Vaje za ponavljanje pred 3. kolokvijem, Matematika 2 za kemike

(1) Za naslednje diferencialne enačbe poišči splošno rešitev oziroma rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju, če je ta podan:

(i) $y' = \beta(c_0 - y)^2, \qquad y(0) = 0$ $\qquad [\ y = c_0\left(1 - \frac{1}{c_0\beta\cdot x+1}\right)\ ]$

(ii) $my' = -mg - ky, \qquad y(0) = y_0$ $\qquad [\ y = \left(\frac{mg}{k} + y_0\right)\cdot e^{-\frac{k}{m}x} - \frac{mg}{k}\ ]$

(iii) $my' = -mg - ky^2$ $\qquad [\ y = \sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot \operatorname{tg}\left((C-x)\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)\ ]$

(iv) $y' = y\log(y), \qquad y(0) = e$ $\qquad [\ y = e^{e^x}\ ]$

(v) $y' = e^{-y}\cos x, \qquad y(0) = y_0$ $\qquad [\ y = \log\left(\sin x + e^{y_0}\right)\ ]$

(vi) $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ $\qquad [\ y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right)\ ]$

Tu so β, c_0, k, m, g pozitivne konstante, log pa je naravni logaritem.

(2) Za naslednje diferencialne enačbe poišči splošno rešitev oziroma rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju, če je ta podan:

(i) $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ $\qquad [\ x^2 - y^2 = Cy\ ]$

(ii) $y' = \frac{x^2+3xy+y^2}{x^2}, \qquad y(1) = -\frac{1}{2}$ $\qquad [\ y = \frac{x}{2-\log x} - x\ ]$

(iii) $y' = \frac{-y^3+2x^2y}{x^3}$ $\qquad [\ \log\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| = x + C\ ]$

(3) Za naslednje diferencialne enačbe poišči splošno rešitev oziroma rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju, če je ta podan:

(i) $y' + y = x, \qquad y(0) = 1$ $\qquad [\ y = x - 1 + 2e^{-x}\ ]$

(ii) $y' - y = e^{-x}$ $\qquad [\ y = e^x(C - x)\ ]$

(iii) $2y' + 2y\cos(x) = \sin(2x)$ $\qquad [\ y = Ce^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1\ ]$

(iv) $xy' + 2y = xe^{x^3}, \qquad y(1) = 1$ $\qquad [\ y = \frac{e^{x^3}+3-e}{3x^2}\ ]$

(v) $y' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)y = \frac{e^{-x}\sin(x)}{x}, \qquad y(\pi) = 0$ $\qquad [\ y = e^{-x}\left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\pi}{x^2}\right)\ ]$

(4) Za naslednje diferencialne enačbe poišči splošno rešitev oziroma rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju, če je ta podan:

(i) $2xy' - y = \frac{x^2}{y}, \qquad y(1) = -2$ $\qquad [\ y = -\sqrt{3x + x^2}\ ]$

(ii) $y' + y = xe^{2x}y^3$ $\qquad [\ y = \pm\frac{e^{-x}}{\sqrt{C-x^2}}\ ]$

(iii) $y' - y = e^xy^2$ $\qquad [\ y = \frac{1}{Ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x}\ ]$

(iv) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ $\qquad [\ y^{-2} = \frac{2}{5}x^{-1} + Cx^4\ ]$

(v) $y' + 2y = x^2y^{-5}$ $\qquad [\ y = \left(Ce^{-12x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{144}\right)^{\frac{1}{6}}\ ]$

(5) K danim družinam krivulj določi ortogonalne družine:

(i) $x^4 + 2y^4 = C, \qquad C > 0$ $\quad [\ \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} = D\ ]$

(ii) $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ $\quad [\ x^2 + (y - D)^2 = D^2\ ]$

(iii) $y = \frac{C}{1+x^2}$ $\quad [\ y^2 = \log|x| + \frac{1}{2}x^2 + D\ ]$

(iv) $x^2 - 3y^2 = Cx$ $\quad [\ y(3y^2 + 7x^2)^3 = D\ ]$

(6) Za naslednje diferencialne enačbe poišči splošno rešitev oziroma rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju, če je ta podan:

(i) $2y'' + 2y' + 5y = 0$ $\quad [\ y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{3x}{2} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{3x}{2}\ ]$

(ii) $y'' + 2x' + 2x = 5\cos(2x), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 4$
(za partikularno rešitev nastavi $y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$) $\quad [\ y = \frac{1}{2}e^{-x}\cos x + \frac{5}{2}e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(2x)\ ]$

(iii) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$ $\quad [\ y = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2}e^x \log(1 + x^2) + x e^x \operatorname{arctg}(x)\ ]$

(iv) $y'' - 2y' + y = xe^x \log(x)$ $\quad [\ y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x \log(x) - \frac{5}{36}x^3 e^x\ ]$

(v) $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin(2x)$ $\quad [\ y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x - \frac{1}{20}\sin(2x) + \frac{3}{20}\cos(2x)\ ]$

(vi) $2y'' + 6y' + 5y = x - 1 + 3e^{2x} + 4\cos(x)$
(za partikularno rešitev nastavi $y_p = Ax + B + Ce^{2x} + D\cos(x) + E\sin(x)$)
$[\ y = C_1 e^{-\frac{3}{2}x}\cos\frac{x}{2} + C_2 e^{-\frac{3}{2}x}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + \frac{3}{25}e^{2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x\ ]$

(7) Diferencialno enačbo

$$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

reši na dva načina. Pri integraciji ti bosta morda pomagali substituciji $z = e^x$ ali pa $z = e^x + 1$. $\quad [\ y = A + Be^x + (1 + e^x)\log(1 + e^{-x})\ ]$