# Rešitve 1. kolokvija iz Fizike 1 za kemijske inženirje 2013/2014

1. V nalogi je podano, da se hitrost pri teku spreminja po obrazcu

$$v(t) = (v_0 + a_0 t)\, e^{-t/t_0}. \tag{1}$$

(a) Čas, ko je hitrost največja, označimo s $t_a$, hitrost ob tem času pa $v_{max} := v(t_a)$. Pogoj za lokalni maksimum hitrosti je, da je časovni odvod hitrosti tam enak 0. Ob upoštevanju pravil za odvajanje dobimo za časovni odvod hitrosti

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\Big((v_0 + a_0 t)\, e^{-t/t_0}\Big), \tag{2}$$

$$= a_0\, e^{-t/t_0} + (v_0 + a_0 t)\, e^{-t/t_0}\,\Big(-\frac{1}{t_0}\Big), \tag{3}$$

$$= \Big(a_0 - \frac{v_0 + a_0 t}{t_0}\Big)\, e^{-t/t_0}. \tag{4}$$

Pogoj za lokalni maksimu se nato napiše kot

$$0 = \frac{dv}{dt}(t_a) = \Big(a_0 - \frac{v_0 + a_0 t_a}{t_0}\Big)\, e^{-t_a/t_0}. \tag{5}$$

Ker so vrednosti eksponentne funkcije vedno pozitivne, bo izraz na desni enak nič le v primeru, ko bo prvi faktor enak 0:

$$0 = \Big(a_0 - \frac{v_0 + a_0 t_a}{t_0}\Big), \tag{6}$$

$$t_a = t_0 - \frac{v_0}{a_0} = 3\,\mathrm{s}. \tag{7}$$

Takrat je vrednost hitrosti enaka

$$v_{max} = v(t_a) = (v_0 + a_0 t_a)\, e^{-t_a/t_0} = 5{,}67\,\mathrm{m/s}. \tag{8}$$

Smiselnost vrednosti $t_a$ in $v_{max}$ je možno preveriti tudi na grafu, ki je priložen besedilu naloge. Iz grafa tudi vidimo, da gre tam res za maksimum, kar bi računsko sicer morali preverjati z drugim odvodom.

(b) Zanima nas prepotovana pot po času $t_b = 15\,\mathrm{s}$.

Prepotovana pot se izračuna kot integral velikosti hitrosti. Iz grafa $v(t)$, ki je priložen navodilom naloge, ugotovimo, da je hitrost ves čas pozitivna, torej $|v(t)| = v(t)$. Ob upoštevanju pravil integriranja in obrazcev za nedoločena integrala iz namiga pri nalogi, dobimo

$$s(t_b) = \int_0^{t_b} v(t)\, dt, \tag{9}$$

$$s(t_b) = \int_0^{t_b} (v_0 + a_0 t)\, e^{-t/t_0}\, dt, \tag{10}$$

$$s(t_b) = v_0 \int_0^{t_b} e^{-t/t_0}\, dt \;+ a_0 \int_0^{t_b} t\, e^{-t/t_0}\, dt, \tag{11}$$

$$s(t_b) = \Big(-v_0 t_0 e^{-t/t_0}\Big)\Big|_{t=0}^{t=t_b} + \Big(\big(-a_0 t_0 t - a_0 t_0^2\big)\, e^{-t/t_0}\Big)\Big|_{t=0}^{t=t_b}, \tag{12}$$

$$s(t_b) = v_0 t_0 (1 - e^{-t_b/t_0}) - a_0 t_0 (t_0 + t_b)\, e^{-t_b/t_0} + a_0 t_0^2 = 54{,}4\,\mathrm{m}. \tag{13}$$

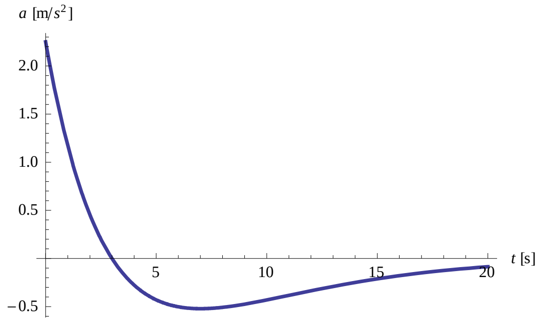
(c) Pospešek je po definiciji enak časovnemu odvodu hitrosti, ki smo ga določili v enačbi (4):

$$a(t) = \left(a_0 - \frac{v_0 + a_0 t}{t_0}\right) e^{-t/t_0}. \tag{14}$$

V območju, kjer je pospešek pozitiven in se bo nahajal maksimum, je pospešek padajoča funkcija časa, saj se vrednosti obeh faktorjev s časom zmanjšujeta. Največji pospešek, kar ustreza največjemu naklonu krivulje na grafu $v(t)$), se najaha ob času $t_c = 0$, takrat pa je vrednost pospeška enaka

$$a_{max} = a(t_c) = a(0) = a_0 - \frac{v_0}{t_0} = 2{,}25\,\mathrm{m/s^2}. \tag{15}$$

Pozor: s pogojem $da/dt = 0$ bi dobili lokalni minimum pospeška pri $t = 7\,\mathrm{s}$ (glej sliko 1), ki pa nas pri nalogi ne zanima.




Slika 1: Graf pospeška $a(t)$, ki je izračunan v enačbi (14).

2. Maso deskarja na snegu označimo z $m_D$, maso prazne deske na dnu half-pipa z $m_d$, začetno višino deskarja pa s $h$. Dogovorimo se za naslednje: količine na začetku, preden se deskar spusti po half-pipu, bomo označevali z indeksom 1, količine tik pred trkom z 2, količine tik po trku s 3, količine v trenutku, ko se deska nahaja najvišje, pa s 4. Poleg tega se dogovorimo, da se oznaka $D$ v količinah nanaša na deskarja, oznaka $d$ pa na prazno desko.

   (a) Ker trenja med podlago in deskarjem/desko ni, bo sila podlage delovala le pravokotno na gibanje in bo zato delo te sile enako 0. Ker je to edina zunanja sila poleg teže, se mehanska energija ohranja. Pri spustu deskarja $1 \to 2$, se začetna potencialna energija deskarja spremeni v kinetično:

$$m_D g h = m_D v_{D2}^2/2, \tag{16}$$
$$v_{D2} = \sqrt{2gh}. \tag{17}$$

   Hitrost deske v točki 2 je enaka 0: $v_{d2} = 0$. Pri $2 \to 3$ je prišlo do prožnega trka, tako da se ohranita tako skupna gibalna količina v vodoravni smeri kot skupna kinetična energija:

$$m_D v_{D2} = m_D v_{D3} + m_d v_{d3}, \tag{18}$$
$$\tfrac{1}{2} m_D v_{D2}^2 = \tfrac{1}{2} m_D v_{D3}^2 + \tfrac{1}{2} m_d v_{d3}^2. \tag{19}$$

   Če izrazimo $v_{D3}$ iz enačbe (18) in vstavimo v enačbo (19) ter jo rešimo na $v_{d3}$ (oziroma uporabimo splošno rešitev za prožni trk z vaj), dobimo za hitrost deske po trku $v_{d3}$ vrednost

$$v_{d3} = \frac{2m_D}{m_D + m_d} v_{D2} = \frac{2m_D}{m_D + m_d} \sqrt{2gh} = 16{,}7\,\mathrm{m/s}. \tag{20}$$

   (b) Opazovano telo po trku je deska. Pri prehodu $3 \to 4$ se celotna kinetična energija deske iz točke 3 pretvori v potencialno v točki 4 (delo sile podlage je ponovno 0). Če označimo višino, do kamor poleti deska, s $h'$, in upoštevamo $v_{d3}$ iz primera (a), dobimo

$$\tfrac{1}{2} m_d v_{d3}^2 = m_d g h', \tag{21}$$
$$h' = \frac{v_{d3}^2}{2g}, \tag{22}$$

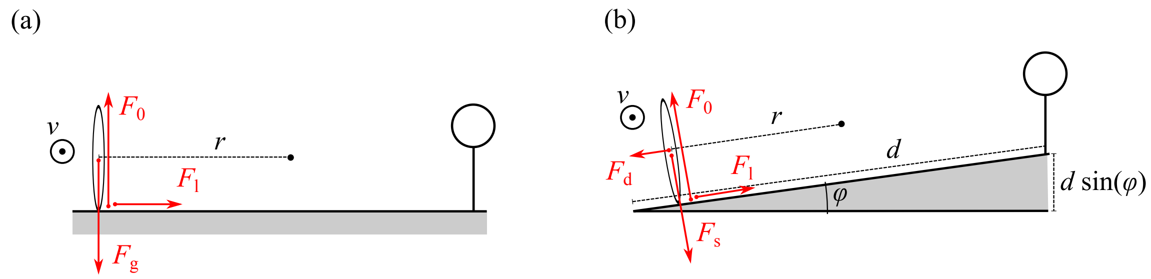
   in zato deska odleti nad half-pipe za

$$\Delta y = h' - h = \frac{v_{d3}^2}{2g} - h = 10{,}2\,\mathrm{m}. \tag{23}$$

3. Neznano začetno hitrost kolesa označimo z $v_0$, (neznano) maso kolesarja z $m$, širino ceste z $d$, koeficient lepenja s $k_l$, kot iz primera (b) pa s $\varphi$.

Na širini ceste moramo zaokrožiti za 180°, zato bo širina ceste enaka dvakratnemu radiju kroženja $r$:

$$r = d/2. \tag{24}$$




Slika 2: Sile na kolesarja ob koncu zavoja (gledano v narisu) v primeru ravne ceste (a) in nagnjene ceste (b).

(a) Na kolesarja med zavijanjem delujejo naslednje sile (gledano v narisu kot kaže slika 2): sila teže $F_g$ navdol, pravokotna sila podlage $F_0$ navzgor, ter sila lepenja $F_l$, ki kaže proti središču kroženja (brez nje zdrsnemo oziroma potujemo naravnost).

V navpični smeri imamo ravnovesje sile teže in pravokotne sile podlage, torej $F_0 = F_g$ oziroma

$$F_0 = mg. \tag{25}$$

V mejnem primeru, ko bo začetna hitrost kolesa največja možna, bo sila lepenja največja možna, zato bo veljala zveza

$$F_l = k_l F_0. \tag{26}$$

Ker telo kroži (z obodno hitrostjo $v_0$ na radiju $r$), mora rezultanta $F_R$ kazati proti središču kroženja, torej mora biti

$$F_R = mv_0^2/r = 2mv_0^2/d. \tag{27}$$

Rezultanta je enaka sili lepenja, ki je v našem primeru edina vodoravna sila in je zato

$$F_R = F_l, \tag{28}$$
$$2mv_0^2/d = k_l mg, \tag{29}$$
$$v_0 = \sqrt{k_l g d/2} = 5{,}6\,\mathrm{m/s} = 20{,}2\,\mathrm{km/h}. \tag{30}$$

(b) Zdaj imamo opravka s kroženjem v ravnini, nagnjeni glede na vodoravno za kot $\varphi$. Upoštevali bomo namig in pogoj za kroženje zapisali v najnižji točki.

Ker kolesar med zavijanjem ne bremza, se mu hitrost do kritične točke za zdrs poveča glede na začetno; začetno hitrost označimo z $v_0$, hitrost v kritični točki pa z $v$. Kinetična energija kolesa se je povečala na račun potencialne, delo sile

lepenja pa je enako 0: lepenje namreč kaže vseskozi pravokotno na smer gibanja (v smeri gibanja bi delovalo trenje, ki pa ga v našem primeru ni).
Če upoštevamo, da je višinska razlika enaka $\Delta h = d \sin\varphi$ (glej sliko 2), dobimo

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgd \sin\varphi = \tfrac{1}{2}mv^2, \tag{31}$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2gd \sin\varphi}. \tag{32}$$

Sile razstavimo v smereh pravokotno in vzporedno s klancem: v pravokotni smeri na klanec se pravokotna sila podlage $F_0$ in statična komponenta sile teže $F_s$ uravnovesita. V vzporedni smeri pa se sila lepenja $F_l$ in dinamična komponenta sile teže $F_d$ odštejeta v rezultanto, ki mora biti zaradi kroženja enaka centripetalni sili. Za sile torej lahko napišemo

$$\perp: \quad F_s = F_0, \tag{33}$$

$$\|: \quad F_l - F_d = F_c. \tag{34}$$

Za komponente teže na klancu s kotom $\varphi$ vemo, da velja

$$F_s = mg\cos\varphi, \tag{35}$$

$$F_d = mg\sin\varphi, \tag{36}$$

obrazec za centripetalno silo pri hitrosti $v$ v kritični točki je

$$F_c = mv^2/r = 2mv^2/d, \tag{37}$$

in sila lepenja je v mejnem primeru (največja možna hitrost) enaka

$$F_l = k_l F_0. \tag{38}$$

Če upoštevamo vse do zdaj povedano, za enačbo v smeri $\|$ dobimo

$$k_l F_0 - mg\sin\varphi = 2mv^2/d, \tag{39}$$

$$mg(k_l\cos\varphi - \sin\varphi) = 2mv^2/d, \tag{40}$$

$$v^2 = gd(k_l\cos\varphi - \sin\varphi)/2. \tag{41}$$

Če upoštevamo izraz za $v^2$ v enačbi (41) in ga vstavimo v enačbo (32) za začetno hitrost $v_0$, dobimo

$$v_0 = \sqrt{gd(k_l\cos\varphi - \sin\varphi)/2 - 2gd \sin\varphi}, \tag{42}$$

$$v_0 = \sqrt{gd(\tfrac{1}{2}k_l\cos\varphi - \tfrac{5}{2}\sin\varphi)} = 3{,}76\,\mathrm{m/s} = 13{,}6\,\mathrm{km/h}. \tag{43}$$

Vidimo tudi, da se izraz v enačbi (43) poenostavi na enačbo (30) iz primera (a), če bi vzeli $\varphi = 0$.
Še utemeljitev namiga iz besedila naloge: trdimo, da se kritična točka za zdrs nahaja na koncu zavoja. Tam je hitrost največja, in mora zato biti centripetalna rezultanta največja. Poleg tega bo v končni točki zavoja dinamična sila $F_d$ najbolj nasprotovala kroženju: dinamična sila $F_d$ ves čas kaže vzporedno s klancem navzdol, a ker se spreminja smer potovanja, se radialna komponenta $F_d$ ves čas spreminja. Na desnem robu ceste ima v začetku kroženja radialna komponenta $F_d$ smer (radialno) navznoter. Pri zavijanju se radialna komponenta $F_d$ zmanjšuje do 0, ko ravno prevozimo četrt kroga in je $F_d$ vzporedna s hitrostjo. Nato pa se radialna komponenta $F_d$ povečuje v smeri radialno navzven in doseže največjo vrednost v končni točki zavoja, ko je enaka celotni sili $F_d$. V zadnji točki zavoja bo morala $F_l$ izničiti torej celotno $F_d$ in zraven še vzdrževati kroženje z največjo hitrostjo, zato bo morala biti $F_l$ takrat večja kot v katerikoli točki kroženja pred tem.

4. Neznano začetno hitrost puščice označimo z $v_0$, kot, pod katerim lokostrelec izstreli puščico navzgor proti vodoravnici, s $\varphi$, začetno (vodoravno) oddaljenost čolna z $d$, hitrost čolna z $v$, višino mostu pa označimo s $h$.

   Puščica se bo gibala v težnostnem polju Zemlje, zato zanjo veljajo enačbe za poševni met. Če si izberemo izhodišče koordinatnega sistema na gladini reke pod mostom, se koordinati puščice $x$ in $y$ spreminjata kot

$$x(t) = v_0 \cos\varphi\, t, \tag{44}$$
$$y(t) = h + v_0 \sin\varphi\, t - gt^2/2. \tag{45}$$

   Tarčo na čolnu bomo zadeli ob neznanem času $t_0$: takrat bo tarča na višini 0 (čoln je na gladini), od mostu pa bo oddaljen $d + vt_0$. Velja torej

$$d + vt_0 = x(t_0) = v_0 \cos\varphi\, t_0, \tag{46}$$
$$0 = y(t_0) = h + v_0 \sin\varphi\, t_0 - gt_0^2/2. \tag{47}$$

   S tem imamo dve enačbi za neznanki $t_0$ in $v_0$.

   Če iz enačbe (46) izrazimo neznan čas $t_0$,

$$t_0 = \frac{d}{v_0 \cos\varphi - v}, \tag{48}$$

   in ga vstavimo v enačbo (47), dobimo kvadratno enačbo za $v_0$:

$$0 = h + \frac{v_0 d \sin\varphi}{v_0 \cos\varphi - v} - \frac{gd^2}{2(v_0\cos\varphi - v)^2}, \tag{49}$$
$$0 = h(v_0\cos\varphi - v)^2 + v_0 d \sin\varphi\,(v_0\cos\varphi - v) - gd^2/2, \tag{50}$$
$$0 = v_0^2\ \cos\varphi\,(h\cos\varphi + d\sin\varphi) - v_0\ v(2h\cos\varphi + d\sin\varphi) + (hv^2 - gd^2/2). \tag{51}$$

   Simbolično sta rešitvi te kvadratne enačbe enaki

$$v_0 = \frac{v(2h\cos\varphi + d\sin\varphi) \pm \sqrt{v^2(2h\cos\varphi + d\sin\varphi)^2 + 4(gd^2/2 - hv^2)\cos\varphi\,(h\cos\varphi + d\sin\varphi)}}{2\cos\varphi\,(h\cos\varphi + d\sin\varphi)}, \tag{52}$$

   oziroma poenostavljeno

$$v_0 = \frac{v(2h/d + \tan\varphi) \pm \sqrt{v^2\tan^2\varphi + 2g(h + d\tan\varphi)}}{2(\cos\varphi\, h/d + \sin\varphi)}. \tag{53}$$

   Fizikalno smiselna rešitev je tista s predznakom + (druga rešitev nam da negativno hitrost), in numerično znaša

$$v_0 = 64{,}5\,\mathrm{m/s} = 232\,\mathrm{km/h}. \tag{54}$$

   Popolnoma legitimno je seveda tudi, da se s simbolnim poenostavljanjem rešitve ne ukvarjamo, ampak numerično izračunamo koeficiente pred različnimi potencami $v_0$ v enačbi (51), ter z nastavkom za rešitev kvadratne enačbe dobimo numerično vrednost direktno.