2. izpit iz Fizike 1 za kemijske inženirje, 13.3.2014 - rešitve

1. Označimo z $l = 10$ m vodoravno razdaljo ter z $\Delta h = 3$ m višinsko razliko med balkonom in oknom. Čas leta kepe dobimo iz enačb enakomernega gibanja:

$$t = \frac{l}{v}\,, \tag{1}$$

ki ga vstavimo v izraz za pot v navpični smeri:

$$-\Delta h = -\frac{gt^2}{2} = -\frac{gl^2}{2v^2} \Rightarrow v = l\sqrt{\frac{g}{2\Delta h}} = 12.79 \text{ m/s} \tag{2}$$

Pri odgovoru na (b) upoštevamo, da se spremeni le navpična komponenta hitrosti. Osnovne enačba prostega pada pove, da je velikost navpične komponente

$$v_y = \sqrt{2g\Delta h} \tag{3}$$

in potemtakem dobimo za končno hitrost v'

$$v' = \sqrt{v^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{gl^2}{2\Delta h} + 2g\Delta h} = 14.91 \text{ m/s}\,. \tag{4}$$

Kot med vodoravnico in vektorjem hitrosti ϕ je izražen s komponentama hitrosti kot

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v} = \frac{2\Delta h}{l} \Rightarrow \phi = 30.96^\circ\,. \tag{5}$$

Za odgovor (c) imamo $v_0 = 15$ m/s in ustrezno razstavimo začetno hitrost $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ in $v_{0y} = v_0\sin\alpha$. Čas izrazimo podobno kot pri (a):

$$t = \frac{l}{v_0\cos\alpha}\,. \tag{6}$$

Tega zdaj vstavimo v enačbo, ki zahteva, da se v tem času kepa spusti za Δh. Pridelamo kvadratno enačbo za $\tan\alpha$:

$$-\Delta h = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \tag{7}$$

$$-\Delta h = v_0 \sin\alpha\, \frac{l}{v_0\cos\alpha} - \frac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \tag{8}$$

$$-\Delta h = l\tan\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)\,, \tag{9}$$

kjer smo upoštevali zvezo $1/\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$. Enačbo preuredimo v standardno obliko

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gl}\tan\alpha + \left(1 - \frac{2v_0^2\Delta h}{gl^2}\right) = 0\,, \tag{10}$$

in poiščemo obe rešitvi:

$$\tan\alpha_{1,2} = \frac{v_0^2}{gl}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left[\frac{gl}{v_0^2}\right]^2\left(1 - \frac{2\Delta h v_0^2}{gl^2}\right)}\right) \tag{11}$$

$$= \begin{cases} 4.668 \\ -0.0806 \end{cases} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \begin{cases} 77.9^\circ \\ -4.6^\circ \end{cases} \tag{13}$$

2. Označimo z M maso palice, m maso kepe, v začetno hitrost kepe, l dolžino palice, $J = Ml^2/12$ vztrajnostni moment za vrtenje palice okoli težišča. Ob trku se ohranja vrtilna količina glede na os vrtenja palice, torej je odgovor (a)

$$mvl/2 = (m(l/2)^2 + J)\omega \tag{14}$$

$$\omega = \frac{mvl}{ml^2/2 + Ml^2/6} = \frac{2v}{l}\,\frac{m}{m + M/3} = 5\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{15}$$

(b): Označimo obodno hitrost v najvišji legi z $v_\uparrow = \omega_\uparrow l/2$ (podobno v najnižji legi). Pri vrtenju kepe in palice se vsota potencialne in kinetične energije ohranja. Potencialna energija palice se ne spreminja, medtem ko je njen prispevek zaradi kepe v zgornji legi

$$W_{p\uparrow} = mgl/2 \tag{16}$$

Ohranitev energije med začetno točko vrtenja in najvišjo lego:

$$\frac{1}{2}\left(m(l/2)^2 + J\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m(l/2)^2 + J\right)\omega_\uparrow^2 + mgl/2\,. \tag{17}$$

Podobna enačba z minusom pred zadnjim členom velja za najnižjo lego. Tako dobimo

$$\omega_\uparrow^2 = \omega^2 - \frac{mgl}{m(l/2)^2 + J}\,, \tag{18}$$

$$\omega_\uparrow^2 = \omega^2 + \frac{mgl}{m(l/2)^2 + J}\,. \tag{19}$$

Numerično to ustreza $v_\downarrow = 1.29$ m/s v najnižji legi, v najvišji legi pa dobimo za $\omega_\uparrow^2$ negativno vrednost, kar pomeni, da sistem nima dovolj energije, da kepa dosegla najvišjo točko. Za odgovor (c) uporabimo formulo za krožno frekvenco fizičnega nihala:

$$\omega^2 = \frac{(m+M)gl_T}{m(l/2)^2 + J}\,, \tag{20}$$

kjer je l_T razdalja od osi do skupnega težišča palice in kepe. Opazimo, da je težišče palice v osi, zato lahko števec zapišemo kot $mgl/2$. Tedaj imamo

$$\omega^2 = \frac{mgl}{ml^2/2 + Ml^2/6} = \frac{g}{l}\,\frac{m}{m/2 + M/6}\,, \tag{21}$$

in za nihajni čas

$$t_0 = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{m/2 + M/6}{m}} = 1.27\ \mathrm{s}\,. \tag{22}$$

3. Vzrok kroženja postaje je centripetalna sila, ki izvira od gravitacijskega privlaka zemlje. Če označimo z m maso postaje, z M maso zemlje, ter s h višino kroženja, potem imamo

$$m\frac{v^2}{R+h} = \frac{GmM}{(R+h)^2} \tag{23}$$

$$m\frac{4\pi^2(R+h)^2}{t_0^2(R+h)} = \frac{GmM}{(R+h)^2} \tag{24}$$

$$4\pi^2(R+h)^3 = GMt_0^2 \tag{25}$$

$$h = \left(\frac{GMt_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R = 35.96\cdot 10^3\ \mathrm{km} \tag{26}$$

Hitrost kroženja je torej

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{t_0} = 3.08 \text{ km/s} . \tag{27}$$

Za drugi del naloge upoštevamo, da se astronavt premika premo enakomerno pospešeno glede na postajo. Od trenutka, ko vklopi potisnike, do trenutka ustavitve glede na postajo astronavt prepotuje razdaljo s, kjer velja

$$v_0^2 = 2as \Rightarrow s = \frac{mv_0^2}{2F} = 9 \text{ m} . \tag{28}$$

Torej je največja razdalja od postaje $s_{\max} = 1009$ m. Do te razdalje astronavt pride v času $t_1 = mv_0/F = 6$ s od začetka ustavljanja. Pot nazaj do postaje ($s_{\max}$) prepotuje v času t_2, kjer je

$$s_{\max} = \frac{at_2^2}{2} = \frac{Ft_2^2}{2m} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2ms_{\max}}{F}} = 63.5 \text{ s} . \tag{29}$$

Torej je celoten čas povratka 69.5 s.

4. Voda v epruveti ima višino h,

$$h = \frac{V}{\pi r^2} . \tag{30}$$

Za moč toplotnega toka preko stene s površino S in debelino d imamo

$$P = \frac{\lambda S}{d}\Delta T . \tag{31}$$

V zgornjo enačbo vstavimo $\Delta T = 18$ K, $S = 2\pi rh = 2V/r$, ter za moč $P = mq_t/t = \rho V q_t/t$:

$$\rho V q_t/t = \frac{2\lambda V}{rd}\Delta T \tag{32}$$

$$\rho q_t = t\frac{2\lambda \Delta T}{rd} \tag{33}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2\lambda \Delta T t}{\rho q_t r} = 0.29 \text{ mm} . \tag{34}$$