Vaje za ponavljanje: krivuljni integrali, ploskovni integrali, Stokesov izrek, Gaussov izrek

(1) Podano je vektorsko polje
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz^2, 2yz^2, 2(x^2+y^2)z + e^z).$$
Izračunaj $\int_C \mathbf{F}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{s}$, kjer je C krivulja, podana s parametrizacijo
$$\mathbf{r}(t) = (1+t, 1-t, 3t) \text{ za } t \in [0,1].$$
Odgovor: $35 + e^3$.

(2) S pomočjo (posplošenih) krogelnih koordinat parametriziraj površje elipsoida, ki je podano z enačbo $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.
Na kakršenkoli način izračunaj enačbo tangentne ravnine v točki $(1, \frac{3}{2}, \frac{6}{\sqrt{2}})$.
Odgovor: enačba ravnine se glasi $18x + 12y + 6z\sqrt{2} = 72$.

(3) Naj bo ploskev S podana s parametrizacijo
$$\mathbf{r}(u,v) = (1 - \sin u, 2\sin u \sin v, 2 \sin u \cos v) \text{ za } u \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \ v \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$
Izračunaj površino (ploščino) ploskve S.
Odgovor: $\frac{\pi\sqrt{20}}{4}$.

(4) Podano je skalarno polje $f(x,y,z) = xy$. Naj bo ploskev S tisti del ploskve $z = 4 - x^2$, ki leži nad kvadratom $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. Izračunaj ploskovni integral
$$\iint_S f\ \mathrm{d}S.$$
Ali je ta integral kaj odvisen od orientacije ploskve S?
Odgovori in namigi: ploskev je parabolični valj, ki leži vzdolž osi y. Ploskovni integral prve vrste ni odvisen od parametrizacije. Vrednost integrala je $\frac{1}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 1)$. Pri integraciji je potrebno substituirati nova sprem. $= 1 + 4(\text{stara sprem.})^2$. Utemelji pravilnost substitucije.

(5) Obravnavamo ploskev S, ki je podana eksplicitno kot $z = 4 - (x^2 + y^2)$ za $z \in [1,3]$.
   (i) Nastavi integral za ploščino ploskve S. (Ploskev leži nad krožnim kolobarjem v ravnini xy.)
   (ii) Vpelji polarne koordinate za izračun.
   (iii) Izračunaj integral.
Odgovor: $\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})$.

(6) Naj bo ploskev S ploskev, ki je podana s pogojema $16x^2 + 16y^2 = z^4$ in $0 \leqslant z \leqslant 2$.
   (i) Prepričaj se, da je mogoče S parametrizirati kot $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u \sin v, 2\sqrt{u})$ za $0 \leqslant u \leqslant 1$ in $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.
   (ii) Izračunaj $\iint_S (1 + \frac{1}{2}z^2)\ \mathrm{d}S$. V teku računa uporabi substitucijo $y = u + u^2$.
Odgovor: $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

(7) Naj bo ploskev S četrtina (površja) elipsoida, ki je natančno podana z zahtevami:

$$x^2 + \left(\tfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{z}{3}\right)^2 = 1, \;\; y \geqslant 0, \;\; z \geqslant 0.$$

(i) Prepričaj se, da je mogoče S parametrizirati takole:

$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = (\cos\varphi\cos\vartheta, 2\sin\varphi\cos\vartheta, 3\sin\vartheta)$, za $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ in $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(Za predstavo si pomagaj s primerjavo s krogelnimi koordinatami.)

(ii) Skiciraj elipsoid in na skici označi orientacijo vektorja normale, ki jo inducira podana orientacija. Ali kaže omenjena normala v telo elipsoida ali ven iz njega? (Posebej izračunaj in skiciraj inducirani normalni vektor v točkah $(1, 0, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$. Za zadnjo točko izračunaj ustrezna parametra φ, ϑ tako, da pričneš s koordinato z.)

(iii) Izračunaj normalni vektor v točki $(0, 0, 3)$. (Ali je parametrizacija v tej točki regularna?)

(iv) Podano je vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$. Izračunaj ploskovni integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Odgovori: Če za normalo vzamemo enotski vektor na vektorskem produktu $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}$ (pomemben je vrstni red!), potem kaže ven iz telesa. V točki $(0, 0, 3)$, ki ustreza parametroma $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi =$karkoli, parametrizacija ni regularna. Izračunati je treba

$$\lim_{\vartheta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}\right|} = (0, 0, 1).$$

Vrednost integrala je 2π.

(8) Ploskev S je podana s parametrizacijo $\mathbf{r}(u, v) = (u - v, u + v, u)$ za $u \in [0, 1]$ in $v \in [0, 1]$. Ploskev S orientiraj tako, da bo prva („x“) komponenta vektorja normale pozitivna. Izračunaj integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S}$, kjer $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z, x - z, x - y)$.
Odgovor: 2.

(9) Naj bo D ravninsko območje, podano s pogojema $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ in $-2 \leqslant x \leqslant \sin y$. Naj bo krivulja C rob območja D s standardno (matematično pozitivno) orientacijo. S pomočjo Greenovega izreka izračunaj $\oint_C \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{s}$, kjer $\mathbf{F}(x, y) = (e^{x^2}, \sin(y^2) - x^2)$.
Odgovor: 7π.

(10) Naj bo C krožnica, ki je parametrizirana kot $\mathbf{r} = (x, y, z) = (\cos t, \sin t, 4)$ za $t \in [0, 2\pi]$. S pomočjo Stokesovega izreka izračunaj integral $\int_C \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{s}$. Krivulja C je orientirana s parametrizacijo, ploskev, ki jo C omejuje, pa orientiraj tako, da bosta orientaciji usklajeni. Skiciraj krivuljo in ploskev in nakaži orientaciji s tangento oziroma normalo.
Odgovor: vrednost integrala je -2π.

(11) Ploskev S je podana s pogojema:

$$x^2 + z^2 = 4 \text{ in } 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Orientirana naj bo tako, da kažejo vektorji normale stran od osi y.

Uporabi Stokesov izrek za izračun integrala

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kjer je $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, zxy^2, -x)$.
Odgovori in namigi: ploskev je plašč valja. Stokesov izrek prevede ploskovni integral na integral vzdolž obeh robnih krožnic. Rezultat je 0.

(12) Izračunaj

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kjer je S prostorski trikotnik z oglišči $(0, 0, 5)$, $(0, 4, 0)$, $(3, 0, 0)$, in $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(\sin(x^2yz), \sin(xy^2z), \sin(xyz^2)\big)$. Uporabi Stokesov izrek.
Odgovor: 0.

(13) Izračunaj

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kjer je S prostorski trikotnik z oglišči $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, in $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(\sin(x - y), \sin(y - z), \sin(z - x)\big)$. Uporabi Stokesov izrek.
Odgovor: $\frac{1}{2}(1 - \cos 2)$.

(14) Obravnavamo sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in stožec $4z^2 = x^2 + y^2$ v polprostoru $z \geqslant 0$.
  (i) Zapiši parametrizacijo krivulje C, ki je podana kot presek obeh ploskev.
  (ii) Izračunaj krivuljni integral prve vrste $\int_C (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s$.
  (iii) Izračunaj krivuljni integral druge vrste $\int_C \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{s}$, kjer je $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, xy)$. Posluži se definicije integrala.
  (iv) Izračunaj isti krivuljni integral še z uporabo Stokesovega izreka. Upoštevaj, da krivulja C omejuje zelo preprosto ravno ploskev v prostoru.

Odgovori in namigi. Krivulja je krožnica na višini $z = \frac{1}{\sqrt{5}}$, preprosta ploskev, ki jo omejuje, je krog na isti višini. Vrednost krivuljnega integrala prve vrste je $\frac{12\pi}{5\sqrt{5}}$, vrednost krivuljnega integrala druge vrste pa $\frac{8\pi}{5}$.

(15) Naj bo vektorsko polje $\mathbf{F}$ podano z enačbo:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z \cos x, z^2, y^2 \sin x).$$

Naj bo C sklenjena krivulja, sestavljena iz štirih orientiranih krivulj C_1, C_2, C_3, C_4:
- C_1: $x = \frac{\pi}{2}$, $z = y$, y teče od 0 do 1,
- C_2: $y = 1$, x teče od $\frac{\pi}{2}$ do 0, $z = \sin x$,
- C_3: $x = 0$, $z = 0$, y teče od 1 do 0,
- C_4: $y = 0$, $z = 0$, x teče od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Z uporabo Stokesovega izreka izračunaj krivuljni integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{S}$.
Navodilo: krivulja C vsa leži na ploskvi $z = y \sin x$. Na tej ploskvi poišči del, ki ga omejuje krivulja C. Ta del leži nad primernim kvadratom v ravnini xy.
Odgovor: $-\frac{1}{3}$.

(16) Naj bo $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, e^{z^2} + y, x + y)$ vektorsko polje, ploskev S pa je podana s pogojema $y = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{9} - 1$ in $y \leqslant 0$. Ploskev S orientiraj tako, da ima polje normal pozitivno y-komponento. Izračunaj $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}$ s pomočjo Stokesovega izreka.
Odgovor: -9π.

(17) Naj bo T kvader $[0,1] \times [0,4] \times [0, \frac{1}{2}]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Naj bo S rob kvadra T in naj ima S orientacijo zunanjih normalnih vektorjev. Podano je vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + ze^{y^2}, x\sin(\pi z) - xy, 3z - xz + x^4 \log y).$$

S pomočjo Gaußovega izreka izračunaj pretok polja $\mathbf{F}$ skozi S, torej integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}$.
Odgovor: 6.

(18) Sklenjena ploskev S naj bo rob (polnega) valja, podanega s pogojema $x^2 + y^2 \leqslant 9$ in $1 \leqslant z \leqslant 3$. Orientirajmo S s poljem zunanjih normalnih vektorjev. Dalje je podano vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, yx^2, -z^2).$$

S pomočjo Gaußovega izreka izračunaj pretok polja $\mathbf{F}$ skozi S, torej integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}$.
Odgovor: 9π.

(19) Sklenjena ploskev S naj bo rob (polnega) valja, podanega s pogojema $x^2 + y^2 \leqslant 9$ in $0 \leqslant z \leqslant 4$. Orientirajmo S s poljem zunanjih normalnih vektorjev. Dalje je podano vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z^2(x^2 + y^2)).$$

S pomočjo Gaußovega izreka izračunaj pretok polja $\mathbf{F}$ skozi S, torej integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}$.
Odgovor: 720π.

(20) Podano je vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 + e^z, x^2 + e^z, x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}z^2).$$

Ploskev S naj bo tisti del enotske sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ki leži v polprostoru $z \geqslant 0$, orientirana pa naj bo s poljem normal, ki kaže navzven. Izračunaj integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{S}$. Pomagaj si z Gaußovim izrekom, pri čemer upoštevaj, da je S del roba enotske polkrogle.
Odgovor: $\frac{3\pi}{4}$.