Jaka Cimprič, Jasna Prezelj

# REŠENE NALOGE IZ FOURIEROVE ANALIZE

Ljubljana 2012

# Kazalo

# 1. FOURIEROVE VRSTE

## Klasični trigonometrijski sistem

Operatorju $A : y \mapsto -y''$ pravimo *Fourierov diferencialni operator*. Naj bo $f$ dana funkcija na intervalu $[-l, l]$. Radi bi rešili enačbo $Ay = f$, pri čemer nas zanimajo rešitve, ki so periodične s periodo $2l$. Najprej poiščemo lastne funkcije operatorja $A$, ki so periodične in torej zadoščajo pogojema $y(-l) = y(l)$ in $y'(-l) = y'(l)$. Take funkcije tvorijo kompleten ortogonalen sistem v prostoru $L^2[-l, l]$ z običajnim skalarnim produktom, zato lahko vsako $L^2$ funkcijo $f$ razvijemo v vrsto po lastnih funkcijah.

**1.1** Naj bo $l > 0$ in

$$V_l = \{y \in \mathcal{C}^{(2)}[-l, l]; \quad y(-l) = y(l), \quad y'(-l) = y'(l)\}.$$

(a) Dokaži, da je $V_l$ gost podprostor v $L^2[-l, l]$.

(b) Dokaži, da je operator $A : V_l \to L^2[l, l]$, $Ay = -y''$, simetričen in pozitiven, ni pa injektiven.

(c) Določi njegove lastne vrednosti in lastne vektorje.

**1.2** Naj bosta $A$ in $V_l$ kot pri prejšnji nalogi, in $Gf = \int_{-l}^{l} G(x, t) f(t)\, dt$, kjer je

$$G(x, t) = \frac{1}{4l}(x - t)^2 + \frac{1}{2}|x - t|.$$

(a) Dokaži, da za vsak $f \in L^2[-l, l]$ velja $AGf = f - \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\ dt$ in da za vsak $g \in V_l$ velja $GAg = g - \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} g(t)\ dt$.

(b) Dokaži, da imata operatorja $A : V_l \to L^2[-l, l]$ in $G : L^2[-l, l] \to V_l$ iste lastne vektorje. Iz tega sklepaj, da lastni vektorji operatorja $A : V \to L^2[-l, l]$ tvorijo kompleten ortogonalen sistem.

Zaporedju

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots$$

pravimo *klasični trigonometrijski sistem* na $[-l, l]$.

**1.3** Dokaži, da je klasični trigonometrijski sistem ortogonalen v $L^2[-l, l]$ ni pa normiran. Dokaži, da je sistem kompleten in zapiši Fourierovo vrsto in Parsevalovo identiteto za ta sistem.

**1.4** Razvij naslednje funkcije v klasične Fourierove vrste na $[-\pi, \pi]$.

(a) $f(x) = x$,

(b) $f(x) = x^2$,

(c) $f(x) = (x^3 - \pi^2 x)/12$.

Zapiši tudi ustrezne Parsevalove identitete.

**1.5** Izračunaj vsote vrst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

**1.6** Bernoullijevi polinomi $\varphi_n(x)$ so definirani z naslednjo rekurzivno relacijo:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_{n-1}(x), \;\; \varphi_0(x) = 1 \text{ in } \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = 0, \; n > 0.$$

(a) Eksplicitno izračunaj prvih pet Bernoullijevih polinomov. (b) Razvij polinome $\varphi_n(x)$ v Fourierove vrste na intervalu $[0, 1]$. (c) Izrazi vsoto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$$

z Bernoullijevimi polinomi.

**1.7** Naj bo $0 < a < 1$. Razvij funkcije $\chi_{[-a,a]}(x)$, $\cos ax$, $\sin ax$, $\operatorname{ch} ax$, $\operatorname{sh} ax$ v klasične Fourierove vrste na $[-\pi, \pi]$ in zapiši ustrezne Parsevalove identitete.

**1.8** Naj bo $n$ naravno število in $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Poišči minimum izraza $\|f - T_n\|$, kjer $T_n$ teče po vseh linearnih kombinacijah elementov $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx$. Pri katerem $T_n$ je dosežen?

**1.9** Razvij funkcijo $f(x) = |\sin x|$ v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

**1.10** Poišči periodično rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + y(x) = |\sin x|.$$

## Trigonometrijske vrste

Vsaki funkciji $f \in L^1[-\pi, \pi]$ priredimo števila

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\ dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\ dt,$$

ki jim pravimo *klasični Fourierovi koeficienti.* Zaporedju funkcij

$$(s_n f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

pravimo *klasična Fourierova vrsta* funkcije $f$.

Iz definicije še ne sledi, da $s_n f$ konvergira proti $f$ v kakršnemkoli smislu. Za konvergenco so potrebne dodatne predpostavke.

(a) *Cesarova konvergenca.* Če je $f \in L^1[-\pi, \pi]$, potem je $\lim\limits_{N\to\infty} \|f - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} s_n f\|_1 = 0$.

(b) *Kvadratična konvergenca.* Če $f \in L^2[-\pi, \pi]$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n f - f\|_2 = 0$.

(c) *Konvegenca po točkah.* Če $f \in L^1[-\pi, \pi]$ in če je $f$ odvedljiva v točki $x \in (-\pi, \pi)$, (zadošča obstoj levega in desnega odvoda), potem je $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n f)(x) = f(x)$.

(d) *Enakomerna konvergenca.* Če je funkcija $f$ zvezna na $[-\pi, \pi]$, ima omejen totalni razmah in zadošča $f(\pi) = f(-\pi)$, potem je $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n f - f\|_\infty = 0$.

Za dokaze teh trditev glej [9].

**1.11** Primerjaj grafe naslednjih funkcij z grafi vsot njihovih klasičnih Fourierovih vrst.

(a) $f(x) = x$,

(b) $f(x) = x^2$,

(c) $f(x) = (x^3 - \pi^2 x)/12$.

Primerjaj vrednosti funkcij in njihovih Fourierovih vrst za $x = \frac{\pi}{2}$.

**1.12**

(a) Razvij funkcijo $f(x) = \cos a(\pi - |x|)$ v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Dokaži, da je

$$\operatorname{ctg} \pi t - \frac{1}{\pi t} = \frac{-2t}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - t^2}$$

in da ta vrsta enakomerno konvergira na vsaki kompaktni podmnožici v $\mathbb{R}$, ki ne vsebuje celih števil.

(c) Dokaži

$$\frac{\sin \pi t}{\pi t} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{t^2}{k^2}).$$

**1.13** Izračunaj vsoti vrst

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Katero funkcijo boš moral razviti?

**1.14** Naj bo $m$ poljubno naravno število. Izrazi klasične Fourierove koeficiente funkcij $f(x) \cos mx$ in $f(x) \sin mx$ s klasičnimi Fourierovimi koeficienti funkcije $f(x)$.

**1.15** Razvij funkciji $x \sin x$ in $x \cos x$ v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

**1.16** Razvij funkciji

$$f(x) = \log(2\cos\frac{x}{2}), \quad g(x) = \log|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)|,$$

v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

**1.17** *Odvajanje Fourierove vrste.* Naj bo funkcija $f$ zvezna na $[-\pi, \pi]$, zvezno odvedljiva na $(-\pi, \pi)$ in naj velja $f(-\pi) = f(\pi)$ in $f' \in L^1[-\pi, \pi]$. Izrazi klasične Fourierove koeficiente funkcije $f'$ s klasičnimi Fourierovimi koeficienti funkcije $f$.

**1.18** Naj bo funkcija $f$ periodična s periodo $2\pi$ in naj bo $k$-krat zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$. Dokaži, da velja $a_n, b_n = O(\frac{1}{n^k})$, ko $n \to \infty$.

**1.19** *Enakomerna konvergenca.* Naj bo funkcija $f$ zvezna na $[-\pi, \pi]$, zvezno odvedljiva na $(-\pi, \pi)$ in naj velja $f(-\pi) = f(\pi)$ in $f' \in L^2[-\pi, \pi]$. Dokaži, da $s_n f$ konvergira proti $f$ enakomerno na $[-\pi, \pi]$.

**1.20** *Integriranje Fourierove vrste.* Naj bo $f \in L^1[-\pi, \pi]$ poljubna funkcija in $a_0, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ njeni Fourierovi koeficienti. kjer je $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$. Naj bo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - a_0)\ dt$$

in $A_0, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ njeni Fourierovi koeficienti.

(a) Dokaži, da velja $F(-\pi) = F(\pi)$.

(b) Dokaži, da velja $A_n = -\frac{b_n}{n}$, $B_n = \frac{a_n}{n}$ in $A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < +\infty$.

(c) Dokaži, da Fourierovo vrsto za $\int_0^x f(t)\ dt - a_0$ dobimo tako, da formalno integriramo vrsto za $f - a_0$.

**1.21** Dokaži, da trigonometrijska vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$$

ni klasična Fourierova vrsta nobene $L^1$ funkcije.

## Kompleksni trigonometrijski sistem

Zaporedju $e^{imx}$, kjer $m \in \mathbb{Z}$, pravimo *kompleksni trigonometrijski sistem.*

**1.22** Dokaži, da je kompleksni trigonometrijski sistem ortogonalen v prostoru $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, ni pa normiran. Skalarni produkt v tem prostoru je

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

**1.23** Izrazi kompleksne Fourierove koeficiente s klasičnimi in obratno.

**1.24** Dokaži, da je kompleksni trigonometrijski sistem kompleten in zapiši ustrezno Fourierovo vrsto in Parsevalovo identiteto.

**1.25** Razvij funkcijo

$$\frac{1}{2+\cos x}$$

v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$. Pomagaj si s kompleksno integracijo.

**1.26** Naj bo $a > b > 0$. Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{ab}{a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos x}$$

v klasično Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$.

**1.27** Razvij funkcijo

$$f(x) = \exp(\exp(ix))$$

v kompleksno Fourierovo vrsto. Seštej vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$$

**1.28** Poišči vsoti vrst

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n-1)},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n-1)}.$$

Nasvet: Pomagaj si s formulo

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n(n-1)} = z + (1-z)\log(1-z).$$

**1.29** Funkcijo $f \in L^1[-\pi,\pi]$ periodično nadaljujemo na vso realno os. Naj bo $g(x) = f(mx)$, kjer je $m$ naravno število. Izrazi kompleksne Fourierove koeficiente funkcije $g$ s kompleksnimi Fourierovimi koeficienti funkcije $f$.

**1.30** *Izoperimetrični problem.* Pokaži, da ima med vsemi sklenjenimi gladkimi krivuljami krog največjo ploščino.

Predpostavi, da ima krivulja obseg $2\pi$ in naj bo $z(s) = x(s) + iy(s)$ njena parametrizacija z naravnim parametrom. Razvij $z(s)$ v kompleksno Fourierovo vrsto po $[-\pi,\pi]$. Dokaži naslednje zaporedje enakosti in neenakosti:

$$\begin{aligned} p &= \; = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - x'y)\; ds = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\langle z', z\rangle = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 \leq \\ &\leq \; \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = \frac{1}{2}\|z'\|_1^2 = \pi. \end{aligned}$$

**1.31** *Konvolucija Fourierovih vrst.* Funkciji $f, g \in L^1[-\pi,\pi]$ periodično nadaljujemo na $\mathbb{R}$. Izrazi kompleksne (klasične) Fourierove koeficiente funkcije $h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\; dt$ s kompleksnimi (klasičnimi) Fourierovimi koeficienti funkcij $f$ in $g$. Dokaži tudi, da je $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

**1.32** Funkcijo $f \in L^2[-\pi,\pi]$ periodično nadaljujemo na $\mathbb{R}$. Izrazi kompleksne Fourierove koeficiente funkcije $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\; dt$ s kompleksnimi Fourierovimi koeficienti funkcije $f$. Izrazi še klasične Fourierove koeficiente funkcije $g$ s klasičnimi Fourierovimi koeficienti funkcije $f$.

Zaporedju $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$ pravimo *sinusni sistem* na $[0, l]$, zaporedju $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $k = 0, 1, \ldots$ pa *kosinusni sistem* na $[0, l]$.

**1.33** Razvij naslednje funkcije po sinusnem sistemu na $[0,\pi]$.

(a) $f(x) = 1$,

(b) $f(x) = \cos x$,

(c) $f(x) = x(\pi - x)$.

**1.34** Definirajmo preslikavo

$$\Phi : L^2[0,l] \oplus L^2[0,l] \to L^2[-l,l], \quad \Phi(f,g)(x) = \frac{f(|x|) + \operatorname{sign}(x) g(|x|)}{\sqrt{2}}.$$

Dokaži, da je ta preslikava izomorfizem Hilbertovih prostorov in da preslika zaporedje $(1,0)$, $(\cos\frac{\pi x}{l}, 0)$, $(0, \sin\frac{\pi x}{l})$, $(\cos\frac{2\pi x}{l}, 0)$, $(0, \sin\frac{2\pi x}{l}), \ldots$ v klasičen trigonometrijski sistem na $[-l,l]$ pomnožen s konstanto $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ali je izometrija?

**1.35** *Uteženi trigonometrijski sistem* je zaporedje $e_0(x), e_1(x), e_2(x), \ldots$,

$$e_{2k-1}(x) = \begin{cases} \lambda_2 \sin kx, & -\pi \le x \le 0 \\ \lambda_1 \sin kx, & 0 < x \le \pi \end{cases}, \quad e_{2k}(x) = \begin{cases} \lambda_1 \cos kx, & -\pi \le x \le 0 \\ \lambda_2 \cos kx, & 0 < x \le \pi \end{cases},$$

kjer sta $\lambda_1, \lambda_2$ taki realni števili, da velja $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \ne 0$. Dokaži, da je to kompleten ortogonalen sistem v $L^2[-\pi,\pi]$ in izračunaj njegove norme.

## Dvojni trigonometrijski sistemi

Pri funkcijah dveh spremenljivk potrebujemo razvoj v Fourierovo vrsto po obeh spremenljivkah. Tako dobimo *dvojne trigonometrijske sisteme*.

**1.36** Dokaži, da funkcije

$$1, \ldots, \cos mx \cos ny, \cos mx \sin ny, \sin mx \cos ny, \sin mx \sin ny, \ldots$$

tvorijo kompleten ortogonalen sistem v prostoru $L^2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$. Dokaži, da funkcije $\frac{1}{2\pi^2} e^{imx+iny}, m, n \in \mathbb{Z}$ tvorijo kompleten ortonormiran sistem.

**1.37** Razvij funkcije $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = \operatorname{sign}(x-y)$ in $h(x,y) = |x-y|$ v dvojni klasični trigonometrijski sistem na $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$.

**1.38** Dokaži, da je funkcija

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx \sin ny$$

dobro definirana in zvezna. Dokaži, da je

$$f(x,y) = -\frac{1}{2} xy \text{ za } |x| + |y| \le \pi.$$

Pomagaj si s formulami

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

$$\frac{3x^2-\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi\le x\le \pi.$$

**1.39** Dokaži, da je funkcija

$$f(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx\sin ny\sin nz$$

dobro definirana in zvezna. Dokaži, da je

$$f(x,y,z)=-\frac{1}{2}xyz \text{ za } |x|+|y|+|z|\le\pi.$$

Pomagaj si s formulami

$$\sin a\sin b\sin c=\frac{1}{4}(\sin(a+b-c)+\sin(b+c-a)+\sin(c+a-b)-\sin(a+b+c)),$$

$$\frac{x^3-\pi^2x}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3} \text{ za } -\pi\le x\le\pi.$$

# 2. FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

## Osnove $L^1$ teorije

Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo njeno *Fourierovo transformiranko*

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt}\ dt.$$

Označimo z $C_0(\mathbb{R})$ prostor zveznih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ki gredo proti 0, ko $x \to \pm\infty$. Izkaže se, da je $\mathcal{F}(L^1)$ prava podmnožica v $C_0(\mathbb{R})$. Preslikavi $\mathcal{F}$ pravimo *Fourierova transformacija*.

*Inverzna formula*

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{r} \mathcal{F}\left(f\right)\left(z\right)e^{itz}\ dz$$

velja v vsaki točki $t$, kjer je $f$ zvezna in izpolnjuje *Dinijev pogoj*: obstaja tak $a > 0$, da je integral

$$\int_0^a \left| \frac{f(t+u) - f(t) + f(t-u) - f(t)}{u} \right|\ du$$

končen; to je npr. res, če ima $f$ levi in desni odvod v $t$. Če je $\mathcal{F}(f) \in L^1$, potem velja inverzna formula skoraj povsod (izrek o inverzu).

*Fourierova sinusna* in kosinusna transformacija sta definirani z

$$\mathcal{F}_c\left(f\right)\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos(xt)dt, \quad \mathcal{F}_s\left(f\right)\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\sin(xt)dt.$$

**2.1** V slovenski matematični literaturi obravnavajo Fourierovo transformacijo trije avtorji [9, 19, 24] ki jo definirajo na tri različne načine.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{hla}(f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-izt}\ dt, \\
\mathcal{F}_{suh}(f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{izt}\ dt, \\
\mathcal{F}_{zak}(f)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi izt}\ dt.
\end{aligned}$$

Naša definicija se razlikuje od gornjih treh in je posebno priljubljena pri fizikih.

Kako se pretvarja med različnimi definicijami? Zapiši inverzno formulo za vsako od teh definicij. Dodaj še kako svojo definicijo.

**2.2** Dokaži, da je Fourierova transformiranka sode funkcije vedno soda funkcija in da je Fourierova transformiranka lihe funkcije vedno liha funkcija.

**2.3** Dokaži, da je Fourierova transformiranka realne funkcije realna natanko tedaj, ko je soda.

**2.4** Naj bo funkcija $f$ zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva ter $f, \mathcal{F}(f) \in L^1$. Dokaži:

(a) za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\mathcal{F}^2(f)(v) = f(-v)$,

(b) $\mathcal{F}^4(f) = f$,

(c) če je $f$ tudi soda, potem je $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

**2.5** Naj bo $c > 0$. Z direktnim računom določi Fourierove transformiranke funkcij

(a) $f(t) = \chi_{[-c,c]}(t)$, kjer je $\chi_{[-c,c]}$ karakteristična funkcija intervala $[-c, c]$,

(b) $g(t) = e^{-c|t|}$.

**2.6** Naj bo $c > 0$.

(a) Poišči Fourierovo transformiranko funkcije $h(t) = \frac{1}{c^2+t^2}$.

(b) Kakšna je s Fourierova transformiranka funkcije $k(t) = \frac{\sin cx}{x}$?

**2.7** Poišči Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko funkcij

$$f(t) = \max(1 - |t|, 0), \quad g(t) = \max(1 - t^2, 0).$$

**2.8** Naj bo $a > 0$ konstanta in $f \in L^1$ poljubna funkcija. Izrazi Fourierovi transformiranki funkcij $f(t)\cos at$ in $f(t)\sin at$ s Fourierovo transformiranko funkcije $f(t)$.

**2.9** Naj bo $a, b > 0$. Izračunaj Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = e^{-a|t|}\cos bt, \quad g(t) = e^{-a|t|}\sin bt.$$

**2.10** Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije $f(t) = e^{-|t|}\cos 2t \sin 3t$.

**2.11** Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{e^{-a|t|}\sin bt}{t}$$

kjer sta $a, b > 0$.

**2.12** Naj bo $c > 0$. Izračunaj kosinusni transformiranki funkcij

$$f(t) = \chi_{[0,c]}(t), \quad g(t) = e^{-ct}.$$

**2.13** Naj bo $a, b \geq 0$. Izračunaj kosinusno transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}.$$

**2.14** Dokaži, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc}
L^1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & C_0(\mathbb{R}) \\
\Phi \downarrow\uparrow \Psi & & \Phi \downarrow\uparrow \Psi \\
L^1(\mathbb{R}^+) \oplus L^1(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow[\mathcal{F}_c \oplus i\mathcal{F}_s]{} & C_0(\mathbb{R}^+) \oplus C_0(\mathbb{R}^+)
\end{array}$$

kjer sta preslikavi $\Phi$ in $\Psi$ definirani z

$$\Phi(f)(x) = (\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))),$$

$$\Psi(f, g)(x) = f(|x|) + \mathrm{sign}(x)g(|x|)$$

in sta ena drugi inverzni.

**2.15** Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in $F$ njena sinusna transformiranka. Dokaži, da limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x} dx$$

obstaja in je končna.

**2.16** Dokaži, da funkcija

$$F(x) = \begin{cases} x/e, & 0 \le x \le e \\ 1/\ln x & e \le x < \infty \end{cases}$$

pripada $C_0(\mathbb{R}^+)$, vendar ni sinusna transformiranka nobene $L^1$ funkcije.

**2.17** Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in $F$ njena kosinusna transformiranka. Dokaži naslednjo trditev. Če obstaja tak $\varepsilon > 0$, da velja $\int_0^\varepsilon |f(t) \ln t| \, dt < \infty$, potem limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x} \, dx$$

obstaja in je končna.

**2.18** Poišči tako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, da ne obstaja limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_e^r \frac{F(x)}{x} dx,$$

kjer je $F$ kosinusna transformiranka funkcije $f$.

## Odvajanje in integriranje

Fourierove transformiranke lahko računamo s pomočjo odvajanja ali integriranja slike ali originala.

**2.19** Dokaži, da velja naslednja formula o *odvajanju originala.* Če je $f$ zvezno odvedljiva in $f, f' \in L^1$, potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = ix \, \mathcal{F}(f)(x).$$

**2.20** Dokaži, da velja formula o *višjih odvodih originala.* Če je $f$ dvakrat zvezno odvedljiva in $f, f', f'' \in L^1$, potem je za vsak $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\left(f''\right)(x) = -x^2 \mathcal{F}(f)(x).$$

**2.21** Dokaži formulo o *odvajanju slike.* Naj bosta funkciji $f$ in $g(t) = tf(t)$, $t \in \mathbb{R}$, v $L^1$. Potem je $\mathcal{F}(f)$ odvedljiva na $\mathbb{R}$ in za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(\mathcal{F}f)'(x) = -i\mathcal{F}(g)(x).$$

**2.22** Dokaži formulo o *višjih odvodih slike:* če so $f(t), tf(t), t^2 f(t)$ v $L^1$, potem je $\mathcal{F}f$ dvakrat odvedljiva na $\mathbb{R}$ in za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$(\mathcal{F}f)''(x) = -\mathcal{F}\left(t^2 f(t)\right)(x).$$

**2.23** Naj bo funkcija $f$ zvezno odvedljiva in naj $f, f' \in L^1$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{F}(f)(x) = o(|x|^{-1}), \ x \to \pm\infty.$$

**2.24** Dokaži, da za vsako dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f$, ki zadošča $f, f', f'' \in L^1$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ velja Fourierova formula

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(x) e^{itx} \, dx.$$

**2.25** Naj bo $a > 0$. Izračunaj Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = e^{-at^2}.$$

**2.26** Naj bosta $a, b > 0$. Izračunaj Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = e^{-at^2} \cos bt \quad \text{ in } g(t) = e^{-at^2} \frac{\sin bt}{t}.$$

**2.27** Naj bodo $f, f'$ in $f''$ v $L^1(\mathbb{R})$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{F}_c(f''(t))(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) - x^2 \mathcal{F}_c(f(t))(x),$$

$$\mathcal{F}_s(f''(t))(x) = x\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) - x^2 \mathcal{F}_s(f(t))(x).$$

## Konvolucija

*Konvolucijo* dveh funkcij $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo z

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \, dt.$$

Norma konvolucije zadošča neenakosti

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

in izreku o konvoluciji

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

**2.28** Kako se glasi izrek o konvoluciji za transformacije $\mathcal{F}_{hla}$, $\mathcal{F}_{suh}$ in $\mathcal{F}_{zak}$?

**2.29** Naj bosta $a, b > 0$. Izračunaj konvolucijo $f * g$, kjer je

(a) $f_1(t) = \chi_{[-a,a]}(t), \quad g_1(t) = \chi_{[-b,b]}(t)$,

(b) $f_2(t) = e^{-a|t|}, \quad g_2(t) = e^{-b|t|}$,

(c) $f_3(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad g_3(t) = \frac{\sin bt}{t}$,

(d) $f_4(t) = \frac{1}{t^2+a^2}, \quad g_4(t) = \frac{1}{t^2+b^2}$.

**2.30** Naj bodo funkcije $F$, $G$ in $FG$ iz zaloge vrednosti $\mathcal{F}$. Dokaži, da velja

$$\mathcal{F}^{-1}(FG) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(F) * \mathcal{F}^{-1}(G).$$

**2.31** Naj bo $0 < a < b$. Določi Fourierovo transformiranko in inverzno Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{\sin at \sin bt}{t^2}.$$

Pomagaj si z izrekom o konvoluciji.

**2.32** Obravnavaj rešitve integralske enačbe v odvisnosti od parametra $\lambda$

$$f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|x-t|} \, dt + e^{-2|x|}.$$

## Kompleksna integracija

*Inverzna formula za Fourierovo transformacijo*

$$f(t) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{r} \mathcal{F}(f)(z) e^{itz} \, dz$$

velja v vsaki točki $t$, kjer je $f$ zvezna in ima omejen levi in desni odvod (Dinijev izrek).

*Jordanova lema.* Naj bo $a > 0$, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfna in $R_n$ zaporedje nenegativnih števil z limito $+\infty$.

(a) Naj bo $C_n' = \{z; |z| = R_n \ , \ \operatorname{Im} z > -a\}$ in $M_n' = \sup_{z \in C_n'} |F(z)|$.

Če je $\lambda > 0$ in $\lim_{n \to \infty} M_n' = 0$ potem je $\lim_{n \to \infty} \int_{C_n'} F(z) e^{i\lambda z} \, dz = 0$.

(b) Naj bo $C_n'' = \{z; |z| = R_n\ ,\ \operatorname{Im} z < -a\}$ in $M_n'' = \sup_{z \in C_n''} |F(z)|$.

Če je $\lambda < 0$ in $\lim_{n\to\infty} M_n'' = 0$, potem je $\lim_{n\to\infty} \int_{C_n''} F(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0$.

*Lema o delu residuuma.* Naj bo $F$ analitična v neki prebodeni okolici $z_0$ in naj ima v $z_0$ pol prve stopnje. Naj bo krivulja $C_\varepsilon$ rob krožnega izseka $\{z;\ |z - z_0| = \epsilon,\ \phi_0 < \arg(z - z_0) < \phi_0 + \alpha\}$, potem velja

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} F(z)\, dz = i\alpha \operatorname{Res}(F, z_0).$$

*Inverzne transformiranke racionalnih funkcij.* Naj bosta $A$ in $B$ kompleksna polinoma, $B$ brez realnih ničel in $\deg B \geq \deg A + 1$. Potem je

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \frac{A(z)}{B(z)} e^{itz}\, dz =$$
$$= \begin{cases} i \sum\limits_{z \in S^+} \operatorname{Res}(\frac{A(z)}{B(z)} e^{itz}, z), & t > 0, \\ -i \sum\limits_{z \in S^-} \operatorname{Res}(\frac{A(z)}{B(z)} e^{itz}, z), & t < 0, \end{cases}$$

kjer je $S^+ = \{z;\ B(z) = 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ in $S^- = \{z;\ B(z) = 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$.

**2.33** Dokaži gornjo formulo za inverzno transformacijo racionalnih funkcij, ki nimajo realnih polov.

**2.34** Naj bo $a > 0$. Določi Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko funkcije

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)}.$$

**2.35** Naj bo $a > 0$. Določi Fourierovi in inverzni Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^2}, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^2}.$$

**2.36** Naj bo $a > 0$. Določi Fourierovi in inverzni Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^3}, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}(t^2 + a^2)^3}.$$

**2.37** Določi Fourierove in inverzne Fourierove transformiranke funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)}, \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)},$$

$$h(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)}, \quad k(t) = \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}(4a^4 + t^4)}.$$

**2.38** Izračunaj Fourierovi in inverzni Fourierovi transformiranki funkcij

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + t + 1)}, \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t^2 + t + 1)^2}.$$

**2.39** Naj bo $0 < a < 1$. Izračunaj Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko meromorfne funkcije

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch} at}{\sqrt{2\pi} \operatorname{ch} t}.$$

**2.40** Naj bo $0 < a < \pi$. Izračunaj Fourierovo in inverzno Fourierovo transformiranko funkcije

$$\frac{\operatorname{sh} at}{\sqrt{2\pi}(1 + t^2) \operatorname{sh} \pi t}.$$

**2.41** Naj bo $\alpha, \beta > 0$ in

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} \chi_{[0,\infty)}(t).$$

Določi Fourierovo transformiranko $\mathcal{F}(f)(y)$.

**2.42** Izračunaj kosinusni transformiranki funkcij

$$f(x) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

## $L^2$ teorija

Naj bo $L^1 = L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in $L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. V $L^2$ teoriji najprej dokažemo *Parsevalovo identiteto*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

za vsako funkcijo $f \in L^1 \cap L^2$. Odtod sledi, da je $\mathcal{F}$ omejena linearna preslikava iz prostora $L^1 \cap L^2$ v prostor $L^2$. Ker je $L^1 \cap L^2$ gost podprostor prostora $L^2$, lahko torej $\mathcal{F}$ razširimo po zveznosti do preslikave

$$\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2,$$

$$\mathcal{F}_2|_{L^1 \cap L^2} = \mathcal{F}.$$

Izkaže se, da je ta preslikava bijektivna (Plancherelov izrek) izometrija (Parsevalova identiteta velja za vsak $f \in L^2$.)

**2.43** Dokaži, da ni niti $L^1 \subseteq L^2$ niti $L^2 \subseteq L^1$.

**2.44** Naj bo $c > 0$. Dokaži, da funkcija

$$f(t) = \frac{\sin ct}{t}$$

pripada $L^2$, ne pripada pa $L^1$. Dokaži, da $\mathcal{F}_2 f$ pripada $L^2$, ne pripada pa $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

**2.45** Naj bo $c > 0$. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin ct}{t} \right)^2 \, dt.$$

**2.46** Dokaži identiteto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_2 \left( f \right) (t) g(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathcal{F}_2 \left( g \right) (t) \, dt,$$

za poljubni funkciji $f, g \in L^2$! Ali odtod sledi, da je operator $\mathcal{F}_2$ hermitski?

**2.47** Dokaži identiteto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_2 f)(t)(\mathcal{F}_2 g)(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) g(t) \, dt,$$

za poljubni funkciji $f, g \in L^2$.

**2.48** Naj bosta $a, c > 0$. Izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin cx}{x(a^2 + x^2)} \, dx.$$

**2.49** Dokaži, da velja

$$(\mathcal{F}_2^* f)(x) = (\mathcal{F}_2 f)(-x) = (\mathcal{F}_2^{-1} f)(x)$$

za vsak $f \in L^2$. Izpelji odtod naslednje lastnosti:

(a) $\mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_2^* = I$,

(b) $(\mathcal{F}_2^2 f)(x) = f(-x)$ za vsak $f \in L^2$,

(c) $(\mathcal{F}_2)^4 = I$.

**2.50** Dokaži, da so funkcije

$$f_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

lastni vektorji operatorja $\mathcal{F}_2$, kjer so $H_n$ Hermitovi polinomi. Kakšne so pripadajoče lastne vrednosti?

**2.51** Dokaži, da velja $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

**2.52** Dokaži, da velja $\mathcal{F}_2(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_1(f) \mathcal{F}_2(g)$.

**2.53** Naj bo funkcija $f$ zvezno odvedljiva in naj $f \in L^1$ in $f' \in L^1 \cap L^2$. Dokaži, da je $\mathcal{F} f \in L^1$. Pomagaj si s Cauchy-Schwartzovo neenakostjo. To pomeni, da inverzna formula za $f$ velja v vsaki točki.

Preostale naloge se nanašajo na $L^2$-verziji sinusne in kosinusne transformacije.

**2.54** Dokaži, da za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$ velja

$$\|\mathcal{F}_c f\|_2 = \|\mathcal{F}_s f\|_2 = \|f\|_2.$$

Dokaži, da obstajata razširitvi

$$\mathcal{F}_{c,2}, \mathcal{F}_{s,2} : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$$

preslikav $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_s : L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$. Dokaži, da za vsak $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$

$$\|\mathcal{F}_{c,2} f\|_2 = \|\mathcal{F}_{s,2} f\|_2 = \|f\|_2.$$

**2.55** Definirajmo preslikavo

$$\Phi : L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \Phi(f,g)(x) = \frac{f(|x|) + \operatorname{sign}(x) g(|x|)}{\sqrt{2}}.$$

Dokaži, da je $\Phi$ izomorfizem Hilbertovih prostorov in izračunaj njegov inverz $\Psi$.

**2.56** Dokaži, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & L^2(\mathbb{R}) \\ \Phi \downarrow\uparrow \Psi & & \Phi \downarrow\uparrow \Psi \\ L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow[\mathcal{F}_{c,2} \oplus i\mathcal{F}_{s,2}]{} & L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^+) \end{array}$$

kjer sta preslikavi $\Phi$ in $\Psi$ definirani kot v prejšnji nalogi.

**2.57** Dokaži, da za vsak $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ velja

$$(\mathcal{F}_{c,2})^2 f = (\mathcal{F}_{s,2})^2 f = f!$$

Dokaži, da je $\mathcal{F}_{c,2}^{-1} = \mathcal{F}_{c,2}$ in $\mathcal{F}_{s,2}^{-1} = \mathcal{F}_{s,2}$.

# 3. REšITVE NALOG

## Fourierove vrste

1.1 (a) Neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem v $(-l,l)$ so goste v $L^2[-l,l]$ in hkrati ležijo v $V_l$.

(b) Za poljubna $y,z \in V$ velja $\langle Ay,z\rangle = \int_{-l}^{l}(-y'')zdx = \int_{-l}^{l} y'z'\ dx$. Odtod sledi, da je $\langle Ay,z\rangle = \langle Az,y\rangle$ in $\langle Ay,y\rangle \geq 0$. Operator $A : V_l \to L^2[-l,l]$ ni injektiven, ker ima v jedru konstantno funkcijo 1.

(c) Lastne vrednosti so $\lambda_k = -(k\pi/l)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Lastni podprostor za $\lambda_0 = 0$ je enodimenzionalen in generiran s konstantno funkcijo 1. Če je $k = 1,2,\ldots,$ potem je lastni podprostor za $\lambda_k$ dvodimenzionalen in generiran s $\cos(k\pi x/l)$ in $\sin(k\pi x/l)$.

1.2 Dovolj je trditev dokazati za $C^2$ funkcije, ki imajo v krajiščih odvod in funkcijsko vrednost enako 0.

$$\begin{aligned}
Gf(x) &= \int_{-l}^{l}\frac{1}{4l}(x-t)^2 f(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_{-l}^{x}(x-t)f(t)\ dt - \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{x}^{l}(x-t)f(t)\ dt \\
AGf(x) &= \int_{-l}^{l}\frac{-1}{2l}f(t)\ dt - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\int_{-l}^{x}f(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{l}f(t)\ dt\right) = \\
&= \int_{-l}^{l}\frac{-1}{2l}f(t)\ dt + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(-f'')(x) &= -\int_{-l}^{l}\frac{1}{4l}(x-t)^2 f''(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_{-l}^{x}(x-t)f''(t)\ dt + \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{x}^{l}(x-t)f''(t)\ dt = \\
&= -\int_{-l}^{l}\frac{1}{2l}(x-t)f'(t)\ dt + \frac{1}{2}\int_{-l}^{x}(-1)f'(t)\ dt - \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{x}^{l}(-1)f'(t)\ dt =
\end{aligned}$$

$$= \quad -\int_{-l}^{l} \frac{1}{2l} f(t)\ dt + \frac{1}{2}(-1)f'(x)\ dt - \frac{1}{2}(-1)f(x).$$

1.3 Fourierova vrsta in Parsevalova identiteta se glasita

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\pi x/l) + b_k \sin(k\pi x/l)),$$

$$\int_{-l}^{l} f(t)^2\ dt = 2la_0^2 + l\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

kjer je $a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\ dt$, $a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi x}{l}\ dt$, $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi x}{l}\ dt$. Ostale trditve so posledice nalog 1.1 in 1.2.

1.4 Fourierove vrste in Parsevalove identitete so

(a) $$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad \frac{2\pi^3}{3} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2},$$

(b) $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad \frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

(c) $$\frac{x^3 - \pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx, \quad \frac{\pi^7}{945} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}.$$

1.5 Uporabimo nalogo 1.4 in dobimo rešitve (a) $\pi^2/6$, (b) $\pi^4/90$, (c) $\pi^6/945$.

1.6 Prvih pet polinomov je

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= x - 1/2,\\
\varphi_2(x) &= \frac{1}{2!}(x^2 - x + 1/6),\\
\varphi_3(x) &= \frac{1}{3!}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x),\\
\varphi_4(x) &= \frac{1}{4!}(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}).
\end{aligned}$$

Razvoj $\varphi_1(x)$ v Fourierovo vrsto je

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{\pi}\sum\frac{\sin 2k\pi x}{k}.$$

Iz rekurzivne formule dobimo

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} + c.$$

Zaradi pogoja, da je vsaka funkcija ortogonalna na konstanto, mora biti $c = 0$. Splošna formula je

$$\varphi_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{(2\pi)^n} \sum \frac{\cos 2k\pi x}{k^n}$$

za sode $n$ in

$$\varphi_n(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}+1} \frac{2}{(2\pi)^n} \sum \frac{\sin 2k\pi x}{k^n}$$

za lihe $n$. Vsota je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1}(2\pi)^{2m} \frac{1}{2} \varphi_{2n}(0).$$

1.7 Fourierove vrste so

$$\begin{aligned}
\chi_{[-a,a]}(x) &= \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx, \\
\cos ax &= \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nx \right), \\
\sin ax &= \frac{\sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos nx, \\
\operatorname{ch} ax &= \frac{2a \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \cos nx \right), \\
\operatorname{sh} ax &= \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{a^2 + n^2} \sin nx.
\end{aligned}$$

Ko uredimo Parsevalove identitete, dobimo

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}, \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 - n^2)^2} = \frac{1}{4a^4} \left( -2 + a\pi \operatorname{ctg} a\pi + a^2\pi^2(1 + \operatorname{ctg}^2 a\pi) \right),
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2-n^2)^2}=\frac{\pi}{4a}\left(a\pi(1+\operatorname{ctg}^2 a\pi)-\operatorname{ctg} a\pi\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}=\frac{1}{4a^4}\left(-2+a\pi\operatorname{cth} a\pi+a^2\pi^2(\operatorname{cth}^2 a\pi-1)\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{4a}\left(\operatorname{cth} a\pi+\pi a(1-\operatorname{cth}^2 a\pi)\right).$$

1.8 Naj bodo $a_i, b_j$ klasični Fourierovi koeficienti funkcije $f$. Minimum je enak kvadratnemu korenu iz

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt-\left(2\pi a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right).$$

Dosežen je pri $f_0=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

1.9 Vrsta je

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

1.10 Rešitev iščemo z nastavkom $y(x)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_n\cos nx+d_n\sin nx$. Ko vstavimo v enačbo še vrsto za $|\sin x|$, opazimo, da so koeficienti $d_n$ enaki 0, koeficienti $c_n$ enaki 0 za lihe $n$. Za ostale dobimo enačbe $c_0=\frac{2}{\pi}$ in

$$(-4k^2+1)c_k=-\frac{4}{\pi(4k^2-1)}.$$

Rešitev je

$$y(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4k^2-1}\right)^2\cos 2kx.$$

1.11 Za vsak $x\in\mathbb{R}$ definiramo $g(x)=\lim_{n\to\infty}(s_nf)(x)$.

(a) Velja $g(x)=x$ za vsak $x\in(-\pi,\pi)$ in $g(\pi)=0$. Izven intervala $[\pi,\pi]$ dobimo $g(x)$ s periodičnim nadaljevanjem. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se ujemata samo na intervalu $(-\pi,\pi)$. Velja $\frac{\pi}{2}=2(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots)$.

(b) Velja $g(x)=x^2$ za vsak $x\in[-\pi,\pi]$. Izven intervala $[\pi,\pi]$ dobimo $g(x)$ s periodičnim nadaljevanjem. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se ujemata samo na intervalu $[-\pi,\pi]$. Velja $\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

(c) Velja $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in [-\pi, \pi]$. Izven intervala $[\pi, \pi]$ dobimo $g(x)$ s periodičnim nadaljevanjem. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se ujemata samo na intervalu $[-\pi, \pi]$. Velja $-\frac{\pi^3}{32} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$.

1.12 Fourierova vrsta je $\frac{2a \sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2} \cos nx\right)$. Ker ima $f$ levi in desni odvod v 0, je po točki (c) iz uvoda vsota vrste za $x = 0$ enaka $f(0)$. Odtod sledi (b), če zamenjamo $a$ z $t$. Funkcijska vrsta $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-t^2}$ je enakomerno konvergentna na $[-\pi, \pi]$, ker je majorizirana s konvergentno številsko vrsto $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$. Točko (c) dobiš, če integriraš identiteto iz (b) od 0 do $t$ in antilogaritmiraš.

1.13 Razviti je potrebno funkcijo $\operatorname{ch} x$ (naloga 1.7) in izračunati vrednosti v 0 in $\pi$. Vsoti sta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} - \frac{1}{2} \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi \operatorname{cth} \pi - 1}{2}.$$

1.14 Naj $a_n(g)$ pomeni Fourierov koeficient funkcije $g$ pri $\cos nx$ in $b_n(g)$ Fourierov koeficient $g$ pri $\sin nx$. Po definiciji Fourierovih koeficientov je

$$\begin{aligned}
a_0(f(x)\cos mx) &= \begin{cases} a_m(f)/2 & m > 0 \\ a_0(f) & m = 0 \end{cases}, \\
a_n(f(x)\cos mx) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{|m-n|}(f) + a_{m+n}(f)) & m \neq n \\ a_0(f) + \frac{1}{2}a_{2n}(f) & m = n \end{cases}, \\
b_n(f(x)\cos mx) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(n-m)b_{|m-n|}(f) + b_{m+n}(f)), & m \neq n \\ \frac{1}{2}b_{2n}(f) & m = n \end{cases}.
\end{aligned}$$

Podobno velja za $f(x)\sin mx$.

1.15 Velja

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \sin nx,$$

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cos nx.$$

Prva metoda: odvajaj vrsti za $\cos ax$ in $\sin ax$ po $a$ in pošlji $a \to 1$. Druga metoda: pomnoži vrsto za $x$ s $\cos x$ ali $\sin x$ in razcepi produkte. Tretja metoda: uporabi prejšnjo nalogo.

1.16 Fourierovi koeficienti so $a_0(f) = 0$, $a_n(f) = (-1)^{n-1}n^{-1}$, $b_n(f) = 0$, $a_n(g) = 0$, $b_{2n}(g) = 0$ in $b_{2n+1}(g) = 2(-1)^n(2n+1)^{-1}$.

1.17 $a_0(f') = 0$, $a_n(f') = nb_n(f)$, $b_n(f') = -na_n(f)$.

1.18 Če $2k$ oziroma $(2k-1)$-krat integriramo per partes, dobimo

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\; dx\right| &= n^{-2k}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(2k)}(x)\cos nx\; dx\right| \\ &\leq 2\pi n^{-2k}\|f^{(2k)}\|_\infty, \\ \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\; dx\right| &= n^{-2k+1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(2k-1)}(x)\sin nx\; dx\right| \leq \\ &\leq 2\pi n^{-2k+1}\|f^{(2k-1)}\|_\infty.\end{aligned}$$

Podobno ocenimo člene $b_n$.

1.19 Ker je $f$ zvezna na $[-\pi,\pi]$, zvezno odvedljiva na $(-\pi,\pi)$ in $f(-\pi) = f(\pi)$, je $s_n(f') = \sum_{k=1}^n(kb_k\cos kx - ka_k\sin kx)$. Iz Cauchy-Schwartzove neenakosti sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2 + b_k^2) = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\|f'\|_2}{\pi} < +\infty.$$

Odtod sledi, da je vrsta $s_n(f)$ enakomerno in absolutno konvergentna. Ker so njeni sumandi zvezne funkcije, konvergira $s_n(f)$ proti neki zvezni funkciji $g$. Če dokažemo, da je $f = g$, je naloga končana. Ker je vrsta $s_n(f)$ enakomerno konvergentna, jo lahko členoma integriramo, zato imata funkciji $f$ in $g$ iste klasične Fourierove koeficiente. Ker je $s_n(f) = s_n(g)$, iz izreka o kvadratični konvergenci sledi, da sta $f$ in $g$ enaki v prostoru $L^2[-\pi,\pi]$. Ker sta $f$ in $g$ zvezni in enaki skoraj povsod, sta enaki povsod.

1.20 Funkcija $F$ je zvezna. Za prvo točko izračunamo

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{-\pi}(f(x) - a_0)\; dx = 0.$$

Z integracijo per partes takoj dobimo prvi dve zvezi za Fourierove koeficiente. Ker je $F$ monotona, ima omejen totalni razmah, zato njena Fourierova vrsta konvergira v sup normi, torej je $F(0) = 0 = A_0 - \sum b_n/n$, kar da še zadnjo enakost. Zadnja točka je trivialna posledica druge.

1.21 Iz naloge 1.20 sledi, da bi morala biti vsota vrste $\sum(n \log n)^{-1}$ končna, kar ne drži.

1.22 Skalarni produkt je

$$\langle e^{imx}, e^{inx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\ dx = 2\pi\delta_{m,n}.$$

1.23 Naj bo $c_m$ Fourierov koeficient pri $e^{imx}$ in $a_m, b_m$ običajni Fourierovi koeficienti. Potem je $c_m + c_{-m} = a_m, m \geq 0$, $c_0 = a_0$, $i(c_m - c_{-m}) = b_m$. Obratno, $c_m = (a_m - ib_m)/2, c_{-m} = (a_m + ib_m)/2$, $m > 0$.

1.25 Kompletnost sledi iz povezave z običajno Fourierovo vrsto. Naj bo $f$ enaka svojemu razvoju v običajno Fourierovo vrsto. Potem je

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}, \quad c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{imx}\ dx.$$

Parsevalova enakost je

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_m|^2.$$

1.25 Naloga je poseben primer naloge 1.26, kjer je rešitev izpeljana. Izračunamo $a = 2^{-1/2}$, $b = (3/2)^{1/2}$. Dobimo

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2(2+\cos x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n \cos nx.$$

1.26 Integral prepišemo v obliko

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\langle f(x), e^{inx}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\ dx = \\
&= \frac{2ab}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{s^{-n}}{(b^2-a^2)s^2 + 2(a^2+b^2)s + (b^2-a^2)}\ ds = \\
&= \frac{2ab}{2\pi i(b^2-a^2)}\int_{S^1} \frac{s^{-n}}{s^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2-a^2}s + 1}\ ds =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2ab}{2\pi i(b^2-a^2)} 2\pi i(\mathrm{Res}(g(s),0) + \mathrm{Res}(g(s),s_1)),$$

kjer je

$$g(s) = \frac{s^{-n}}{s^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2-a^2}s + 1}$$

in

$$s_1 = \frac{a-b}{a+b}$$

ničla polinoma $s^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2-a^2}s + 1$, ki leži znotraj $S^1$. Druga ničla je $s_2 = s_1^{-1}$. Za izračun residuov uporabimo razcep na parcialne ulomke in dobimo

$$g(s) = \frac{s^{-n}}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{s^{-n}}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right).$$

Za izračun ločimo primera $n > 0$ in $n \leq 0$. Če je $n > 0$, sta residuum v 0 in v $s_1$ enaka

$$\mathrm{Res}(g(s),0) = \frac{s_1^n - s_2^n}{s_1 - s_2}, \quad \mathrm{Res}(g(s),s_1) = \frac{s_1^{-n}}{s_1-s_2} = \frac{s_2^n}{s_1-s_2},$$

zato je vsota enaka

$$\mathrm{Res}(g(s),0) + \mathrm{Res}(g(s),s_1) = \frac{s_1^n}{s_1-s_2}.$$

Pri $n \leq 0$ dobimo le residuum v $s_1$ in ta je

$$\mathrm{Res}(g(s),0) = \frac{s_1^n}{s_1-s_2}.$$

Izračunajmo še

$$s_1 - s_2 = \frac{4ab}{b^2-a^2}$$

in vstavimo v formulo:

$$\frac{1}{2\pi}\langle f(x), e^{inx}\rangle = \frac{b^2-a^2}{4ab}\frac{2ab}{(b^2-a^2)}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n.$$

Iskana vrsta je

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n e^{inx}.$$

Rezultat, izražen z običajnimi koeficienti je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n \cos nx.$$

1.27 Če v vrsto za $\exp(z)$ vstavimo $z = \exp(ix)$, dobimo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}.$$

Ko vzamemo realni, oziroma imaginarni del, dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x}\cos(\sin x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x}\sin(\sin x).$$

1.28

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)} = \cos x + \frac{1}{2}(\log(2-2\cos x) - \cos x \log(2-2\cos x)) + \frac{x-\pi}{2}\sin x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n-1)} = \sin x + \frac{\pi - x}{2}(-1+\cos x) - \frac{1}{2}\log(2-2\cos x)\sin x.$$

1.29 Če je funkcija $f$ enaka vsoti svoje Fourierove vrste, potem zamenjamo $x$ z $mx$ in dobimo Fourierovo vrsto za $g$. Če $m$ deli $n$, je $c_n(g) = c_{\frac{n}{m}}(f)$, sicer pa je $c_n(g) = 0$. Če $f$ ni enaka vsoti svoje vrste, je rezultat isti, račun pa bistveno daljši. Velja namreč:

$$\begin{aligned}
\langle g(x), e^{inx}\rangle &= \int_0^{2\pi} f(mx)e^{-inx}dx = \frac{1}{m}\int_0^{2m\pi} f(x)e^{-i\frac{n}{m}x}\,dx = \\
&= \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} f(x)e^{-i\frac{n}{m}x}\,dx = \\
&= \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i\frac{n}{m}(x-2\pi l)}\,dx = \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i\frac{n}{m}x}\,dx \sum_{l=0}^{m-1} e^{-2\pi l}.
\end{aligned}$$

Zadnja vsota je enaka 0, če $m$ ne deli $n$ in enaka $m$ sicer.

1.30 Vse neenakosti so lahke, razen predzadnje. Velja namreč, da je

$$\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = \frac{1}{2}\|z'\|_2^2.$$

Ker pa je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom, je $|z'(s)| = 1$, torej je pod integralom konstanta in zato je $\|z'\|_1^2 = \|z'\|_2^2$. Enakost velja natanko tedaj, ko velja $z(s) = c_0 + c_1 e^{is}$.

1.31 Za kompleksne Fourierove koeficiente dobimo $c_n(h) = c_n(f)c_n(g)$. Odtod sledi $a_0(h) = a_0(f)a_0(g)$, $a_n(h) = (a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g))/2$ in $b_n(h) = (a_n(f)b_n(g) + a_n(g)b_n(f))/2$. Iz zveze

$$\begin{aligned} a_0(|h|) &= \frac{1}{2\pi}\langle |h|, 1\rangle \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\, dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(x-t)|\, dx = a_0(|f|)a_0(|g|) \end{aligned}$$

dobimo še $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

1.32 Za kompleksne Fourierove koeficiente dobimo $c_n(g) = c_{-n}(f)c_n(f) = c_{-n}(g)$. Členi $b_n(g)$ so enaki 0, $a_0(g) = a_0(f)^2$, $a_n(g) = (a_n(f)^2 + b_n(f)^2)/4$.

1.33 Funkcije liho nadaljujemo na interval $[-l, 0]$ in uporabimo običajne formule za izračun Fourierovih koeficientov. Dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)\sin nx, \\ \cos x &= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1}\sin 2nx, \\ x(\pi - x) &= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x. \end{aligned}$$

1.34 Izračunamo

$$\Phi(\cos\frac{2\pi x}{l}, 0)(x) = \frac{\cos\frac{2\pi|x|}{l}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2\pi x}{l}.$$

Podobno za sinuse. Ker norme slik baznih vektorjev ostanejo enake, je preslikava izometrija.

1.35 Definirajmo preslikavo

$$\Phi : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$$

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\left(\lambda_1 f_s(x) + \lambda_2 f_l(x)\right), & -\pi \le x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\left(\lambda_2 f_s(x) + \lambda_1 f_l(x)\right), & 0 \le x \le \pi \end{cases},$$

kjer je $f_s$ sodi, $f_l$ pa lihi del funkcije $f$. Krajši račun pokaže, da je $\Phi$ izomorfizem Hilbertovih prostorov, ki klasični trigonometrijski sistem preslika v uteženi trigonometrijski sistem pomnožen s konstanto $\frac{2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$.

1.36 Produkt kompletnih sistemov je kompleten sistem na katrezičnem pro--duktu.

1.37 Za funkcijo $f(x,y) = xy$ lahko uporabimo kar razvoj $x$ v vrsto in izračunamo produkt vrst. Dobimo

$$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \sin mx \sin ny.$$

Zaradi preprostejše pisave bomo ostali funkciji razvili v kompleksno Fourierovo vrsto. Skalarni produkti so:

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{sign}(x-y), e^{imx+iny} \rangle &= 0, \;\; m,n \neq 0, \\
&= \frac{-4\pi i}{m}, \;\; m+n=0, \\
&= \frac{4\pi i(-1)^m}{m}, \;\; n=0, \\
&= \frac{4\pi i(-1)^n}{n}, \;\; m=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |x-y|, e^{imx+iny} \rangle &= \frac{4\pi(-1)^{m+n}}{mn}, \;\; m,n \neq 0, \\
&= -\frac{8\pi}{m^2}, \;\; m+n=0, \\
&= \frac{4\pi(-1)^m}{m^2}, \;\; n=0,
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}, \quad m = 0.$$

1.38 Vrsta je majorirana s konvergentno številsko vrsto, zato je absolutno in enakomerno konvergentna in ima zvezno limito. S pomočjo formul dobimo

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx \sin ny = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos(n(x-y)) - \cos(n(x+y))\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos nu - \cos nv\right), \end{aligned}$$

kjer smo uvedli novi spremenljivki $u = x - y$ in $v = x + y$. Ker velja

$$\frac{3u^2 - \pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nu}{n^2}, \quad -\pi \le u \le \pi,$$

je

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos nu - \cos nv\right) = \frac{u^2 - v^2}{8}.$$

Ker je $4xy = v^2 - u^2$, enakost sledi za $|x| + |y| \le \pi$. Za ostale točke z območja $[-\pi, \pi]^2$ je funkcija enaka periodičnemu nadaljevanju $\frac{u^2-v^2}{8}$.

1.39 Vrsta je majorirana s konvergentno številsko vrsto, zato je absolutno in enakomerno konvergentna in ima zvezno limito. S pomočjo formul dobimo

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \sin ny \sin nz = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (\sin(n(x+y-z)) + \sin(n(-x+y+z)) + \\ &\quad + \sin(n(x-y+z)) - \sin(n(x+y+z))) = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(\sin nu + \sin nv + \sin nw - \sin(n(u+v+w))\right). \end{aligned}$$

kjer smo uvedli nove spremenljivke $u = x+y-z$, $v = -x+y+z$ in $w = x-y+z$. Ker velja

$$\frac{u^3 - \pi^2 z}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nu}{n^3}, \quad -\pi \leq u \leq \pi,$$

je

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(\sin nu + \sin nv + \sin nw - \sin(n(u+v+w))\right) =$$
$$= \frac{1}{48}(u^3 + v^3 + w^3 - (u+v+w)^3).$$

Ker je $-24xyz = u^3+v^3+w^3-(u+v+w)^3$, enakost sledi za $|x|+|y|+|z| \leq \pi$. Za ostale točke z območja $[-\pi, \pi]^3$ je funkcija enaka periodičnemu nadaljevanju $(u^3 + v^3 + w^3 - (u+v+w)^3)/48$.

## Fourierova transformacija

2.1 Za izhodišče vzamemo naslednjo Fourierovo formulo, ki velja za dovolj lepe funkcije:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} \, dz \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivz} \, dv.$$

S premeščanjem konstante in substitucijama $z \to -z$ in $z \to 2\pi z$ dobimo inverzne formule

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}_{hla}^{-1} f\right)(z) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} f(t) e^{-izt} \, dt, \\
\left(\mathcal{F}_{suh}^{-1} f\right)(z) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} f(t) e^{izt} \, dt, \\
\left(\mathcal{F}_{zak}^{-1} f\right)(z) &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t) e^{-2\pi izt} \, dt.
\end{aligned}$$

Opazimo, da je $\mathcal{F}_{zak}$ izometrija.

2.2 Če je $f$ soda, potem je $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} \, dt =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-s) e^{-isx} \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-isx} \, ds = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(x)$, torej je tudi $\mathcal{F}(f)$ soda. Pri drugem enačaju smo napravili substitucijo $s = -t$. Če je $f$ liha, potem pri tretjem enačaju pridelamo minus, torej je tudi $\mathcal{F}(f)$ liha.

2.3 Obe trditvi sta ekvivalentni trditvi

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(tx)\; dt.$$

2.4 Ker velja Fourierova formula (glej rešitev naloge 2.1), dobimo zvezo iz točke $(a)$ tako, da v integralu štejemo minus k spremenljivki $v$ :

$$\mathcal{F}^2(f)(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-v)z}\; dz \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}\; dt = f(-v).$$

Točki $(b)$ in $(c)$ sta direktni posledici točke $(a)$.

2.5

$$\mathcal{F}(f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin cx}{x}, \quad \mathcal{F}(g)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c}{c^2 + x^2}.$$

2.6 S pomočjo inverzne formule in prejšnje naloge, dobimo

$$\mathcal{F}(h)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-c|x|}}{c}.$$

Pri nalogi (b) je problem v tem, da funkcija $k$ ne pripada $L^1$, zato ni v definicijskem območju Fourierove transformacije. Kasneje bomo spoznali, da lahko Fourierovo transformacijo razširimo na $L^2$ in da velja

$$\mathcal{F}(k)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{[-c,c]}(x).$$

2.7

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{x}\right)^2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \mathcal{F}(g)(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}.$$

2.8

$$\mathcal{F}(f(t)\cos at)(x) = \frac{\mathcal{F}(f)(x-a) + \mathcal{F}(f)(x+a)}{2},$$

$$\mathcal{F}(f(t)\sin at)(x) = \frac{\mathcal{F}(f)(x-a) - \mathcal{F}(f)(x+a)}{2i}.$$

2.9

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a^2+(x+b)^2}+\frac{1}{a^2+(x-b)^2}\right),$$
$$\mathcal{F}\left(g\right)\left(x\right) = \frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a^2+(x+b)^2}-\frac{1}{a^2+(x-b)^2}\right).$$

2.10 Razcepimo $\cos 2t \sin 3t = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t)$ in dvakrat uporabimo prejšnjo nalogo.

2.11 Opazimo, da je

$$\frac{\sin bt}{t} = \int_0^b \cos ct \; dc$$

in z zamenjavo vrstnega reda integriranja dobimo

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right) = \int_0^b \mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\cos ct\right)(x)\; dc = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x-b}{a}\right).$$

2.12

$$\mathcal{F}_c\left(f\right)\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin cx}{x}, \quad \mathcal{F}_c\left(g\right)\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{c}{c^2+x^2}.$$

2.13 Z upoštevanjem

$$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t} = \int_a^b -e^{-ct}\; dc$$

in zamenjavo vrstnega reda integriranja, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c(f(t))(x) &= -\int_a^b \mathcal{F}_c(e^{-ct})(x)\; dc \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^b \frac{c}{c^2+x^2}\; dc \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\log(c^2+x^2)\right]_{c=a}^{c=b} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\log\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right).
\end{aligned}$$

2.14 Trditev direktno sledi iz naslednjih dejstev: Fourierova transformiranka sode funkcije je enaka kosinusni transformiranki njene zožitve na $[0,\infty)$, Fourierova transformiranka lihe funkcije je enaka sinusni transformiranki njene zožitve na $[0,\infty)$, pomnožene z $i$ in $\mathcal{F}\left(f(-t)\right)(x) = \mathcal{F}\left(f(t)\right)(-x)$.

2.15 Naj bo $g(x,t) = f(t)(\sin tx)/x$. Velja ocena

$$\int_1^r \left(\int_0^\infty |g(x,t)|\ dt\right) dx \leq \ln r\ \|f\|_1.$$

Po Fubinijevem izreku je

$$\int_1^r \left(\int_0^\infty g(x,t)\ dt\right)\ dx = \int_0^\infty \left(\int_1^r g(x,t)\ dx\right)\ dt.$$

Ko izračunamo levo in desno stran, dobimo

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_1^r \frac{F(x)}{x}\ dx = \int_0^\infty f(t)h(r,t)\ dt.$$

kjer je $h(r,t) = \int_1^r \frac{\sin tx}{x}\ dx$. Za vsak $r \geq 1$ in $t > 0$ velja ocena

$$|h(r,t)| \leq \max_k \left| \int_t^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\ dx \right| \leq \pi,$$

kar vidimo tako, da funkciji $h(r,t)$ pri fiksnem $t$ določimo lokalne ekstreme in upoštevamo, je pri $r = 1$ in $r \to \infty$ enaka 0. Iz te ocene in Lebesgueovega izreka o dominirani konvergenci sledi

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x}\ dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \lim_{r\to\infty} h(t,r)\ dt$$

in obstoj integrala na desni.

2.16 Limita

$$\lim_{r\to\infty} \int_e^r \frac{1}{x\ln x}\ dx = \lim_{r\to\infty} \ln(\ln r)$$

ni končna (glej nalogo 2.15).

2.17 Kot pri sinusni transformiranki za vsak $r \geq 1$ dokažemo

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_1^r \frac{F(x)}{x}\ dx = \int_0^\infty f(t)h(r,t)\ dt,$$

kjer je $h(r,t) = \int_1^r \frac{\cos tx}{x}\, dx$. Podobno kot pri sinusni transformaciji dokažemo, da za vsak $r \geq 1$ in $t > 0$ velja ocena

$$|h(r,t)| \leq \max_k \left| \int_t^{(k-\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos x}{x}\, dx \right| \leq \ln \frac{3\pi}{2} - \ln \min(t, \frac{\pi}{2}).$$

Odtod in iz $\varepsilon$-predpostavke sledi

$$|f(t)h(r,t)| \leq |f(t) \ln t| \chi_{[0,\varepsilon]}(t) + C(\varepsilon) f(t) \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci je

$$\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{F(x)}{x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \lim_{r\to\infty} h(t,r)\, dt$$

in integral na desni obstaja.

2.18 $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$.

2.19 Z integracijo per partes dobimo

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(f'\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-ixt}\, dt =$$

$$\left[f(t)e^{-itx}\right]_{t=-\infty}^{t=\infty} + ix \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt}\, dt = i\sqrt{2\pi} x \mathcal{F}(f)(x).$$

Zakaj je izintegrirani del enak nič?

2.20 Dvakrat uporabimo nalogo 2.19.

2.21 Po definiciji odvoda je

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(x)' &= \sqrt{2\pi} \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ith}-1}{h} f(t) e^{-ixt}\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \lim_{h\to 0} \frac{e^{-ith}-1}{h} \right) f(t) e^{-ixt}\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) e^{-ixt}\, dt = i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(x).
\end{aligned}$$

Zakaj smemo zamenjati vrstni red integriranja in limitiranja?

2.22 Dvakrat uporabi nalogo 2.21.

2.23 Ker $f' \in L^1$, je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathcal{F}\left(f'\right)(x) = 0,$$

torej je tudi

$$\lim_{x\to\pm\infty} ix\mathcal{F}(f)(x) = 0.$$

2.24 Če dvakrat uporabimo prejšnjo nalogo, dobimo $\mathcal{F}(f)(x) = o(\frac{1}{x^2})$, ko $x \to \pm\infty$. Odtod sledi $\mathcal{F}f \in L^1$. Iz Dinijevega izreka sedaj sledi, da za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja formula

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathcal{F}(f)(x) e^{itx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(x) e^{itx}\, dx.$$

2.25 Za Fourierovo transformiranko dobimo diferencialno enačbo

$$\mathcal{F}(f)(x)' = -i\mathcal{F}(tf(t))(x) = -\frac{x}{2a}\mathcal{F}(f)(x)$$

(integracija per partes) in začetni pogoj $\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ (substitucija). Rešitev je

$$\mathcal{F}\left(e^{-at^2}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo kompleksne integracije. Naj bo

$$\mathcal{F}_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} e^{-itx}\, dt.$$

Zapišimo eksponent integranda malo drugače:

$$-at^2 + itx = -a\left(t + \frac{ix}{2a}\right)^2 - \frac{x^2}{4a}.$$

Zgornji integral je enak

$$\mathcal{F}_R(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2}\, dt.$$

Uvedimo substitucijo
$$u = t + \frac{ix}{2a}$$
v zgornji integral:
$$\int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+\frac{ix}{2a}\right)^2} dt = \int_{-R+\frac{ix}{2a}}^{R+\frac{ix}{2a}} e^{-au^2}\ du.$$
Zanima nas limita tega integrala, ko gre $R \to \infty$. Če bi bile meje $\pm R$, bi integral zlahka izračunali, saj je
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\ du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$
Vemo, da je integral funkcije $e^{-au^2}$ po robu pravokotnika $[-R, R] \times [0, \frac{ix}{2a}]$ enak 0. Če dokažemo, da gresta integrala po navpičnih stranicah pravokotnika proti 0, bo
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R+\frac{ix}{2a}}^{R+\frac{ix}{2a}} e^{-au^2}\ du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\ du.$$
Oglejmo si integral na daljici med $-R$ in $-R + \frac{ix}{2a}$. Velja ocena
$$|e^{-au^2}| \leq e^{-a(R^2-\frac{y^2}{4a})}$$
za vsak $y \in [0, \frac{x}{2a}]$. Zato je
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-R}^{-R+\frac{ix}{2a}} e^{-au^2}\ du = 0.$$
Podobno je na drugi navpični stranici. Zato je
$$\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

2.26 Upoštevamo, da je $\cos bt = \mathrm{Re}(e^{ibt})$ in dobimo
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2a}}\left(e^{-(x+b)^2/4a} + e^{-(x-b)^2/4a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-(x^2+b^2)/4a} \operatorname{ch} \frac{xb}{2a}, \\
\mathcal{F}(g)(x) &= \int_0^b \mathcal{F}(f)(x)\ db = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{b-x}{2\sqrt{a}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{b-x}{2\sqrt{a}}\right)\right),
\end{aligned}$$

kjer je $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

2.27 Dvakrat per partes.

2.28

$$\mathcal{F}_{hla}(f * g) = \mathcal{F}_{hla}(f)\ \mathcal{F}_{hla}(g).$$
$$\mathcal{F}_{suh}(f * g) = \mathcal{F}_{suh}(f)\ \mathcal{F}_{suh}(g).$$
$$\mathcal{F}_{zak}(f * g) = \mathcal{F}_{zak}(f)\ \mathcal{F}_{zak}(g).$$

2.29

$$\begin{aligned}
(f_1 * g_1)(x) &= \max(0, \min(b + x, a) + \min(b - x, a)),\\
(f_2 * g_2)(x) &= \frac{2}{a^2 - b^2}\left(ae^{-b|x|} - be^{-a|x|}\right),\\
(f_3 * g_3)(x) &= \frac{\pi}{x}\sin(x \min(a, b)),\\
(f_4 * g_4)(x) &= \frac{\pi(a + b)}{ab(x^2 + (a + b)^2)}.
\end{aligned}$$

Prvi dve dobimo z direktnim računom, drugi dve pa z izrekom o konvoluciji.

2.30 Uporabimo inverzno transformacijo in izrek o konvoluciji.

2.31 Ker je $f$ soda funkcija, se njena transformiranka in inverzna transformiranka ujemata. Če v prejšnjo nalogo vstavimo $F(t) = \frac{\sin at}{t}$ in $G(t) = \frac{\sin bt}{t}$, dobimo $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-a,a]}\right) * \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-b,b]}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\max(0, \min(b + x, a) + \min(b - x, a))$.

2.32 Če obe strani pomnožimo z $\frac{e^{-ixy}}{\sqrt{2\pi}}$, integriramo od $-\infty$ do $\infty$ in da desni upoštevamo izrek o konvoluciji, dobimo

$$\mathcal{F}(f)(y) = \lambda\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1 + y^2}\right)\mathcal{F}(f)(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{4 + y^2}.$$

Odtod izračunamo

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{4(1 + y^2)}{\sqrt{2\pi}(4 + y^2)(1 + y^2 - 2\lambda)}.$$

Če je $\lambda \geq \frac{1}{2}$, enačba ni rešljiva. Če je $\lambda = -\frac{3}{2}$, dobimo

$$f(x) = -\frac{1}{8}e^{-2|t|}(6|t| - 5).$$

V ostalih primerih dobimo

$$f(x) = \frac{-3}{a^2 - 4}e^{-2|x|} + \frac{2(a^2 - 1)}{a(a^2 - 4)}e^{-a|x|},$$

kjer je $a = \sqrt{1 - 2\lambda}$.

2.33 Formula sledi iz inverzne formule, Jordanove leme in leme o delu residuuma. Za $t > 0$ integriramo po robu polkrogov v zgornji polravnini z radijem $r$, tako da na robu ni nobenega pola z neničelnim imaginarnim delom. Morebitne realne ničle obkrožimo z majhnimi $\varepsilon$-polkrogci in uporabimo lemo o delu residuuma.

2.34

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2a}e^{-a|x|}.$$

2.35

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{4a^3}(1 + a|x|)e^{-a|x|},$$
$$\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = -\frac{i}{4a}xe^{-a|x|}.$$

2.36

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{16a^5}(3 + 3a|x| + a^2x^2)e^{-a|x|},$$
$$\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = -\frac{i}{16a^3}x(1 + a|x|)e^{-a|x|}.$$

2.37 Ker so poli enostavni, lahko uporabimo dejstvo, da je

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(t)}{g(t)}, \alpha\right) = \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)},$$

če je $\alpha$ enostavna ničla $g$ in $f$ holomorfna na okolici $\alpha$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{8a^3}(\cos ax + \operatorname{sign} x \sin ax)e^{-a|x|}, \\
\mathcal{F}(g)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{i}{4a^2}\sin ax \; e^{-a|x|}, \\
\mathcal{F}(h)(x) &= \mathcal{F}^{-1}(h)(x) = -\frac{1}{4a}(\cos ax + \operatorname{sign} x \sin ax)e^{-a|x|}, \\
\mathcal{F}^{-1}(k)(x) &= \frac{i}{2}\operatorname{sign} x \cos ax \; e^{-a|x|}, \quad k \notin L^1.
\end{aligned}$$

2.38 Ker funkciji nista sodi, se transformiranki razlikujeta od inverznih transformirank.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-ix/2}e^{-\sqrt{3}|x|/2}, \\
\mathcal{F}(g)(x) &= \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-ix/2}(2+\sqrt{3}|x|)e^{-\sqrt{3}|x|/2}, \\
\mathcal{F}^{-1}(f)(x) &= \mathcal{F}(f)(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{ix/2}e^{-\sqrt{3}|x|/2}, \\
\mathcal{F}^{-1}(g)(x) &= \mathcal{F}(g)(-x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{ix/2}(2+\sqrt{3}|x|)e^{-\sqrt{3}|x|/2}.
\end{aligned}$$

2.39 $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cos(a(k+\frac{1}{2})\pi)e^{-\pi(k+\frac{1}{2})|x|}$.

2.40 Zaradi sodosti sta transformiranka in inverzna transformiranka enaki:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{4\pi}((2|x|+1)\sin a - 2a\cos a)e^{-|x|} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-1}\sin ak \; e^{-k|x|}.$$

2.41 Najprej v integral

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t/\beta+itx}\,dt$$

uvedemo substitucijo $t/\beta = u$ in potem še $u(1+i\beta x) = v$. Integriramo po poltraku $P = \mathbb{R}_+(1+i\beta x)$ :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\alpha)(1+i\beta x)^{-\alpha}}\int_P v^{\alpha-1}e^{-v}\,dv.$$

Naj bo $\gamma$ polarni kot, ki pripada $1+i\beta x$. Ta kot je na $(-\pi/2, \pi/2)$ zato je kosinus na tem intervalu navzdol omejen s $c>0$. Integral po delu krožnice z radijem $R$ med kotoma 0 in $\varphi$ zato lahko ocenimo z

$$\left|\int_0^\gamma (Re^{i\varphi})^{\alpha-1} e^{-Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi}\ d\varphi\right| \leq R^\alpha e^{-Rc}|\gamma|.$$

To gre proti 0 ko gre $R$ v neskončnost, zato je

$$\int_0^\infty v^{\alpha-1}e^{-v}\ dv = \int_P v^{\alpha-1}e^{-v}\ dv = \Gamma(\alpha).$$

Rezultat je

$$\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+i\beta x)^{-\alpha}.$$

2.42 Transformiranka funkcije $f$ je realni del integrala

$$I = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-at}e^{itx}\ dx,$$

Za izračun transformiranke si pomagamo s kompleksno integracijo po robu krožnega izseka (podobno, kot v nalogi 2.41) in dobimo

$$I = \frac{1}{\sqrt{a-ix}}.$$

Realni del je

$$\mathcal{F}_c\left(f\right)\left(x\right) = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Funkcija $g$ ni ne v $L^1$ ne v $L^2$, zato nima transformiranke v običajnem smislu. Ker pa je lokalno v $L^1$ (vsaka točka ima okolico, na kateri je funkcija v $L^1$), ima transformiranko v smislu distribucij, ki je enaka

$$\mathcal{F}_c\left(g\right)\left(x\right) = \lim_{a\to 0}\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2.43 Funkcija $f(t) = \frac{1}{1+|t|}$ je v $L^2$ ne pa v $L^1$. Funkcija $g(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}$ je v $L^1$, ne pa pa v $L^2$.

2.44 Da je funkcija v $L^2$, je očitno, saj ima v 0 končno limito. Ploščino $k$-tega hribčka lahko ocenimo navzdol z $2(\pi(k+1))^{-1}$, torej funkcija ni v $L^1$. Transformiranka je

$$\mathcal{F}_2\left(f\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\chi_{[-c,c]}(x).$$

2.45 S pomočjo Parsevalove identitete dobimo $I = \pi c$.

2.46 Za dokaz identitete je potrebno le zamenjati vrstni red integracije. Operator $\mathcal{F}_2$ ni hermitski. Integrala nista skalarna produkta, ker manjka konjugiranje.

2.47 Uporabimo prejšnjo nalogo in upoštevamo, da je $\mathcal{F}_2^2(f)(x) = f(-x)$.

2.48 S pomočjo prejšnje naloge dobimo $I = \frac{\pi}{a^2}(1 - e^{-ac})$.

2.49 Po definiciji je

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_2^* f, g\rangle &= \langle f, \mathcal{F}_2 g\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\mathcal{F}\left(g(x)\right)(t)}\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}_2\left(\overline{g}(-x)\right)(t)\ dt. \end{aligned}$$

Iz naloge 2.46 sledi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}_2\left(\overline{g}(-x)\right)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2\left(f(x)\right)(t)\overline{g}(-t)\ dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2\left(f\right)(-t)\overline{g}(t)\ dt \\ &= \langle \mathcal{F}_2\left(f\right)(-t), g\rangle. \end{aligned}$$

Ker za funkcje, za katere so $f, f'$ in $f''$ v $L^2$, velja Fourierova inverzna formula, je

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} f(y)\ dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} f(-y)\ dy = \mathcal{F}_2^* f. \end{aligned}$$

Zadnji dve enakosti sledita iz naloge 2.4.

2.50 Po (fizikalni) definiciji je

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

torej je

$$f_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Rodovna funkcija za Hermitove polinome, pomnožena z $e^{-x^2/2}$ je

$$e^{-x^2/2+2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

njena Fourierova transformiranka pa

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-x^2/2+2xt-t^2}\right)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} e^{-x^2/2+2xt-t^2}\, dx \\
&= e^{-y^2/2-2yit+t^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-y^2/2} H_n(y) \frac{(-it)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{f_n(y)} \frac{(-it)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Fourierova transformiranka desne strani je

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}\left(e^{-x^2/2} H_n(x)\right) \frac{t^n}{n!}.$$

Ker se členi pri potencah $t^n$ ujemajo, je

$$\mathcal{F}(f_n)(y) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2/2} H_n(x)\right)(y) = e^{-y^2/2} H_n(y) \frac{(-i)^n}{n!} = \frac{(-i)^n}{n!} f_n(y).$$

2.51 Iz Cauchy-Schwartzove neenakosti in Jensenove neenakosti sledi

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|\, dt\right)^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|^2\, dt = \\
&= \|f\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|^2\, dt.
\end{aligned}$$

Če integriramo obe strani od $-\infty$ do $\infty$ in na desni zamenjamo vrstni red integriranja po $x$ in po $t$ (Fubini), dobimo željeno oceno.

2.52 Če $f \in L^1$ in $g \in L^1 \cap L^2$, potem velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$ in $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g_2\| < \infty$. Torej je $f * g \in L^1$. V tem primeru gornja formula sledi iz izreka o konvoluciji. Formula sedaj sledi iz dejstva, da je $L^1 \cap L^2$ gosta v $L^2$ in da sta leva in desna stran zvezni v $g$ (Plancherel).

2.53 Ker je $\mathcal{F}(f)(x)$ zvezna, je integral

$$\int_{-1}^{1} |\mathcal{F}(f)(x)| \ dx$$

končen. Ker je

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\mathcal{F}(f')(x)}{ix},$$

lahko ocenimo

$$\left(\int_{1}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(x)| \ dx\right)^2 \leq \int_{1}^{\infty} \frac{1}{|x|} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f'(t) \ \ dt \right| \ dx \leq$$
$$\leq \int_{1}^{\infty} \frac{1}{|x|^2} \ dx \int_{1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f'(t) \ dt \right|^2 \ dx \leq |\mathcal{F}\left(f'\right)(x)|_2^2.$$

Na intervalu $(-\infty, -1]$ naredimo enako oceno.

2.54 Ker je kosinusna (sinusna) transformacija $f$ enaka Fourierovi transformaciji sodega (lihega) nadaljevanja $f$ na $(-\infty, 0]$, je prva trditev očitna. Iz istega razloga obstajata razširitvi na $L^2$, za kateri velja Plancherelov izrek.

2.55 Inverzna preslikava je

$$\Psi(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f(x) + f(-x), f(x) - f(-x)).$$

Norma je

$$\|\Psi(f)(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} 2f(x)^2 + 2f(-x)^2 \ dx = \|f\|_2^2.$$

2.56. Ker je $\mathcal{F}(f(t))(-x) = \mathcal{F}(f(-t))(x)$, je

$$\Phi(\mathcal{F}(f)(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{F}(f)(x) + \mathcal{F}(f)(-x)\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{F}(f)(x) - \mathcal{F}(f)(-x)\right)\right)$$

in

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{c,2} \oplus i\mathcal{F}_{s,2}(\Psi(f))(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{c,2}(f(t)+f(-t))(x), \frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{s,2}(f(t)-f(-t))(x)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{2}(f(t)+f(-t))(x), \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_{2}(f(t)-f(-t))(x)\right).
\end{aligned}$$

2.57 Ker je $\mathcal{F}_{c,2}(f)(x) = \mathcal{F}_2(f)(x)$ za sode funkcije, lahko privzamemo, da je $f$ soda na $\mathbb{R}$. Ker velja zveza $\mathcal{F}^2(h)(x) = h(-x)$ za poljubno funkcijo $h$, je za sodo $f$

$$\mathcal{F}_{c,2}^2(f)(x) = \mathcal{F}_2^2(f)(x) = f(-x) = f(x).$$

Podobno je za lihe funkcije. Drugi del je očitna posledica prve zveze.

# Literatura


### Zbirke nalog

[1] Thomas William Körner, *Exercises in Fourier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Pavlina Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja*, 3. del, 2. izdaja, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1991.

[3] Murray R. Spiegel, *Fourier analysis with applications to boundary value problems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1974.

[4] Momčilo Ušćumlić, Pavle Miličić, *Zbirka zadataka iz više matematike, 2. dio*, 4. izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

### Teorija z nalogami in/ali primeri

[5] Vladimir Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer, 2004.

[6] Lawrence Evans, *Partial differential equations*, AMS, Providence, 1998.

[7] Gerald Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton university Press, Princeton -New Jersey, 1995.

[8] Fritz John, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1991.

[9] Milan Hladnik, *Povabilo v harmonično analizo*, DMFA, Ljubljana, 1992.

[10] Andrej Nikolaevič Kolmogorov, Sergej Vasil'evič Fomin, *Elementi teoriji funkcij i funkcionalnogo analiza*, izdanije šestoje, Nauka, Moskva, 1989. (Angleški prevod ne vsebuje poglavja o diferencialnem računu v normiranih prostorih).

[11] France Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DMFA, Ljubljana, 1974.

[12] France Križanič, *Navadne in parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.

[13] France Križanič, *Parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 2004.

[14] David Logan, *Applied differential equations* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest 2004

[15] Alois Kufner, Jan Kadlec, *Fourier series*, English Translation, Iliffe Books, London, 1971.

[16] Mihail Alekseevič Lavrent'ev, Boris Vladimirovič Šabat, *Metodi teorii funkciji kompleksnogo peremenogo*, Nauka, Moskva, 1987.

[17] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein, *An introduction to partial diffferential equations* Cambridge university press, 2007.

[18] Ian N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1951.

[19] Anton Suhadolc, *Integralske transformacije in integralske enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.

[20] Anton Suhadolc, *Robni problemi za linearne diferencialne enačbe drugeg reda*, DMFA, Ljubljana, 1993.

[21] Anton Suhadolc, *Navadne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana 1996.

[22] Nico M. Temme, *An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1996.

[23] Egon Zakrajšek, *Analiza 3*, DMFA, Ljubljana, 2000.

[24] Egon Zakrajšek, *Analiza 4*, skripta.

[25] Wolfgang Walter, *Einführung in die Theorie der Distributionen*, BI Wissenschaftsverlag, 1974.