Vaje za ponavljanje pred 4. kolokvijem, Matematika 2 za kemike
Drugi del: parcialne diferencialne enačbe

(1) Podana je parcialna diferencialna enačba za funkcijo $u = u(x,t)$:

$$(*) \qquad 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{9}{16}u = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\frac{\partial u}{\partial t}$$

(i) Izračunaj vse razcepne rešitve $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ enačbe $(*)$.

$$\left[\ u(x,t) = \begin{cases} e^{-\frac{5}{8}x}\big(A\cos(\frac{\sqrt{|1+\mu|}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{|1+\mu|}}{2}x)\big)e^{\frac{2}{3}t}\big(C\cos(\frac{2\sqrt{|1+\mu|}}{3}t) + D\sin(\frac{2\sqrt{|1+\mu|}}{3}t)\big), & \mu < -1, \\ e^{-\frac{5}{8}x}\big(A + Bx\big)e^{\frac{2}{3}t}\big(C + Dt\big), & \mu = -1, \\ e^{-\frac{5}{8}x}\big(Ae^{+\frac{\sqrt{|1+\mu|}}{2}x} + Be^{-\frac{\sqrt{|1+\mu|}}{2}x}\big)e^{\frac{2}{3}t}\big(Ce^{+\frac{2\sqrt{|1+\mu|}}{3}t} + De^{-\frac{2\sqrt{|1+\mu|}}{3}t}\big), & \mu > -1. \end{cases}\ \right]$$

(ii) Izračunaj vse razcepne rešitve $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ enačbe $(*)$ pri dodatnih pogojih $X(0) = X(\frac{8}{5}) = 0$.
[$u(x,t) = Be^{-\frac{5}{8}x}\sin\left(\frac{5k\pi}{8}x\right)e^{\frac{2}{3}t}\left(C\cos\left(\frac{5k\pi}{6}t\right) + D\sin\left(\frac{5k\pi}{6}t\right)\right)$, kjer je k naravno število.]

(2) Podana je parcialna diferencialna enačba za funkcijo $u = u(x,t)$:

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \pi^2 u = (1+t^2)\frac{\partial u}{\partial t} + 2t\cdot u$$

(i) Izračunaj vse razcepne rešitve $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ enačbe $(*)$.

$$\left[\ u(x,t) = \begin{cases} \left(Ae^{x\sqrt{\pi^2-\mu}} + Be^{-x\sqrt{\pi^2-\mu}}\right)\cdot\frac{C}{1+t^2}e^{-\mu\,\mathrm{arctg}(t)}, & \mu < \pi^2, \\ (A + Bx)\cdot\frac{C}{1+t^2}e^{-\pi^2\,\mathrm{arctg}(t)}, & \text{“}\mu\text{”} = \pi^2, \\ \left(A\cos\left(x\sqrt{\mu-\pi^2}\right) + B\sin\left(x\sqrt{\mu-\pi^2}\right)\right)\cdot\frac{C}{1+t^2}e^{-\mu\,\mathrm{arctg}(t)}, & \mu > \pi^2. \end{cases}\ \right]$$

(ii) Izračunaj vse razcepne rešitve $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ enačbe $(*)$ pri dodatnih pogojih $X(0) = X(b) = 0$.

(iii) [$u(x,t) = B\sin\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\cdot\frac{C}{1+t^2}e^{-\pi^2(1+(\frac{k}{b})^2)}$, kjer je $k = 1,2,3,\dots$]

(iv) Izračunaj vse razcepne rešitve $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ enačbe $(*)$ pri dodatnih pogojih $X'(0) = X'(b) = 0$.

(v) [$u(x,t) = A\cos\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\cdot\frac{C}{1+t^2}e^{-\pi^2(1+(\frac{k}{b})^2)}$, kjer je $k = 0,1,2,3,\dots$]

(3) Podana je parcialna diferencialna enačba za funkcijo $u = u(x,t)$:

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Pri iskanju razcepnih rešitev $u = X(x)\cdot T(t)$ dobimo:

☐ $X'' + \frac{1}{x}X' = \mu X$ in $\frac{\ddot{T}}{x^2 T} = -\mu$ ☐ $X'' = X' + \mu X$ in $\ddot{T} = \mu T$

☐ $x^2X'' + xX' - \mu X = 0$ in $\ddot{T} = -\mu T$ ☐ $X'' = X' - \mu X$ in $\ddot{T} = \mu T$

☐ $(X'')^2 - \sqrt{x}X\dot{T} + 3X\dot{T} = -3e^x\dot{T}$ ☐ $\frac{X''}{t^2} = -3\dot{T}$

Valovna enačba

(4) Zapiši rešitev enačbe vpete strune na intervalu $[0,1]$: gre za valovno enačbo

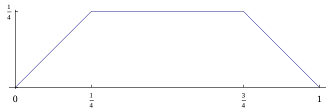
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tfrac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

kjer $x \in [0,1]$ in $t \in [0,\infty)$ s homogenima robnima pogojema $u(0,t) = u(1,t) = 0$, kjer je začetna hitrost enaka nič, torej $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ in je začetni odmik enak $u(x,0) = f(x) = x(1-x^2)$.

[$u(x,t) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}\cos(k\pi t)\sin(k\pi x)$]

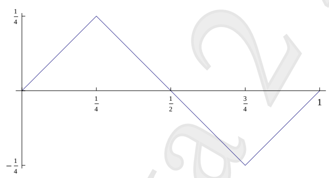
(5) Kot v prejšnji nalogi reši homogeno valovno enačbo na intervalu $[0,1]$ z začetno hitrostjo 0 in začetnim odmikom kot sledi

(i)



$$\left[\begin{aligned}&\frac{\sqrt{8}}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})+\cos(\frac{k\pi}{2})}{(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)\pi t\big)\sin\big((2k+1)\pi x\big)\\ &\quad=\frac{\sqrt{8}}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}}{(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)\pi t\big)\sin\big((2k+1)\pi x\big)\end{aligned}\right]$$

(ii)



[$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\big(2(2k+1)\pi t\big)\sin\big(2(2k+1)\pi x\big)$]

Toplotna enačba

(6) Zapiši rešitev toplotne enačbe na intervalu $[0,b]$: gre za toplotno (difuzijsko) enačbo

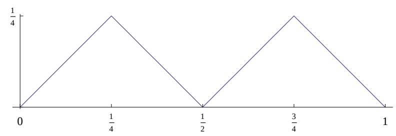
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tfrac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}$$

kjer je κ pozitivna konstanta, $x \in [0,b]$, $t \in [0,\infty)$, poleg tega pa privzemi homogena robna pogoja $u(0,t) = u(b,t) = 0$ (na konceh palice je temperatura ves čas 0), kjer je začetna porazdelitev toplote enaka $u(x,0) = f(x) = \begin{cases}\frac{2h}{b}x, & 0 \leqslant x \leqslant b/2,\\ \frac{2h}{b}(b-x), & b/2 \leqslant x \leqslant b.\end{cases}$.

(Glej vaje.)

$$\left[\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2}e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t}\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8(-1)^k h}{(2k+1)^2\pi^2}e^{-\kappa\left(\frac{(2k+1)\pi}{b}\right)^2 t}\sin\left(\tfrac{(2k+1)\pi}{b}x\right)\ \right]$$

(7) Kot v prejšnji nalogi reši homogeno toplotno enačbo na intervalu $[0, b] = [0, 1]$ (torej $b = 1$) z začetno porazdelitvijo toplote $f(x) = u(x, 0)$ kot sledi:



$$\left[\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(2\sin(\frac{n\pi}{4}) - 2\sin(\frac{n\pi}{2}) + 2\sin(\frac{3n\pi}{4}) - \sin(n\pi)\right)}{n^2\pi^2} e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} \sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\left((-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\sqrt{2} - (-1)^k\right)}{(2k+1)^2\pi^2} e^{-\kappa\left(\frac{(2k+1)\pi}{b}\right)^2 t} \sin\left(\tfrac{(2k+1)\pi}{b}x\right) \end{aligned}\right]$$

(8) Zapiši rešitev toplotne enačbe na intervalu $[0, b]$: gre za toplotno (difuzijsko) enačbo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tfrac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}$$

kjer je κ pozitivna konstanta, $x \in [0, b]$, $t \in [0, \infty)$, poleg tega pa privzemi robna pogoja $\frac{\partial u}{\partial x}u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0$ (konca palice sta toplotno izolirana), kjer je začetna porazdelitev toplote enaka $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{b}x, & 0 \leqslant x \leqslant b/2, \\ \frac{2h}{b}(b-x), & b/2 \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$.

Navodilo: 1. S pomočjo razcepa (pri tem si pomagaj s točko (iv) naloge (2)) ugotovi, da je za splošno rešitev smiseln nastavek:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} \cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right).$$

2. Za splošno začetno porazdelitev $u(x,0) = f(x)$ vstavi nastavek za u v diferencialno enačbo in se prepričaj, da so manjkajoče konstante a_n ravno kosinusni Fourierevi koeficienti razvoja funkcije f na intervalu $[0, b]$:

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)\,\mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

3. Izračunaj kosinusni razvoj za podano začetno porazdelitev (glej tudi prvi del nalog za ponavljanje pred 4. kolokvijem).

4. Zapiši splošno rešitev:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h}{n^2\pi^2}\left[2\cos(\tfrac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi) - 1\right] e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} \cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) \\ &= \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4h}{(2k)^2\pi^2} \cdot 2\left((-1)^k - 1\right) e^{-\kappa\left(\frac{2k\pi}{b}\right)^2 t} \cos\left(\tfrac{2k\pi}{b}x\right) \\ &= \frac{h}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16h}{(4m+2)^2\pi^2} e^{-\kappa\left(\frac{(4m+2)\pi}{b}\right)^2 t} \cos\left(\tfrac{(4m+2)\pi}{b}x\right). \end{aligned}$$