx 4,3589$

$\sqrt[3]{2} \approx 1,2599$

$\sqrt[3]{3} \approx 1,4422$

$\sqrt[3]{5} \approx 1,7100$

$\sqrt[3]{7} \approx 1,9129$

$\ln 2 \approx 0,6931$

$\log 2 \approx 0,3010$

$\log e \approx 0,4323$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

**NEDOLOČENI IZRAZI:**

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty\cdot 0, \infty - \infty, 1^\infty$

**DIVERGENTNE VRSTE:**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

**KONVERGENTNE VRSTE:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\quad k>1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^k}\quad k>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^n \quad |q|<1, a\neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$|x| = \begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1; x<0 \\ 0; x=0 \\ 1; x>0 \end{cases}$$

$D_f$ in obnašanje na robovih; ničle; f(0); f' (intervali naraščanja in padanja, ekstremi); f'' (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

**KANDIDATI ZA EKSTREME:**

– ničle f'
– krajišča intervala
– točke, kjer f ni odvedljiva

$$f(x) = g(x) \text{ na } I$$

$$f'(x) = g'(x) \Longrightarrow f(x) - g(x) =$$

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)\cdot h$$

$$(kx+n)' = k$$

$$(C)' = 0$$

$$(C\cdot f)'(x) = C\cdot f'(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$$

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}; n\in R$$

$$(a^x)' = a^x\cdot \ln a; a>0$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x\cdot \ln^n a; a>0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$x = e^{\ln x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{}{c}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -$$

$$(\arcsin x)$$

$$(\arccos x)$$

$$(f\pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}; g(x)\neq 0$$

T: f in g sta odvedljivi funkciji. $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}; u = g(x), y = f(u)$$

T: f je odvedljiva in bijektivna. Potem je $f^{-1}$ tudi odvedljiva in velja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**DIFERENCIAL:** $dy = f'(x_0)dx$

$$\int (f\pm g)dx = \int f\,dx \pm \int g\,d$$

$$\int C\cdot f\,dx = C\cdot \int f\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{PI}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n\neq 1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^x}{k\cdot \ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

$$\int \frac{p^{(n)}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = q^{(n-1)}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{T^{(2n-3)}(x)}{(x^2+px+q)^{n11}} + \int \frac{}{x}$$

$$\int \frac{S^{(m)}(x)}{(x-k)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, m<n: x-k = \frac{1}{t}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx$$

$$\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad a<c<$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

P: (**DRUGI OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA**): Če je

$G'(x) = f(x)\ \forall x$, je

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

T: Če je $\varphi:[\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ monotona odvedljiva funkcija in f zvezna, potem velja $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, če je $\varphi(\alpha) = a$ in $\varphi(\beta) = b$.

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\|\alpha\vec{r}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{r}\|$$
$$\alpha\vec{r} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \ldots$$
$$\forall\vec{a}\ \exists \ldots$$
$$\alpha(\vec{a} + \ldots$$
$$(\alpha + \beta)\vec{a} \ldots$$
$$(\alpha\beta)\vec{a} = \ldots$$
$$1\vec{a} = \vec{a}$$
$$0\vec{a} = \vec{0}$$

¤ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$; $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta KOLINEARNA $\Longleftrightarrow \exists k: k \cdot \vec{a} = \vec{b}$

¤ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ sta KOPLANARNI $\Longleftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

D: Linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ je vsak vektor oblike

$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n \quad (\alpha_i \in R)$. Vektor 0 je vedno linearna kombinacija vektorjev. **Trivialna linearna kombinacija**: Vsi koeficienti v kombinaciji so 0.

D: Vektorji $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ so LINEARNO NEODVISNI, če

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0 \Longrightarrow a_i = 0.$$

D: $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna $\Longleftrightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$.

SKALARNI PRODUKT:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \ldots$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$$
$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \ldots$$
$$\vec{a} \circ (\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a} \circ \vec{b})$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$
$$\vec{a} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

VEKTORSKI PRODUKT:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \mathrm{s}\ldots$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_{\ldots} \\ b_1 & b_2 & b_{\ldots} \end{vmatrix}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_1 \quad \vec{b} = \ldots$$
$$\vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \ldots$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \ldots$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$$

MEŠANI PRODUKT:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \ldots$$
$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \ldots$$
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) \ldots$$
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) \ldots$$
$$(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}) = \alpha\beta\gamma \ldots$$
$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \ldots$$
$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \ldots$$

Trije vektorji so koplanarni, ko je njihov mešani produkt enak 0.

VEČKRATNI PRODUKTI:
<u>dvojni vektorski produkt:</u>

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \circ \vec{c}) \ldots$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \ldots$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \ldots$$

Jacobije…

<u>Lagrangeova identiteta</u>:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \ldots \\ \vec{b} \ldots \end{vmatrix}$$
$$\vec{a} = \vec{c}\ \ \vec{d} = \vec{b} \Longrightarrow$$
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \ldots$$

D: NORMA ALI DOLŽINA VEKTORJA a v v. pr. V s skalarnim produktom je

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \text{trikotniška neenakost}$$

$$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \Longrightarrow a = 0$$
$$\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$$

D: Realna matrika velikosti m×n, $M_{m,n}$, je tabela oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij} \ldots$$

¤ <u>**Stolpec**</u>: $M_{m,1}$, <u>**Vrstica**</u>: $M_{1,n}$, <u>**Kvadratna matrika**</u>: $M_{n,n}$=$M_n$

¤<u>**Diagonalna matrika**</u>: $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{bmatrix}$,

<u>**Identična matrika**</u>: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

<u>**Skalarna matrika**</u>: $A = \alpha I$, <u>**Zgornja trikotna n×n matrika**</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(podobno <u>spodnja</u>):

;

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots \\ \vdots & e_{ij} \\ 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$A, B \in M_{m,n}$$
$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{\ldots}$$
$$\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \in M_{m,n}$$

T: $M_{m,n}$ je za zgoraj definirani operaciji vek. pr. z dim(m·n)

Baza: $A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$; Ogrodje:

$$\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n\}$$

Transponirana matrika matrike A je tista matrika, ki ima na mestu ij tisti element matrike A, ki je v nje na mestu ji.

$$A^T = [a_{ji}] \Longleftrightarrow A = [a_{ij}]$$

D:

$$A \in M_{i,j}, B \in M_{n,p}$$

$$AB = [a_{ij}][b_{jk}] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j2} & \ldots \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j2} & \ldots \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$
$$(AB)C = A(BC)$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

D: Preslikava $A: R^n \longrightarrow R^m$ je LINEARNA, če obstaja taka matrika A velikosti m×n, da je

$A(x) = Ax \quad \forall x \in R^n$.

T: Preslikava $A: R^n \longrightarrow R^m$ je LINEARNA natanko takrat, ko je

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b) \quad \forall a, b \in \ldots$$

D: Linearna preslikava $A: U \longrightarrow V$ je predpis, ki vsakemu vektorju $u \in U$ priredi natanko določen vektor $A(u) \in V$, pri čemer velja:

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b) \quad \forall a, b \in \ldots$$

.

T: Naj bo $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za U, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ pa poljubni vektorji iz V. Potem obstaja natanko ena preslikava $A: U \longrightarrow V$, da je:

$A(a_1) = b_1, \ldots, A(a_n) = b_n$.

¤ $(A(u))_M = A_{M,N}(u_N)$

D: $A: U \longrightarrow V$ linearna preslikava. ZALOGA VREDNOSTI:

$$R_A = \{A(u) : u \in U\} = \{v \in V : \exists u \in U, v = a\ldots$$

. JEDRO: $N_a = \{u \in U : A(u) = 0\} \subseteq U$.

¤

$$\dim N_A = \text{št.spremenljivk} - \text{rang}A$$

; stolpci matrike A so elementi $R_A$, $R_A$ je množica vseh lin. komb. stolpcev matrike A.

T: $A: U \longrightarrow V$ linearna preslikava, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za U. Potem je $\{A(a_1), \ldots, A(a_n)\}$ ogrodje za $R_A$. ( $A: R^n \longrightarrow R^m$ : stolpci matrike A tvorijo ogrodje za $R_A$.)

T: $A: U \longrightarrow V$. A je SURJEKTIVEN (operator) $\Longleftrightarrow R_A = V$. A je INJEKTIVEN $N_A = 0$.

D: A je injektiven, če iz

$A(u_1) = A(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$.

T: $A: U \longrightarrow V$ linearen operator.

$\dim N_A + \dim R_A = \dim U$.

D: $\dim R_A = \text{rang}A$

T: Naj bo u partikularna rešitev sistema $Ax = b$. Vsako rešitev tega sistema lahko izrazimo kot vsoto $x = u + h$, kjer je h rešitev homogenega sistema $Ah = 0$ in obratno. Pri danem b ima sistem $Ax = b$ največ eno rešitev, če ima homogen sistem $Ax = 0$ le rešitev $x = 0$.

D: $A \in M_n$. INVERZNA MATRIKA je taka matrika, da je

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

T: $A \in M_n,\ A : R^n \to R^n$ .

$$N_A = 0 \Leftrightarrow \exists X \in M_n : XA = AX = I$$

T: $R_A = R^n \Rightarrow \exists X \in M_n : XA = AX = I$

D: PERMUTACIJA števil 1,…,n je bijektivna preslikava množice vase.
D: TRANSPOZICIJA je permutacija, ki zamenja le dva elementa.
D:

$$\sigma, \tau \in S_n \to \sigma \cdot \tau \in S_n \quad (\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

. Produkt $\sigma\tau$ je permutacija, ki jo dobimo, če najprej izvedemo $\tau$ in nato $\sigma$.
T: Vsako permutacijo lahko izrazimo kot produkt transpozicij.
D: SODE PERMUTACIJE so tiste, ki se dajo zapisati kot produkt sodomnogih transpozicij. Enako velja za LIHE.
¤ INVERZIJA je pojav, da je večje število pred manjšim. Pri SODI INVERZIJI nastopa sodo število inverzij, pri LIHI pa liho.

D: Predznak permutacije: $\sigma : \begin{cases} 1; \sigma \text{ je soda} \\ -1; \sigma \text{ je liha} \end{cases} : \mathrm{sgn}$

D:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot$$

T: $\cdot \det \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot$

$$\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot$$

$$\det \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{enako za stolpce} \cdot$$

$$\det A^T = \det A$$

¤ (če zamenjamo dve vrstici/stolpca, se predznak spremeni; če vrstico/stolpec pomnožimo s skalarjem, de determinanta pomnoži s tem skalarjem; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu; razvoj po vrstici/stolpcu). Determinanta trikotne ali diagonalne matrike je enaka produktu elementov na diagonali.

T: $\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad A, B \in M_n$

¤ MINOR k elementu $a_{ij}$ je poddeterminanta, v kateri izpustimo vrstico i in stolpec j iz determinante. KOFAKTOR k elementu $a_{ij}$ je $(-1)^{i+j} D_{ij}$ .

¤

$$\tilde{A} = \left[(-1)^{i+j} D_{ji}\right] \quad A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) \cdot I$$

T: Matrika $A \in M_n$ je OBRNLJIVA $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ .

Potem je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \tilde{A}$ .

¤

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \qquad \det A^2 = (\det A)^2$$

¤

$$A^n = P D^n P^{-1} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_m \end{bmatrix} \quad D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$ - lastni vektorji (stolpci)
$\lambda$ - lastne vrednosti

¤

$$A^{-1} / \quad AX = B \qquad XA = B \ / A^{-1}$$
$$X = A^{-1}B \qquad X = BA^{-1}$$

T: $A \in M_{m,n}$ ; rangA je največji tak k, da v A obstaja k×k podmatrika z determinanto različno od 0.

¤

$$\mathrm{rang}A = \text{št. linearno neodvisn}$$

(množenje vrstice/stolpca z neničelnim številom; menjava vrstic/stolpcev; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu).

¤ SISTEMI LINEARNIH ENAČB: (množenje vrstice z neničelnim številom; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic neki vrstici; menjava vrstic). HOMOGEN SISTEM je vedno rešljiv (0,…,0), množica rešitev je v. podpr. v $R^n$;

$$\dim(\text{v.pr. rešitev}) = \text{št. rešitev}$$

NEHOMOGEN SISTEM je rešljiv

$$\Leftrightarrow \mathrm{rang}A_{(\text{prirejena mat.})} = \mathrm{rang}$$

; Če je rešljiv:

$$\text{mn. reš.} = \text{partikularna reš.} +$$

D: Vektor $a \in V$ je LASTNI VEKTOR za linearno preslikavo $A : V \to V$ , če je $A(a) = \lambda a$ za kak $\lambda \in R(C)$ . Število $\lambda$ imenujemo LASTNA VREDNOST za A, če $a \neq 0.$

T: $\lambda$ je lastna vrednost za linearno preslikavo A natanko takrat, ko je $\det(A - \lambda I) = 0.$

D: KARAKTERISTIČNI POLINOM je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ za linearno preslikavo A.

T: Linearno preslikavo $A : V \to V$ lahko predstavimo z DIAGONALNO MATRIKO (A se da diagonalizirati) natanko tedaj, ko obstaja baza za V iz lastnih vektorjev za A.

D: Matrika $S \in M_n(R)$ je SIMETRIČNA, če je $S^T = S.$

T: Če je $S \in M_n$ simetrična, je

$$y^T S(x) = x^T S(y) \ \forall x, y \ (\text{stolp}$$

T: Lastne vrednosti simetrične matrike $S \in M_n(R)$ so realna števila.
T: Lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim simetrične matrike, so med seboj pravokotni.

I: Če je $S \in M_n(R)$ simetrična matrika, obstaja taka matrika $P \in M_n(R)$ , da je $P^T S P = D$ diagonalna lastna vrednost matrike S. Matrika P ima za stolpce ortonormirane lastne matrike S. Velja: $P^{-1} = P^T.$

D: Matrika P je ORTOGONALNA, če je $P^{-1} = P^T,\ P^T P = P P^T = I$ .

T: $P \in M_n(R)$ je ortogonalna $\Leftrightarrow P^T P = P P^T = I \Leftrightarrow$ stolpci in vrstice matrike P so ortonormirani.

D: $D \subseteq R^n,$ FUNKCIJA iz D v R je predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi natanko določeno število $y = f(x) \in R.$

D: $f : D \to R,\ D \subseteq R^n.$ f je V TOČKI $a \in D$ ZVEZNA, če

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|x - a\| < \delta \Rightarrow$$

Ko se x bliža a, se f(x) bliža f(a).

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a).$ f je zvezna na D, če je ZVEZNA v vsaki točki $a \in D$ .

T: Če je $f : D \to R$ zvezna funkcija, je zvezna po vsaki spremenljivki posebej. Obrano ni res.

D:

$$z = f(x_1, \dots, x_n),\ F : D \to R,\ D \subseteq R^n,$$
$$a \in D,\ a = (a_1, \dots, a_n),\ F_1(x_1) = f(x_1, a_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = f_1'(a); \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = f_2'(a); \dots$$

D: Podmnožica $D \subseteq R^n$ je ODPRTA, če okrog vsake njene točke lahko opišemo n–razsežno kroglo, ki je vsa vsebovana v D.

$$(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(K(a, \delta) = \{x \in R^n : \|x -$$

D: Množica je ZAPRTA, če je njen komplement odprt.

D:

$$D^{odprta} \subseteq R^n,\ f : D \to R,\ a \in D,\ a = (a_1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1}{h}$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_n) - f(a)}{h}$$

$$z = f(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

T: Če sta odvoda $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ in $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ zvezni funkciji, potem je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$ To velja tudi za funkcije več kot dveh spremenljivk.

D:

$$D^{odprta} \subseteq R^n,\ f : D^{odprta} \to R,\ a \in U,$$
$$\mathrm{grad} f(a) = (\nabla f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right.$$

D:

$$u = f(x_1, \dots, x_n),\ D \subseteq R^n,\ f : D \to R,\ a \in$$

Totalni diferencial funkcije f v točki a je

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n.$$

T: Če je $D^{odprta} \subseteq R^n,\ f : D^{odprta} \to R$ funkcija z zveznimi parcialnimi odvodi, potem za $\forall a \in D$ velja:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\Delta u - du(a)}{\|h\|} = 0.$$

$$\Delta u = f(a + h) - f(a)$$
$$du(a) = (\nabla f)(a) \circ h$$

¤

$$\frac{du}{dt}(t_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x(t_0)\right)\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}($$

T: Naj ima funkcija $u = u(x_1, \dots, x_n)$ zvezne parcialne odvode in naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Potem velja

$$\frac{d}{dt} u\left(x(t)\right) = (\nabla u)\left(x(t)\right) \cdot \frac{dx}{dt}(t).$$

¤

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_m} =$$