Vaje za ponavljanje: temelji diferencialne geometrije krivulj

V nalogah v zvezi s krivuljami naj $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ označujejo, po vrsti, **enotske** vektorje tangente, normale in binormale, ki so povezani z zahtevo $\mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}$.

(1) Krivulji, podani s parametrizacijo $\mathbf{r}(t) = (1-\cos t, \sin t, t)$, določi spremljajoči trieder in enačbo pritisnjene ravnine pri $t = \frac{\pi}{6}$.
Odgovor: $\mathbf{t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, \sqrt{3}, 2)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1, 0)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, \sqrt{3}, -2)$,
ravnina: $x + y\sqrt{3} - 2z = -\frac{\pi}{3}$.

(2) Krivulji, podani s parametrizacijo $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$, določi spremljajoči trieder in enačbo pritisnjene ravnine pri $t = \pi$.
Odgovor: $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$,
ravnina: $x + y + 2z = e^{\pi}$.

(3) V kateri točki seka ravnino $z = 0$ tangenta na krivuljo $\mathbf{r}(t) = (1 + t, -t^2, 1 + t^3)$ pri $t = 1$?
Odgovor: v točki $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

(4) Krivulja C je podana kot presek ploskev $x^2 - y^2 = 3$ (hiperbolični valj) in $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (sfera polmera 3). Parametriziraj jo in izračunaj enačbo pritisnjene ravnine v točki $(2, 1, 2)$ na tej krivulji.
Nasvet: parametrizacija $x = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}(t)$, $y = \sqrt{3}\,\mathrm{sh}(t)$ za hiperbolični valj (z je tu prosta koordinata) skupaj z enačbo sfere (in dejstvom, da točka $(2, 1, 2)$ leži na zgornji hemisferi) že dá parametrizacijo krivulje.
Odgovor: $4x - y + z = 9$.

(5) Krivulja C je podana kot presek ploskev $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ (sfera) in $x + y + z = 0$ (ravnina). Parametriziraj jo in določi spremljajoči trieder v točki $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.
Nasvet: Enančba ravnine $x + y + z = 0$ določa koordinato z v odvisnosti od koordinat x in y kot $z = -x - y$. Če vpeljemo valjne koordinate $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, vidimo, da lahko krivuljo parametriziramo kot $\mathbf{r} = (x, y, z) = \rho(\varphi)\cdot\big(\cos\varphi, \sin\varphi, -\cos\varphi - \sin\varphi\big)$. Funkcijo $\rho(\varphi)$ zdaj lahko izračunaš s pomočjo enačbe sfere. Račun teče bolj gladko, če pišemo $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, -\cos\varphi - \sin\varphi) + \rho\cdot(\dots)$ in podobno $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi, -\cos\varphi - \sin\varphi) + 2\dot{\rho}\cdot(\dots) + \rho\cdot(\dots)$ in posebej odvajamo funkcijo ρ.
Odgovor: $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.
Vprašanje: Ali je zares potrebno računati pospešek $\ddot{\mathbf{r}}$?