Rešitve 2. kolokvija iz Fizike 1 za kemijske inženirje 2013/2014

1. Na sistem podlaket-utež delujejo štiri sile: sila v komolcu F_k (kaže navdol), sila mišice bicepsa F_b (kaže navzgor), sila teže podlahti F_g ter sila teže kroglice F'_g. Oddaljenosti prijemališč teh sil od komolca po vrsti označimo z $r_k = 0$, $r_b = 5\,\mathrm{cm}$, $r_g = 15\,\mathrm{cm}$, $r'_g = 35\,\mathrm{cm}$. Maso podlahti označimo z m, maso okrogle uteži pa z m'.

   Roka miruje, zato lahko napišemo pogoj za ravnovesje togega telesa: vsota vseh navorov in vsota vseh sil sta enaki 0.

   (a) Pri ravnovesju lahko os, okrog katere gledamo navore, postavimo v poljubno točko. Recimo, da si izberemo os v komolcu. Potem sila mišice vrti v nasprotni smeri urinega kazalca, sili teže pa v smeri urinega kazalca, medtem ko sila komolca zaradi ničelne ročice ne povzroča navora. Ravnovesje navorov lahko zapišemo kot

   $$M_b = M_g + M'_g, \tag{1}$$
   $$F_b r_b = F_g r_g + F'_g r'_g. \tag{2}$$

   Od tu lahko določimo silo mišice F_b:

   $$F_b = \frac{g(m r_g + m' r'_g)}{r_b} = 745{,}56\,\mathrm{N}. \tag{3}$$

   (b) Silo v komolcu F_k določimo s pomočjo ravnovesja sil:

   $$F_b = F_k + F_g + F'_g, \tag{4}$$
   $$F_k = F_b - mg - m'g = 627{,}84\,\mathrm{N}. \tag{5}$$

2. Temepraturo, tlak in volumen plina označimo s T_i, p_i in V_i, kjer se i nanaša na točko $p(V)$ diagrama, v kateri gledamo plin. Maso plina označimo z m, molsko maso z M, specifično toploto pri konstantnem volumnu s c_V, splošno plinsko konstanto z R, razmerje specifičnih toplot pa s κ.

   Podani so m, M, T_1, p_1, C_V in κ.

   (a) Za vsako od sprememb $1 \to 2$, $2 \to 3$ in $3 \to 1$ moramo določiti toploto Q in delo A.

   Sprememba $1 \to 2$ je izobarna, zato je $p_1 = p_2$ in $V_1/T_1 = V_2/T_2$. Iz podatkov naloge tudi vemo, da se je temperatura potrojila, torej $T_2 = 3T_1$, in posledično $V_2 = 3V_1$. Ob upoštevanju definicije κ, izrazov za V_2 in T_2, ter obrazcev za izobarno spremembo, dobimo

   $$Q_{1\to2} = mc_p\Delta T = m\kappa c_V(T_2 - T_1) = 2m\kappa c_V T_1 = 591\,\mathrm{kJ}, \tag{6}$$
   $$A_{1\to2} = -p_1\Delta V = -p_1(V_2 - V_1) = -2p_1V_1. \tag{7}$$

   Če v izrazu $A_{1\to2}$ upoštevamo plinsko enačbo, dobimo

   $$A_{1\to2} = -2p_1V_1 = -2mRT_1/M = -168\,\mathrm{kJ}. \tag{8}$$

   Sprememba $2 \to 3$ je izohorna: ker se volumen plina ne spreminja, je delo enako 0. Toplota je zato enaka spremembi notranje energije. Upoštevamo tudi, da smo izohorno plin ohladili na začetno temperaturo, torej $T_3 = T_1$, od prej pa že vemo $T_2 = 3T_1$. Dobimo

$$Q_{2\to 3} = \Delta W_{n\,2\to 3} = mc_V(T_3 - T_2) = -2mc_V T_1 = -422\,\mathrm{kJ}, \tag{9}$$
$$A_{2\to 3} = 0. \tag{10}$$

Sprememba $3 \to 1$ je izotermna, torej velja $p_3V_3 = p_1V_1$. Ker temperatura plina ostane enaka, je sprememba v notranji energiji plina enaka 0, in zato po 1. zakonu termodinamike velja $Q + A = 0$. Delo A določimo s pomočjo obrazca za izotermno spremembo:

$$A_{3\to 1} = -p_3V_3 \ln(V_1/V_3) = -p_1V_1 \ln(V_1/V_3). \tag{11}$$

Ker je bila sprememba $2 \to 3$ izohorna, je $V_2 = V_3 = 3V_1$. Produkt p_1V_1 lahko ponovno izrazimo iz plinske enačbe. Dobimo

$$A_{3\to 1} = p_1V_1 \ln 3 = mRT_1/M\ \ln 3 = 92\mathrm{kJ}, \tag{12}$$
$$Q_{3\to 1} = -A_{3\to 1} = -92\,\mathrm{kJ}. \tag{13}$$

Bolj podrobno si lahko ogledamo predznake: $Q_{1\to 2} > 0$, medtem ko $Q_{2\to 3}, Q_{3\to 1} < 0$: plin je toploto pri izobarnem segrevanju $1 \to 2$ prejel, medtem ko jo je pri izohornem ohlajanju $2 \to 3$ in izotermnem stiskanju $3 \to 1$ oddal. Pri delu imamo $A_{1\to 2} < 0$ in $A_{3\to 1} > 0$: kot vedno je plin delo pri razpenjanju opravil, pri stiskanju pa ga je prejel.

(b) Sledimo navodilom in izračunamo izkoristek kot razmerje celotnega oddanega dela $|A|$ in prejete toplote $Q_{1\to 2}$:

$$\eta = \frac{|A|}{Q_{1\to 2}} = \frac{|A_{1\to 2} + A_{2\to 3} + A_{3\to 1}|}{Q_{1\to 2}} = 13\,\%. \tag{14}$$

(c) Krožno spremembo $1 \to 2 \to 3 \to 1$ nadomestimo z $1 \to 2 \to 3' \to 1$, kjer je sprememba $3' \to 1$ adiabatna. Zanimata nas p_3' in T_3'.
Sprememba $1 \to 2$ je še vedno izohorna, zato je še vedno $V_3' = V_2 = 3V_1$. Če upoštevamo, da za adiabatne spremembe velja $pV^\kappa = \mathrm{konst}$ ter $TV^{\kappa-1}$=konst, dobimo

$$p_3'V_3'^\kappa = p_1V_1^\kappa, \tag{15}$$
$$p_3' = p_1(V_1/V_3')^\kappa = (1/3)^\kappa p_1 = 2{,}15\,\mathrm{bar}, \tag{16}$$
$$T_3'V_3'^{\kappa-1} = T_1V_1^{\kappa-1}, \tag{17}$$
$$T_3' = T_1(V_1/V_3')^{\kappa-1} = (1/3)^{\kappa-1}T_1 = 188{,}8\,\mathrm{K} = -84{,}2\,^\circ\mathrm{C}. \tag{18}$$

3. Označimo čas enega dneva s t_1, zaostanek v enem dnevu z Δt_1, nihajni čas in gravitacijski pospešek na višini morske gladine s t_0 in g, na višini vrha gore pa s t_0' in g'. R_Z je radij Zemlje, h je pa nadmorska višina vrha.

   (a) Nihajni čas matematičnega nihala opisuje izraz

$$t_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \tag{19}$$

   kjer je g gravitacijski pospešek, l pa dolžina vrvice nihala. Z višino se spreminja gravitacijski pospešek g in posledično zato tudi nihajni čas t_0. Na višini h zapišemo

$$t_0' = 2\pi\sqrt{l/g'}. \tag{20}$$

   Spomnimo se, da se g z oddaljenostjo od središča zemlje r spreminja kot $g(r) = MG/r^2$, kjer je G gravitacijska konstanta in M masa Zemlje. Velja torej

$$g = MG/R_Z^2, \qquad g' = MG/(R_Z+h)^2. \tag{21}$$

   Za razmerje nihajnih časov zato dobimo

$$\frac{t_0'}{t_0} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{(R_Z+h)^2}{R_Z^2}} = \frac{R_Z+h}{R_Z}. \tag{22}$$

   Ura na matematično nihalo zaostane za kvarčno uro za čas Δt_1 v času enega dneva t_1: kvarčna ura kaže t_1 pretečenega časa, matematično nihalo na nadmorski višini 0 prav tako t_1, na višini h pa matematično nihalo zaostaja in kaže $t_1 - \Delta t_1$. Prikazani čas na uri je odvisen od števila nihajev v danem času, to pa je obratno sorazmerno času enega nihaja. Razmerje prikazanih časov matematičnega nihala zato ustreza obratnemu razmerju nihajnih časov na različnih višinah:

$$\frac{t_1}{t_1 - \Delta t_1} = \frac{t_0'}{t_0} = \frac{R_Z+h}{R_Z}. \tag{23}$$

   Od tod lahko izrazimo višino vrha gore h:

$$h = R_Z\left(\frac{t_1}{t_1-\Delta t_1} - 1\right) = 2223\,\mathrm{m} \approx 2{,}2\,\mathrm{km}. \tag{24}$$

   (b) Postopamo podobno kot v prejšnjem primeru, le da je tokrat podana višina vrha h, izračunati pa moramo zamik Δt_1. Iz enačbe (23) dobimo

$$t_1 - \Delta t_1 = t_1\,\frac{R_Z}{R_Z+h}, \tag{25}$$

$$\Delta t_1 = t_1\left(1 - \frac{R_Z}{R_Z+h}\right) = 119\,\mathrm{s}. \tag{26}$$

   (c) Na višini Everesta h zdaj skrajšamo vrvico matematičnega nihala na dolžino $l - \Delta l$, tako da ima ura na matematično nihalo ponovno ravno pravi nihajni čas, tako kot na morski gladini. Velja torej $t_0 = t_0'$, oziroma

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}, \tag{27}$$

$$(l-\Delta l)/l = g'/g = R_Z^2/(R_Z+h)^2, \tag{28}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = 1 - R_Z^2/(R_Z+h)^2 = 0{,}28\,\%. \tag{29}$$

Opomba: v nalogi imamo opravka z majhnimi relativnimi razlikami v fizikalnih količinah (npr. nihajnih časih in oddaljenostih od središča Zemlje). Če npr. označimo $x := h/R_Z$, potem lahko npr. kvocient $R_Z^2/(R_Z+h)^2$ napišemo kot $(1+x)^{-2} \approx 1-2x$, ker je $x \ll 1$. Nasplošno za majhne x velja $(1+x)^n \approx 1+nx$, s čimer bi si lahko računanje nekoliko poenostavili. Enačba (29) se poenostavi recimo v

$$\Delta l/l \approx 2h/R_Z. \tag{30}$$

4. Radij kolesa označimo z R, radij droga z r, maso kolesa z m_k, maso uteži z m_u, višinsko razliko uteži s h, silo iz primera (b) pa s F. Iskano hitrost uteži, ko se ta spusti za h, označimo z v.

   (a) Uporabimo energijski zakon: začetna potencialna energija uteži (glede na končno točko) se pretvori v kinetično energijo uteži in kinetično energijo kolesa. Kinetična energija kolesa ima le rotacijski prispevek, saj se težišče kolesa pri vrtenju okoli osi ne giba. Velja torej

$$W_{\text{pot1}} = \overbrace{W_{\text{kin2}}}^{\text{utež}} + \overbrace{W'_{\text{kin2}}}^{\text{kolo}}, \tag{31}$$

$$m_u g h = \tfrac{1}{2} m_u v^2 + \tfrac{1}{2} J\omega^2, \tag{32}$$

   kjer je J vztrajnostni moment kolesa, ω pa njegova kotna hitrost. Ker je kolo v obliki valja z radijem R, se vztrajnostni moment napiše kot

$$J = \tfrac{1}{2} m_k R^2, \tag{33}$$

   medtem ko nam pogoj, da se vrv sproti odvija z vrtečega droga z radijem r, ne da bi po njem spodrsavala, predpiše zvezo

$$\omega = v/r. \tag{34}$$

   Ko upoštevamo izraza za J in ω v energijskem zakonu (32), dobimo

$$m_u g h = \tfrac{1}{2} m_u v^2 + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2} m_k R^2 v^2/r^2, \tag{35}$$

$$2 m_u g h = v^2 \left(m_u + \tfrac{1}{2} m_k R^2/r^2 \right), \tag{36}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 m_u g h}{m_u + \frac{1}{2} m_k R^2/r^2}} = 3{,}04\,\mathrm{m/s}. \tag{37}$$

   (b) Hitrost v bomo analogno s primerom (a) določili iz energijskega zakona, le da tokrat upoštevamo, da se je del začetne potencialne energije porabil za delo sile trenja, ko vrteče kolo praska ob steno:

$$W_{\text{pot1}} = \overbrace{W_{\text{kin2}}}^{\text{utež}} + \overbrace{W'_{\text{kin2}}}^{\text{kolo}} + A_{\text{tr}}, \tag{38}$$

$$m_u g h = \tfrac{1}{2} m_u v^2 + \tfrac{1}{2} J\omega^2 + F_{\text{tr}} s, \tag{39}$$

   kjer je F_{tr} sila trenja na kolo, s pa razdalja, za katero se obod kolesa zavrti, ko se utež spusti za h. Ker kolo pritiskamo ob steno z vodoravno silo F, ki je pravokotna na steno, jo lahko s silo trenja povežemo prek koeficienta trenja:

$$F_{\text{tr}} = k_{\text{tr}} F. \tag{40}$$

Nadalje ugotovimo, da se je ob spustu uteži za višino h odvilo z droga za h vrvi: točka na obodu droga je torej prepotovala h, točka na obodu kolesa pa za tolikokrat večjo pot, kolikor je razmerje radijev kolesa in kroga:

$$s = h(R/r). \tag{41}$$

Ob upoštevanju zgoraj povedanega o F_{tr} in s, ter že od prej znana izraza za J in ω, iz energijskega zakona (39) dobimo

$$m_u gh = \tfrac{1}{2} m_u v^2 + \tfrac{1}{4} m_k v^2 R^2/r^2 + k_{\mathrm{tr}} F h R/r, \tag{42}$$

$$2m_u gh - 2k_{\mathrm{tr}} F h R/r = v^2 \left(m_u + \tfrac{1}{2} m_k R^2/r^2\right), \tag{43}$$

$$v = \sqrt{\frac{2m_u gh - 2k_{\mathrm{tr}} F h R/r}{m_u + \frac{1}{2} m_k R^2/r^2}} = 2{,}24\,\mathrm{m/s}. \tag{44}$$