Vaje za 1. kolokvij, Matematika 2 za kemike

1. Za podano funkcijo dveh spremenljivk $f(x, y)$ določi (naravno) definicijsko območje.

   (a) $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$,

   (b) $f(x, y) = \log(x^2 - y - 1)$,

   (c) $f(x, y) = \frac{1}{x+2y}$,

   (d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$,

   (e) $f(x, y) = \arcsin(2x - y)$.

2. Za podano funkcijo dveh spremenljivk $f(x, y)$ in podano točko (x_0, y_0):

   - izračunaj parcialna odvoda in gradient,
   - skiciraj nivojnico, ki poteka skozi točko (x_0, y_0),
   - v graf natančno vriši gradient na funkcijo f v točki (x_0, y_0),
   - približno skiciraj gradientno polje vzdolž skicirane nivojnice.

   (a) $f(x, y) = \frac{1}{x+2y}$, $(x_0, y_0) = (3, \frac{1}{2})$,

   (b) $f(x, y) = x + y^2$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$,

   (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+3y}$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$,

   (d) $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

   (*) Pri točki (d) skiciraj vse možne nivojnice.

3. Naj bo $g = g(u, v)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva in naj bo

$$f(x, y) = g(x + y, xy).$$

S parcialnimi odvodi funkcije g izrazi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. 4. Naj bo g zvezno odvedljiva funkcija ene spremenljivke in naj bo

$$f(x, y) = xy + xg\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Prepričaj se, da velja

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy + f(x, y).$$

5. Za podano funkcijo dveh spremenljivk $f(x, y)$ določi stacionarne (kritične) točke in jih klasificiraj. Izberi eno od kritičnih točk in za funkcijo zapiši Taylorjev približek drugega reda.

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$,

(b) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,

(c) $f(x,y) = (3x^2 - 6xy + 2y^2 + 12x - 4y + 11)e^y$.

6. Določi vse stacionarne (kritične) točke funkcije dveh spremenljivk

$$f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$$

in jih klasificiraj.

7. Ravninsko območje L naj bo omejeno s krivuljami $y = x^2$, $x = 2$, in $y = 1$.

- Izračunaj ploščino lika L. $[\frac{4}{3}]$
- Izračunaj integral $\iint_L x\mathrm{dxdy}$. $[\frac{9}{4}]$
- Izračunaj integral $\iint_L y\mathrm{dxdy}$. $[\frac{13}{5}]$

8. Naj bo ravninsko območje D omejeno s krivuljama $x^2 + y^2 = 4$ in $x^2 + y^2 = 9$. S pomočjo polarnih koordinat izračunaj integral

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}.[\frac{38\pi}{3}]$$

9. Naj bo ravninsko območje D podano z neenačbo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ (kjer $a \geqslant 0$). Izračunaj integral

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{dxdy}.[\pi(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{a}^2})]$$

10. Zamenjaj vrstni red integriranja v integralu

$$\int_0^1 \mathrm{dx} \int_{-\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}^{1-\mathrm{x}} \mathrm{x}^2\mathrm{dy}$$

in ga izračunaj. Pomagaj si (tudi) s polarnimi koordinatami. $[\frac{1}{12} + \frac{\pi}{16}]$

11. Naj $\min\{a,b\}$ označuje manjše od števil a in b. V integralu

$$\int_0^4 \mathrm{dx} \int_{\sqrt{\mathrm{x}}}^{\min\{2,2\sqrt{\mathrm{x}}\}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{y}^2}}\mathrm{dy}$$

zamenjaj vrstni red integracije in integral izračunaj. $[2(2\sqrt{2} - \sqrt{5})]$

12. Naj bo D poljuben ravninski trikotnik z oglišči $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2)$, $T_3(x_3,y_3)$ in naj bo Δ trikotnik z oglišči $(0,0)$, $(1,0)$ in $(0,1)$. Prepričaj se, da transformacija

$$x = ux_1 + vx_2 + (1-u-v)x_3,$$
$$y = uy_1 + vy_2 + (1-u-v)y_3,$$

podaja bijektivno korespondenco med območjema D in Δ (natančneje točki $(u,v)\in\Delta$ ustreza točka $(x,y)\in D$. S pomočjo transformacije spremenljivk izračunaj:

$$\frac{1}{\mathrm{pl}(D)}\iint_D x\mathrm{dxdy} \text{ in } \frac{1}{\mathrm{pl(D)}}\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{ydxdy}.[\frac{1}{3}(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3) \text{ in } \frac{1}{3}(\mathrm{y}_1+\mathrm{y}_2+\mathrm{y}_3)]$$

13. Naj bo ravninsko območje D omejeno s krivuljami $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $xy=2$, $xy=4$. Izračunaj integral

$$\iint(x^2+y^2)\mathrm{dxdy}.[8]$$

Pomagaj si s transformacijo koordinat $x^2-y^2=u$, $2xy=v$.

Navodilo: Upoštevaj, da velja $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}$ ali pa enačbi $x^2-y^2=u$ in $2xy=v$ razreši na spremenljivki x in y.

14. Izračunaj trojni integral

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2}(x^2+y^2)\mathrm{dzdydx}.[\frac{64\pi}{15}]$$

15. Izračunaj trojni integral

$$\iiint_T(x^2+y^2)\mathrm{dxdydz},$$

kjer je T območje, ki ga omejujeta sfera z enačbo $x^2+y^2+z^2=4$ in stožec, podan z enačbo $x^2+y^2=3z^2$ in pogojem $z\geqslant 0$. $[\frac{8\pi}{3}]$

16. Izračunaj volumen telesa, ki ga omejujeta sferi

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ in } x^2+y^2+(z-2)^2=4.[\frac{13\pi}{24}]$$

17. Izračunaj volumen telesa, ki ga omejujeta stožec $z^2=x^2+y^2$ in paraboloid $z=x^2+y^2$. $[\frac{\pi}{6}]$