ENOTE IN MERJENJA

Fizika temelji na merjenjih. Vsa važnejša fizikalna dognanja in zakoni temeljijo na ustreznem razumevanju in interpretaciji meritev. Tudi vsako novo dognanje je treba preveriti z meritvami.

Vsaka količina v fiziki je podana z merilnim postopkom in enoto. Merjenje predstavlja primerjanje z enoto. Nekaj enot imenujemo osnovne enote. Druge enote so izpeljane iz osnovnih enot in jih imenujemo izpeljane enote. Osnova mednarodnega sistema enot (SI) je sedem osnovnih enot, ki so podane v naslednji tabeli:

Količina	**ime enote**	**oznaka enote**
čas	sekunda	s
dolžina	meter	m
masa	kilogram	kg
termodinamična temperatura	kelvin	K
električni tok	amper	A
količina snovi	mol	mol
svetilnost	kandela, sveča	cd

Merjenje časa prestavlja štetje nihajev. V starih urah je bilo to štetje mehanskih nihajev. V uri s kremenovim kristalom štejemo nihaje natančnega električnega oscilatorja. Natančno merjenje časa in definicijo sekunde omogočajo atomske ure. Sekunda je definirana s pomočjo značilnega mikrovalovnega sevanja atomov ^{133}Cs pri prehodu med dvema hiperfinima nivojema osnovnega stanja in sicer je enaka 9 192 631 770 nihajnih časov tega valovanja.

Meter je definiran kot pot, ki jo prepotuje svetloba v vakuumu v času 1/299792458 sekunde.

Kilogram je definiran kot masa prakilograma, to je telesa iz platine in iridija, ki ga hranijo v Mednarodnem uradu za uteži in mere blizu Pariza. Na atomski skali uporabljamo drugo enoto za maso, atomsko masno enoto, ki je izražena v kilogramih enaka $1.6605402 \cdot 10^{-27}$ kg. Podana je kot dvanajstina mase atoma ^{12}C.

Enota za termodinamično temperaturo, kelvin, je definiran kot 1/273.16 temperature trojne točke vode.

Če teče po dveh neskončno dolgih tankih vzporednih vodnikih, med katerima je razdalja 1 m, električni tok 1 A, deluje na meter vodnika sila $2. \ 10^{-7}$ N.

1 mol je tista količina snovi, ki vsebuje enako število osnovnih gradnikov (atomov, molekul, ionov, …), kot je atomov v 0.012 kg ^{12}C.

Kandela (sveča) predstavlja svetilnost svetlobnega izvora s frekvenco $540 \cdot 10^{12}$ Hz, ki je enaka (1/683) W/steradian.

Izpeljana enota je na primer enota za silo, newton (N), ki je z osnovnimi enotami podana kot: $1 \text{ N} = 1\text{kgms}^{-2}$.

Količine v fiziki vedno podamo kot kombinacijo števila in enote, n. pr. 1.25 A. Število ponavadi napišemo s tolikimi mesti, kolikor natančno količino poznamo, lahko pa tudi z manj mesti, če to zadošča za razumevanje problema. Pogosto predstavljajo količine izražene v enotah SI zelo velika, ali pa zelo majhna števila. Dimenzija atoma je reda velikosti 10^{-10} m, razdalja med bližnjimi mesti je okrog 10^4 m, dolžina dneva je približno 9. 10^4 sekund, kapacitete keramičnih kondenzatorjev so pogosto reda velikosti 10^{-10} F itd. Da ne bi pisali prevelikih števil uporabljamo pripone, ki so podane v naslednji tabeli.

faktor	**pripona**	**simbol**	**faktor**	**pripona**	**simbol**
10^{18}	exa	E	10^{-18}	ato	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{2}	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deka	da	10^{-1}	deci	d

Tipična valovna dolžina vidne svetlobe je 500 nm, dimenzija atomskega jedra je nekaj fm, frekvenca mikrovalov je v področju GHz itd.

Pri merjenju se vedno pojavljajo napake, zato natančne vrednosti merjene količine nikoli ne izmerimo. Napake pri merjenju razvrstimo v dve kategoriji: slučajne in sistematske. Slučajne napake so posledica nenatančnosti merilnega instrumenta, slučajnih motenj, napak pri odčitavanju itd. Odmiki od prave vrednosti so v tem primeru pozitivni in negativni. Sistematske napake nastopajo zaradi nenatančne umeritve merilnega instrumenta in so vse istega znaka. Če bi na primer z metrom, ki je umerjen pri temperaturi 20 ^{0}C merili dolžine pri temperaturi 0 ^{0}C, bi vedno dobili prevelik rezultat.

V primeru slučajnih napak izboljšamo natančnost meritve tako, da meritev večkrat ponovimo. Povprečna vrednost izmerjene količine je najboljši približek prave vrednosti. Če neko količino, imenujmo jo a, n krat izmerimo, dobimo izmerke a_1, a_2,…, a_n. Povprečna vrednost izmerkov $\bar{a}$ je enaka

$$\bar{a} = (a_1+a_2+\ldots+a_n)/n.$$

Odmiki izmerkov od povprečne vrednosti, (a_i - $\bar{a}$), so pozitivni in negativni. Povprečna vrednost teh odmikov je enaka nič. Natančnost merjenja je tem večja, čim manjši so po velikosti odmiki izmerkov od povprečne vrednosti. Rezultate meritev zapišemo tako, da navedemo napako, na primer

$$a = \bar{a} \pm \delta a.$$

Napako δa imenujemo absolutna napaka. Pri majhnem številu meritev vzamemo za absolutno napako kar največji odmik od povprečne vrednosti. Če je število meritev večje izberemo δa tako, da je v intervalu med $\bar{a}$ - δa in $\bar{a}$ + δa zajetih 2/3 meritev. Natančneje izrazimo absolutno napako kot efektivno napako povprečja:

$$\delta a = \sqrt{\frac{\left((a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+\ldots+(a_n-\bar{a})^2\right)}{n(n-1)}}.$$

Poleg absolutne napake δa uporabljamo tudi relativno napako $\delta a/\bar{a}$:

$$a = \bar{a} \pm \delta a = \bar{a}\,(1\pm\delta a/\bar{a}).$$

Relativna napaka je brezdimenzijska količina in jo pogosto izražamo v %.

Relativno in absolutno napako ponavadi zaokrožimo navzgor in jo zapišemo z enim, največ dvema mestoma. Pogosto napake niti ne zapišemo. Tedaj smemo merjeno količino zapisati le s tolikimi mesti, da je zadnje mesto negotovo za nekaj enot.

Poglejmo še, kako računamo s količinami, ki so podane z napakami. Pri seštevanju in odštevanju se seštevajo absolutne napake:

$$a + b = (\bar{a} \pm \delta a) + (\bar{b} \pm \delta b) = (\bar{a} + \bar{b}) \pm (\delta a + \delta b)$$

$$a - b = (\bar{a} \pm \delta a) - (\bar{b} \pm \delta b) = (\bar{a} - \bar{b}) \pm (\delta a + \delta b).$$

Pri množenju in deljenju se seštevajo relativne napake:

$$ab = \bar{a}(1 \pm \delta a / \bar{a})\bar{b}(1 \pm \delta b / \bar{b}) = \bar{a}\bar{b}\left[1 \pm (\delta a / \bar{a} + \delta b / \bar{b})\right]$$

$$a / b = \left[\bar{a}(1 \pm \delta a / \bar{a})\right] / \left[\bar{b}(1 \pm \delta b / \bar{b})\right] \doteq (\bar{a} / \bar{b})\left[1 \pm (\delta a / \bar{a} + \delta b / \bar{b})\right].$$

Pri potenciranju s celim ali necelim številom n se relativna napaka množi z n:

$a^n = \bar{a}^n(1 \pm n\delta a/\bar{a})$.

To seveda velja, če je $\delta a/\bar{a} \ll 1$. Če poznamo prostornino krogle z natančnostjo 3 %, poznamo polmer krogle z natančnostjo 1%.

Pogosto merimo zveze med količinami. Vzemimo, da pri telesu, ki je v začetku v izhodišču in se giblje enakomerno, merimo čas t, ki ga telo potrebuje, da prepotuje pot s. Pri tem naredimo več meritev. Za različne vrednosti s_i izmerimo čas t_i. Kako iz teh podatkov najbolj natančno določimo hitrost? Za enakomerno gibanje velja $s = vt$. Če nanesemo rezultate meritev na diagram poti v odvisnosti od časa, dobimo na njem točke, ki bi ležale na premici, če bi bile meritve natančne. Zaradi slučajnih napak pri merjenju točke ne leže na premici. V tem primeru narišemo premico, ki izhaja iz točke s=0, t=0 in se izmerjenim točkam najbolje prilega. Strmina premice $\Delta s/\Delta t$ predstavlja hitrost, absolutno napako pri določitvi hitrosti pa ocenimo tako, da pogledamo, za koliko moramo premico nagniti v obe smeri, da zajamemo vse meritve.

Hitrost lahko izračunamo tudi z metodo najmanjših kvadratov. Ugotoviti moramo, pri kateri vrednosti hitrosti v je vsota $\sum_i (s_i - vt_i)^2$ najmanjša. Z odvajanjem izraza hitro ugotovimo, da je odvod nič, ko je hitrost enaka

$$v = \sum_i s_i t_i \Big/ \sum_i t_i^2 .$$

Grafično metodo lahko uporabimo tudi v nekaterih bolj zapletenih primerih. Pri merjenju pospeška prostega pada za več dolžin poti s_i izmerimo čas prostega pada t_i. V tem primeru velja zveza $s=gt^2/2$. Če nanesemo podatke na diagram poti v odvisnosti od časa, bi v primeru natančne meritve ležale merske točke na paraboli. Odmikov od lege na paraboli, ki so posledica slučajnih napak, s prostim očesom ponavadi ne vidimo. Lahko pa narišemo pot v odvisnosti od kvadrata časa. V tem primeru bi pri natančni meritvi točke ležale na premici, ki se začne v izhodišču (t=0, s=0) in ima strmino g/2. Zaradi slučajnih napak točke ponavadi ne leže na premici. V tem primeru narišemo premico, ki se začne v izhodišču in se merskim točkam najbolj prilega. Dvakratna strmina te premice, $2(\Delta s/\Delta t^2)$ je najbolj natančna vrednost g, ki jo iz teh meritev lahko določimo.

Pri absorpciji svetlobe v snovi gostota svetlobnega toka j eksponentno pada z naraščajočo potjo s, ki jo svetloba napravi v snovi: $j = j_0 e^{-s/s_0}$. Vzemimo, da pri več dolžinah poti s_i izmerimo gostoto svetlobnega toka j_i. Iz merskih podatkov želimo

grafično čim bolj natančno določiti značilno dolžino s_0. Z logaritmiranjem zveze med gostoto svetlobnega toka in potjo dobimo $lnj = lnj_0 - s/s_0$.
Zveza med *lnj* in *s* je linearna. Rezultate meritev nanesemo na diagram odvisnosti logaritma gostote svetlobnega toka lnj od poti s in skozi merske točke potegnemo najbolje prilegajočo se premico. Strmina te premice je enaka $\Delta lnj/\Delta s = -1/s_0$. Mimogrede omenimo, da je vseeno, s kakšno enoto izražamo gostoto svetlobnega toka. Pri odštevanju logaritmov (Δlnj) se enota krajša.

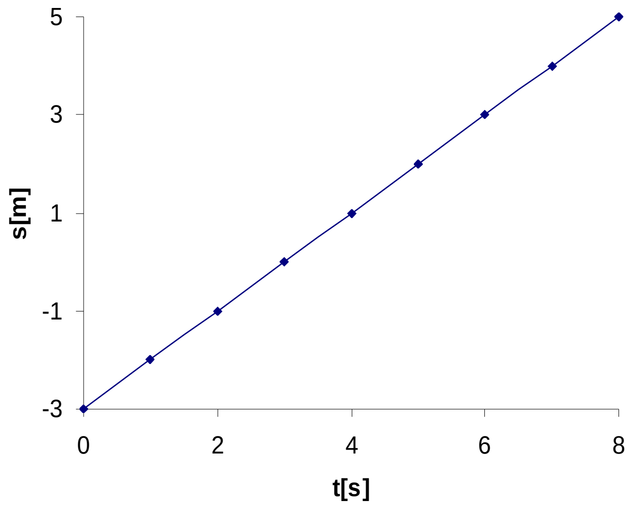
PREMO GIBANJE TOČKASTEGA TELESA

Najpreprostejše gibanje točkastega telesa je gibanje po premici ali premo gibanje. Gibanje bomo poznali, če bomo v vsakem trenutku vedeli, kje je telo. Poznavanje lege želimo izraziti na matematičen način. Najprej na premici, po kateri se giblje telo, izberemo izhodišče, iz katerega telo opazujemo. Lego telesa podamo kot oddaljenost od izhodišča, ki jo imenujmo s. Ta podatek pa lege telesa še ne določa enolično. Telo je lahko enako oddaljeno od izhodišča v dveh smereh. Zato definiramo še pozitivno smer premice. Odmike od izhodišča v pozitivni smeri bomo šteli pozitivno, odmike v nasprotni smeri pa negativno. Poznavanje lege telesa smo prevedli na poznavanje odmika od izhodišča . Poznavanje gibanja telesa pa smo prevedli na poznavanje časovnega poteka odmika od izhodišča s(t).

Časovni potek odmika od izhodišča lahko predstavimo na tri načine: kot tabelo, diagram, ali matematični izraz. Naslednja tabela predstavlja primer odvisnosti odmika od izhodišča od časa. Pomembno je, da poleg obeh količin (t in s) navedemo tudi enote.

t[s]	**s[m]**
0	-3
1	-2
2	-1
3	0
4	1
5	2
6	3
7	4
8	5

Podatke iz tabele lahko vnesemo na diagram in jih, če je to mogoče, za vodilo očesu tudi povežemo.



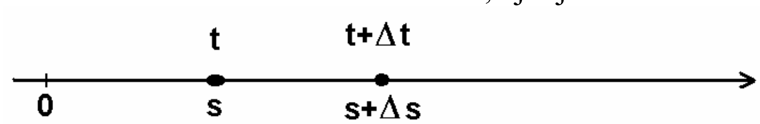
Pogosto lahko s(t) izrazimo tudi s pomočjo matematične formule. Podatke iz gornje tabele popisuje formula

$s(t) = s_0 + vt,$

pri čemer je $s_0 = -3$ m in $v = 1$ ms^{-1}.

V fiziki preučujemo gibanje pod vplivom sil. Kot bomo videli pozneje, nam drugi Newtonov zakon pove, kolikšen je pospešek telesa, na katerega delujejo sile. Zaradi tega moramo vpeljati hitrost in pospešek.

Vzemimo, da se telo v časovnem intervalu od časa t do časa t+Δt premakne z mesta, kjer je odmik od izhodišča enak s na mesto, kjer je odmik od izhodišča enak s+Δs.



Hitrost definiramo kot razmerje med premikom telesa Δs in časom Δt v katerem je prišlo do tega premika. Ker je tako definirana hitrost ponavadi odvisna od dolžine časovnega intervala Δt, jo imenujemo povprečna hitrost na tem časovnem intervalu $\bar{v}$,

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Enota za hitrost je ms^{-1}. Premik je torej enak produktu povprečne hitrosti $\bar{v}$ in dolžine časovnega intervala Δt. Če sedaj krajšamo dolžino časovnega intervala Δt, se seveda spreminja tudi Δs in v splošnem tudi $\bar{v}$. Pri dovolj kratkih časovnih intervalih postane $\bar{v}$ neodvisna od dolžine časovnega intervala. Tako kratke časovne intervale označimo z dt, ustrezne premike pa z ds. Hitrost, ki smo jo dobili na ta način imenujemo trenutna hitrost ob času t v(t),

$$v(t) = \frac{s(t+dt)\text{-}s(t)}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

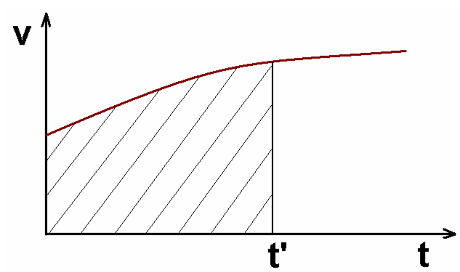
Trenutno hitrost ob času t smo definirali kot odvod odmika od izhodišča ob času t.

Odvod smo zapisali kot razmerje diferencialov (majhnih sprememb) ds/dt. V fiziki te spremembe ne morejo biti poljubno majhne, saj morajo biti fizikalne količine in tudi njihove spremembe merljive. V konkretnem primeru je pomembno, da je dt dosti krajši od časa, v katerem se hitrost znatno spremeni.

Če poznamo časovni potek s(t) lahko z odvajanjem takoj poiščemo časovni potek hitrosti v(t). Ali lahko zvezo obrnemo in iz časovnega poteka v(t) poiščemo časovni potek s(t)? Izkaže se, da poznavanje v(t) ni dovolj. Hitrost je namreč povezana s premiki, ne pa z lego. Zato moramo lego telesa ob nekem času poznati. Imenujmo ta čas nič (t=0). Poznamo torej s(0). Odmik od izhodišča ob poljubnem času t' je potem enak

$$s(t') = s(0) + \int_0^{t'} v(t)dt .$$

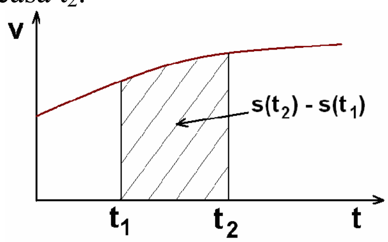
Integral predstavlja ploščino pod krivuljo v(t) na diagramu hitrosti v odvisnosti od časa na intervalu od časa 0 do časa t'.



Mimogrede omenimo, da predstavlja integral

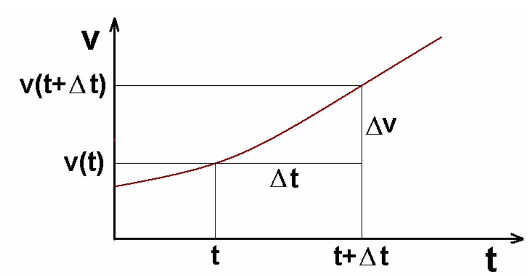
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

premik telesa od časa t_1 do časa t_2.



Pospešek meri spreminjanje hitrosti s časom. Povprečni pospešek $\bar{a}$ na časovnem intervalu od časa t do časa t+Δt je enak

$$\bar{a} = \frac{v(t + \Delta t)\text{-}v(t)}{\Delta t} .$$

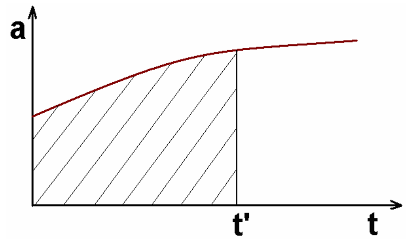


V splošnem je $\bar{a}$ odvisen od Δt. S skrajševanjem časovnega intervala Δt bomo, podobno kot smo to storili pri hitrosti, dobili trenutni pospešek ob času t, a(t). Ta je enak

$$a(t) = \frac{v(t + dt)\text{-}v(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} .$$

Trenutni pospešek je torej odvod hitrosti po času. Iz znanega časovnega poteka hitrosti lahko z odvajanjem po času dobimo časovni potek pospeška. Obratno ni mogoče, če ne poznamo hitrosti v nekem trenutku. Vzemimo, da poznamo hitrost ob času nič, v(0), pa lahko izračunamo hitrost ob poljubnem času t':

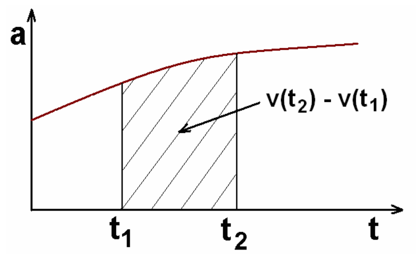
$$v(t') = v(0) + \int_0^{t'} a(t)dt \,.$$



Integral predstavlja ploščino pod krivuljo a(t) na diagramu pospeška v odvisnosti od časa na intervalu od časa 0 do časa t'. Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

predstavlja spremembo hitrosti na časovnem intervalu od časa t_1 do časa t_2.



Če poznamo časovni potek pospeška a(t), potrebujemo še začetno hitrost v(0) in začetno lego s(0), da lahko izračunamo časovni potek odmika od izhodišča.

Oglejmo si dva posebna primera.

Najprej obravnavajmo enakomerno gibanje. Tu je hitrost v stalna, pospešek je enak nič, odmik od izhodišča pa je enak

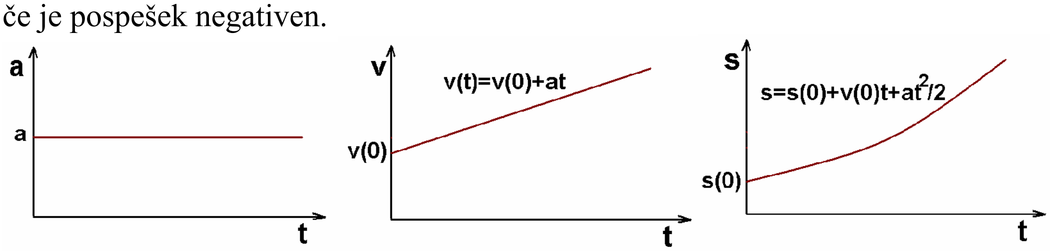
$$s(t) = s(0) + vt \,.$$

Pri enakomerno pospešenem gibanju je pospešek a stalen. Časovna poteka hitrosti v(t) in odmika od izhodišča s(t) sta enaka:

$$v(t) = v(0) + at$$

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2.$$

Hitrost telesa se linearno spreminja s časom. Narašča, če je pospešek pozitiven, ali pada, če je pospešek negativen.



Iz gornjih dveh enačb lahko izločimo čas in izračunamo zvezo med hitrostjo in premikom. Imenujmo s(t)-s(0)=s, v(t)=v in v(0)=v_0 pa dobimo zvezo

$v^2 = v_0^2 + 2as$.
Kvadrat hitrosti na koncu premika je enak kvadratu hitrosti na začetku premika plus dvakratni produkt pospeška in premika.

Kot prvi zgled obravnavajmo navpični met telesa z začetno hitrostjo v_0.
Na premici, po kateri se giblje telo, izberimo izhodišče v začetni legi. Pozitivna smer premice naj kaže navzgor. Med letom je pospešek ves čas enak $-g$, pri čemer je g težnostni pospešek. Začetna hitrost je enaka v_0, začetni odmik od izhodišča pa je enak nič. Časovni potek hitrosti podaja enačba
$v(t) = v_0 - gt$,
časovni potek odmika od izhodišča (višine) pa je podan z enačbo
$s(t) = v_0t - gt^2/2$.
Izračunajmo višino meta. V najvišji točki je $v=0$. Telo doseže to točko ob času t_1, $t_1=v_0/g$. Višina meta h je enaka $h = s(t_1) = v_0^2/2g$. Do tega rezultata bi lahko prišli tudi z uporabo enačbe, ki povezuje kvadrat hitrosti s premikom:
$0 = v_0^2-2gh$.
Izračunajmo še po kolikšnem času t_2 bo telo priletelo v začetno točko. Tedaj je $s(t_2)=0$. Čas t_2 je enak $t_2 = 2t_1 = 2v_0/g$. Hitrost telesa v tem trenutku $v(t_2)$ je enaka $-v_0$.

Obravnavajmo še zahtevnejši zgled. Vzemimo, da je pospešek telesa a enak $a = a_0 - kv$. Začetni odmik od izhodišča naj bo nič, začetna hitrost pa tudi. Izračunajmo časovni potek hitrosti in premika.
Do take situacije pridemo, če v posodo z oljem spustimo železno kroglico. Člen a_0 prispevata teža in vzgon, člen $-kv$ pa upor pri gibanju v viskozni tekočini.
Ker je $a=dv/dt$ velja

$$\frac{dv}{dt} = a_0 - kv = k(v_0 - v).$$

Na desni strani enačbe smo izpostavili k in razmerje a_0/k, ki ima dimenzijo hitrosti, imenovali v_0. Enačbo pomnožimo z dt in delimo z (v_0-v), da ločimo spremenljivki:

$$\frac{dv}{v_0 - v} = kdt.$$

Enačba povezuje majhno spremembo hitrosti dv pri dani hitrosti v s kratkim časovnim intervalom dt. Seštejmo te spremembe:

$$\int_0^v \frac{dv}{v_0 - v} = \int_0^t kdt.$$

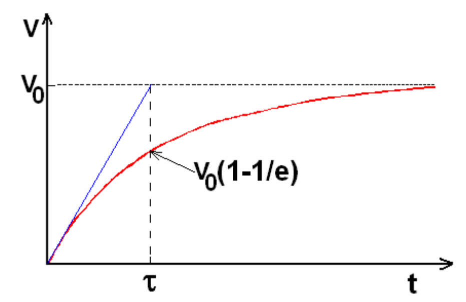
Času 0 ustreza hitrost nič, v pa je hitrost telesa ob času t. Integral leve strani je enak

$$\ln\left(\frac{v_0}{v_0 - v}\right),$$

integral desne strani pa je enak kt. Hitrost telesa je enaka

$$v = v(t) = v_0(1 - e^{-kt}) = v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Hitrost telesa se eksponentno približuje vrednosti v_0 z značilnim časom $\tau = 1/k$. Ob času $t=\tau$ je hitrost telesa enaka $(1-e^{-1}) \approx 2/3$ končne hitrosti.



Pot, ki jo opravi telo v času t pa je enaka

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Ob času, ki je dosti daljši od t je gibanje telesa enakomerno s hitrostjo v_0.

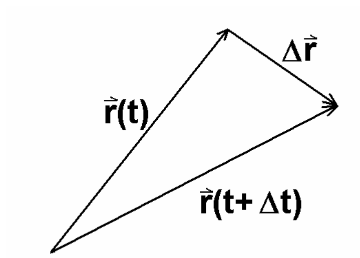
KRIVO GIBANJE TOČKASTEGA TELESA

Prejšnjikrat smo obravnavali premo gibanje točkastega telesa. Zdaj se te omejitve znebimo in obravnavajmo gibanje točkastega telesa po splošnem krivem tiru. Zopet moramo izbrati izhodišče, iz katerega bomo gibanje opazovali. Pri premem gibanju je bilo smiselno, da je izhodišče na premici, po kateri se giblje telo. Pri krivem gibanju to ni več nujno res.

Lego telesa glede na izhodišče določa krajevni vektor $\vec{r}$. To je vektor od izhodišča do telesa. Če poznamo časovni potek krajevnega vektorja $\vec{r}(t)$, poznamo gibanje telesa.

Podobno, kot pri premem gibanju, moramo tudi pri krivem gibanju definirati hitrost in pospešek. Povprečno hitrost na časovnem intervalu od časa t do časa t+Δt definiramo kot premik v tem časovnem intervalu deljen z dolžino intervala Δt:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$



Povprečna hitrost je vektor in kaže v smeri premika. Njena velikost je enaka velikosti premika deljeni z dolžino časovnega intervala Δt. Velikost in smer hitrosti se v splošnem spreminjata, če spreminjamo dolžino časovnega intervala Δt. S skrajševanjem časovnega intervala Δt se povprečna hitrost približuje trenutni hitrosti ob času t, $\vec{v}(t)$,

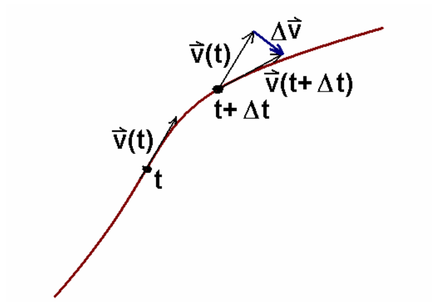
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

Trenutna hitrost ima smer tangente na tir. Če poznamo lego telesa ob nekem času, recimo mu čas nič, lahko iz znanega časovnega poteka hitrosti izračunamo časovni potek krajevnega vektorja:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t')dt'.$$

Povprečni pospešek na časovnem intervalu od časa t do časa t+Δt definiramo kot spremembo vektorja hitrosti na tem časovnem intervalu deljeno z dolžino intervala Δt:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$



Povprečni pospešek je vektor, povezan s spremembo vektorja hitrosti. Hitrost se v splošnem spreminja po velikosti in po smeri. S skrajševanjem dolžine časovnega intervala Δt se povprečni pospešek približuje trenutnemu pospešku ob času t, $\vec{a}(t)$,

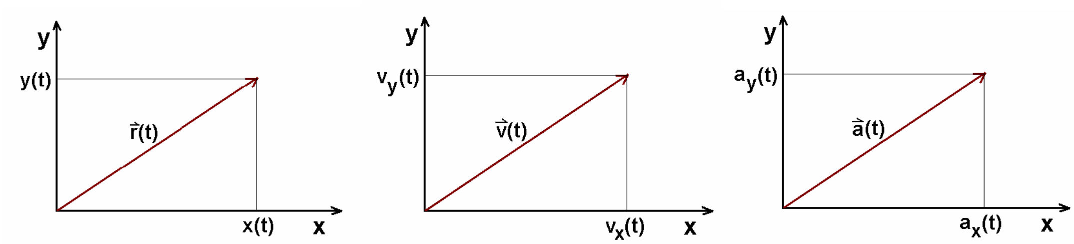
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

Smer pospeška se ne ujema s smerjo hitrosti. Projekcija vektorja pospeška na smer hitrosti meri spreminjanje velikosti hitrosti, medtem ko projekcija vektorja pospeška na smer, ki je pravokotna na smer hitrosti meri spreminjanje smeri hitrosti in je povezana z ukrivljenostjo tira. Podrobneje bomo o tem govorili pri kroženju. Če poznamo vektor hitrosti telesa ob času nič, lahko iz znanega časovnega poteka vektorja pospeška izračunamo časovni potek hitrosti:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t')dt'.$$

Pri računanju si pogosto pomagamo tako, da v izhodišče postavimo pravokotni koordinatni sistem. Orientacija osi je poljubna. Ponavadi izberemo tako, ki nam najbolj ustreza. Če imamo opraviti z gibanjem v prostoru, bomo izbrali tridimenzionalni koordinatni sistem z osmi x, y in z. V primeru ravninskega gibanja zadošča dvodimenzionalni koordinatni sistem z osema x in y. Vse tri vektorje $\vec{r}, \vec{v}$, in $\vec{a}$ predstavimo s pomočjo njihovih projekcij na osi koordinatnega sistema:

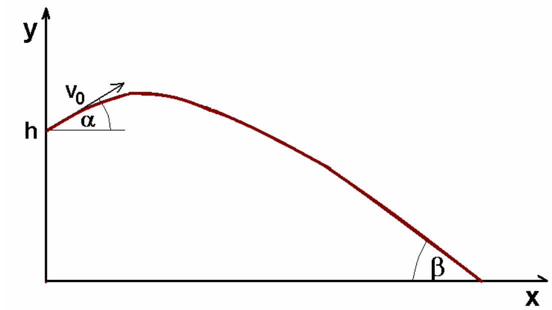
$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$



Vsako vektorsko enačbo zapišemo kot dve ali tri skalarne enačbe. Pri ravninskem gibanju sta enačbi

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$$
$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}$$
ekvivalentni enačbi $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, enačbi
$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t')dt'$$
$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t')dt'$$
pa sta ekvivalentni vektorski enačbi $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t')dt'$..

Kot primer krivega gibanja obravnavajmo poševni met. Vzemimo, da kamen vržemo z višine h nad vodoravno podlago pod kotom α glede na vodoravnico. Začetna hitrost kamna naj bo v_0.



Najprej izberimo izhodišče in vanj postavimo koordinatni sistem. Primerna točka za izhodišče je točka na podlagi pod začetno lego predmeta. Ker imamo opravka z ravninskim gibanjem, zadošča dvorazsežni koordinatni sistem. Orientacijo osi izberimo tako, da kaže os x v vodoravni smeri, os y pa v navpični smeri. V tem koordinatnem sistemu je vektor pospeška $\vec{a}(t) = (0, -g)$, vektor začetne hitrosti $\vec{v}(0) = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$ in začetni krajevni vektor $\vec{r}(0) = (0, h)$. V vodoravni smeri je gibanje enakomerno s hitrostjo $v_0\cos\alpha$. Odmik od izhodišča v vodoravni smeri je ob času t enak
$x(t) = v_0 t\cos\alpha$.
V navpični smeri je gibanje enakomerno pospešeno s pospeškom $-g$, začetno hitrostjo $v_0\sin\alpha$ in začetnim odmikom od izhodišča h. . Časovni potek hitrosti v navpični smeri in časovni potek odmika od izhodišča v navpični smeri (višine) podajata enačbi
$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt$
$y(t) = h + v_0 t\sin\alpha - gt^2/2$.
Te enačbe opišejo let kamna. Zračni upor smo seveda zanemarili. Izračunamo lahko kdaj, kje in pod kolikšnim kotom pade kamen na tla. Vzemimo, da kamen pade na tla ob času t_1. Tedaj je višina kamna, $y(t_1)$, enaka nič:
$y(t_1) = h + v_0 t_1\sin\alpha - gt_1^2/2 = 0$.
Iz te enačbe izračunamo čas t_1

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

Smiselna je samo rešitev z znakom +. Rešitev z znakom – je negativna, a ni čisto brez pomena. Pomeni čas, ob katerem bi morali s tal vreči kamen z ravno pravo hitrostjo in v pravi smeri, da bi bil ob času nič v začetni legi in bi imel začetno hitrost. Kamen prileti na tla na mestu, ki je v vodoravni smeri od začetnega mesta oddaljeno za $x(t_1) = v_0t_1\cos\alpha$. Kot, pod katerim kamen zadene podlago, lahko izračunamo, če izračunamo hitrost. Tangens kota β med smerjo letenja kamna in vodoravno podlago je enak razmerju $|v_y(t_1)|/v_x(t_1)$:

$$tg\beta = \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{v_o \cos\alpha}.$$

Omenimo še, da je pri konstantni hitrosti v_0 dolžina meta največja, ko je kot α enak $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}}$. Pri čemer je $\varepsilon=2gh/v_0^2$.

Podoben zgled je naslednji.

Pobočje hriba lahko opišemo s funkcijo $y = Px - Qx^2$ (P=0.7, Q= 0.01 m^{-1}). Tu je y višina, x pa vodoravna oddaljenost od vznožja hriba. Z vznožja hriba izstrelimo izstrelek pod kotom $\alpha = 45^0$ glede na vodoravnico. Začetna hitrost izstrelka v_0 je 20 m/s. Izračunajmo, kdaj in kje zadene izstrelek pobočje, s kolikšno hitrostjo in pod kakšnim kotom.

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v začetno točko. Os x naj bo vodoravna in naj kaže v smeri gibanja izstrelka. Os y naj kaže navpično navzgor. Lego izstrelka ob času t podajata naslednji enačbi:

$x(t) = v_0t\cos\alpha$

$y(t) = v_0t\sin\alpha - gt^2/2.$

Izstrelek zadene pobočje, ko je

$y(t) = Px(t) - Qx^2(t)$ oziroma

$v_0t\sin\alpha - gt^2/2 = Pv_0t\cos\alpha - Qv_0^2t^2\cos^2\alpha.$

Iz te enačbe izračunamo čas, ob katerem izstrelek zadene pobočje. Enačba ima dve rešitvi. Rešitev t=0 ustreza začetni legi. Rešitev, ki jo iščemo je enaka

$t = 2v_0(\sin\alpha - P\cos\alpha)/(g-2Qv_0^2\cos^2\alpha) = 1.4\ s.$

Ob tem času je x = 20 m in y = 10 m. Mesto, kjer izstrelek zadene pobočje, je torej na višini 10 m in je v vodoravni smeri 20 m oddaljeno od začetne lege. Izračunajmo, kolikšni sta tedaj projekciji hitrosti na osi koordinatnega sistema. Velja

$v_x(t) = v_0\cos\alpha = 14$ m/s

$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt = 0.$

Izstrelek torej prileti vodoravno (v_y=0) in zadene pobočje s hitrostjo 14 m/s.

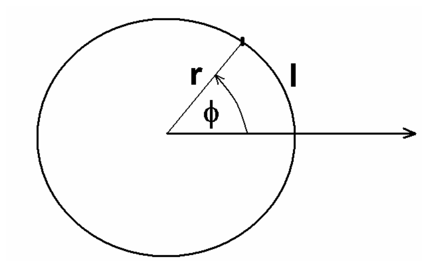
Zaradi vodoravnega gibanja izstrelka ob času zadetka je kot β, pod katerim izstrelek zadene pobočje, enak nagibu pobočja β' na mestu zadetka, tangens tega kota pa je enak $tg\beta' = y' = P - 2Qx = 0.3$. Iz tega dobimo $\beta = \beta' = 17^0$. V splošnem bi bilo treba od kota β' odšteti kot β'',

$\mathrm{arctg}\beta'' = v_y/v_x$,

ki ga smer gibanja izstrelka oklepa z vodoravno ravnino. Kot β je torej enak β' – β''.

KINEMATIKA KROŽENJA

Kot drugi primer krivega gibanja si bomo ogledali kroženje. Za opis kroženja si moramo najprej izbrati primerno izhodišče. Izberemo si ga v središču kroga, po katerem se giblje telo. V to izhodišče bi lahko postavili pravokoten koordinatni sistem, a je preprosteje delati s polarnim koordinatnim sistemom.

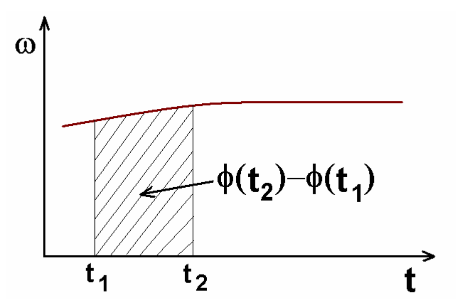


V tem koordinatnem sistemu sta spremenljivki polmer r kot ϕ. Kot ϕ merimo od neke izbrane smeri v nasprotni smeri urinega kazalca. Kot ϕ je definiran kot razmerje loka l in radija r, $\phi = l/r$ in je brezdimenzijska količina. Da pa ni zmede mu pripišemo enoto radian (rd). Polnemu kotu ustreza 2π radianov. Poleg radianov bomo za merjenje kotov uporabljali tudi kotne stopinje minute in sekunde: 1 rd $\approx 57^0\ 17'\ 45''$.

Kroženje točkastega telesa poznamo, če vemo, kolikšen je polmer kroženja r in, če poznamo časovni potek kota ϕ, $\phi(t)$. Ta dva podatka zadoščata, da v vsakem trenutku ugotovimo, kje je telo. Podobno, kot smo pri premem gibanju vpeljali hitrost in pospešek, vpeljemo tudi pri kroženju kotno hitrost in kotni pospešek. Zakaj je to potrebno bomo spoznali, ko bomo preučevali dinamiko kroženja.

Kotno hitrost ω definiramo kot spremembo kota s časom, $\omega = d\phi/dt$. Tu predstavlja dt kratek časovni interval, $d\phi$ pa spremembo kota ϕ v tem časovnem intervalu. Enota za kotno hitrost je s^{-1}, ali rds^{-1}. Če poznamo časovni potek kota ϕ, poznamo tudi časovni potek kotne hitrosti ω. Obratna zveza pa ni enolična, saj je kotna hitrost povezana s spremembo kota, ne pa s kotom samim. S pomočjo kotne hitrosti lahko izračunamo zasuk telesa $\Delta\phi$ v poljubnem časovnem intervalu. Vzemimo, da je to interval med časom t_1 in časom t_2. V tem časovnem intervalu se telo zasuka za

$$\Delta\phi = \phi(t_2) - \phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt \ .$$



Če pa v nekem trenutku poznamo kot, bomo lahko iz znanega časovnega poteka kotne hitrosti $\omega(t)$ določili časovni potek kota $\phi(t)$. Imenujmo čas, ob katerem poznamo kot ϕ, čas nič. Poznamo torej $\phi(0)$. Velja zveza:

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \omega(t)dt \; .$$

Kotni pospešek α definiramo kot spremembo kotne hitrosti s časom, $\alpha = d\omega/dt$. Tu je dt kratek časovni interval, $d\omega$ pa sprememba kotne hitrosti v tem časovnem intervalu. Enota za kotni pospešek je s^{-2}, ali rds^{-2}. Iz znanega časovnega poteka kotne hitrosti $\omega(t)$ lahko izračunamo časovni potek kotnega pospeška $\alpha(t)$. Obratna zveza pa podobno kot prej ni enolična. Iz znanega časovnega poteka kotnega pospeška $\alpha(t)$ lahko izračunamo spremembo kotne hitrosti $\Delta\omega$ v poljubnem časovnem intervalu. Zopet vzemimo, da je to interval med časom t_1 in časom t_2. V tem časovnem intervalu je sprememba kotna hitrosti $\Delta\omega$ enaka

$$\Delta\omega = \omega(t_2) - \omega(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)dt \; .$$

Časovni potek kotne hitrosti $\omega(t)$ pa lahko iz znanega časovnega poteka kotnega pospeška $\alpha(t)$ izračunamo, če poznamo kotno hitrost v nekem trenutku. Imenujmo ta trenutek čas nič pa velja:

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \alpha(t')dt' .$$

Oglejmo si sedaj dva posebna primera: enakomerno kroženje in enakomerno pospešeno kroženje.

Pri enakomernem kroženju je kotna hitrost ω stalna, kotni pospešek pa je enak nič. Kot ϕ se s časom spreminja kot

$$\phi(t) = \phi(0) + \omega t \; .$$

Če je kotna hitrost pozitivna, kot s časom narašča, če pa je kotna hitrost negativna, kot s časom pada. Pozitivna kotna hitrost torej ustreza sukanju v nasprotni smeri urinega kazalca, negativna kotna hitrost pa sukanju v smeri urinega kazalca. Telo naredi en zasuk v obhodnem času t_0. V tem času se kot spremeni za 2π, $\omega t_0 = 2\pi$. V slednji enačbi privzemimo, da je ω velikost kotne hitrosti, ki je pozitivna ne glede na to, v kateri smeri se telo suka. Poleg obhodnega časa ponavadi definiramo še frekvenco kroženja ν, kot število zasukov na enoto časa. Enota za frekvenco je s^{-1} ali Hz (hertz). Frekvenca je v naslednji zvezi z obhodnim časom t0: $\nu = 1/t_0$. Do te zveze pridemo s preprostim razmislekom. Če je obhodni čas 1/n sekunde, se bo telo v enoti časa (sekundi) n krat zasukalo. Frekvenca je torej ns^{-1}, kar je res enako $1/t_0$. Zveza med kotno hitrostjo ω in frekvenco ν je torej $\omega = 2\pi\nu$.

Kroženje s stalnim kotnim pospeškom α imenujemo enakomerno pospešeno kroženje. Pri tem kroženju sta časovna poteka kotne hitrosti in kota naslednja:

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha t$$

$$\phi(t) = \phi(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2 .$$

Iz enačb lahko izločimo čas in dobimo zvezo med kotno hitrostjo in zasukom,

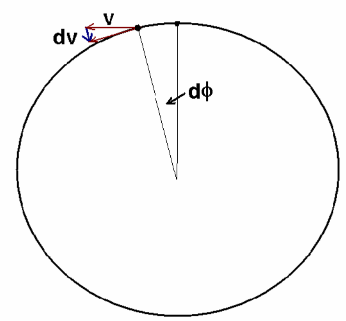
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\phi ,$$

v kateri čas eksplicitno ne nastopa. Tu je ω_0 kotna hitrost na začetku zasuka $\Delta\phi$, ω pa kotna hitrost na koncu zasuka. Enačbe so analogne enačbam, ki smo jih dobili pri enakomerno pospešenem premem gibanju.

Do sedaj smo se ukvarjali le s kotnimi količinami, Poglejmo, kako sta z njimi povezana hitrost in pospešek.

Pri kroženju je hitrost enaka prirastku loka l s časom, v = dl/dt. Ker pa je lok enak produktu polmera kroženja in kota, $l=r\phi$, dobimo $v = r\omega$. Krožilna, ali obodna hitrost v ima smer tangente na krožnico in je enaka produktu polmera kroženja in kotne hitrosti.

Več dela bomo imeli s pospeškom, saj se hitrost v splošnem spreminja po velikosti in po smeri. Oglejmo si najprej enakomerno kroženje, kjer se velikost hitrosti ne spreminja. V času dt se telo zasuka za kot $d\phi = \omega dt$. Pri tem se vektor hitrosti, ki ima tangentno smer, prav tako zasuka za kot $d\phi$. Sprememba vektorja hitrosti kaže proti središču kroženja in je po velikosti enaka $dv = v d\phi = v\omega dt$.



Pospešek, ki je povezan s spreminjanjem smeri hitrosti, imenujemo radialni ali centripetalni pospešek a_r. Usmerjen je proti središču kroženja in je po velikosti enak
$a_r = dv/dt = v\omega = \omega^2 r = v^2/r$.
Radialni pospešek nastopa pri vsakem kroženju, enakomernem in neenakomernem. Pri neenakomernem kroženju pa se spreminja tudi velikost obodne hitrosti $v = r\omega$. Časovni odvod velikosti obodne hitrosti, $dv/dt = r\alpha$, je enak velikosti tangentnega pospeška a_t. Kot že ime pove, ima tangentni pospešek smer tangente na krožnico. Nastopa le pri neenakomernem kroženju in je povezan s spreminjanjem velikosti hitrosti. Vektor pospeška pri kroženju je v splošnem vektorska vsota radialnega in tangentnega pospeška.

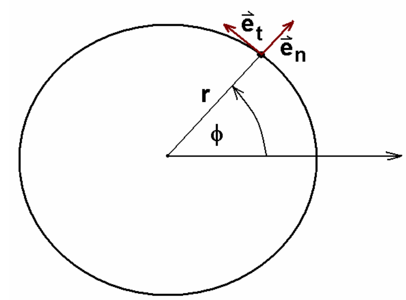
Mimogrede omenimo, da lahko vektor pospeška pri poljubnem krivem gibanju sestavimo iz dveh delov: pospeška v smeri tangente na tir delca, ki meri spreminjanje velikosti hitrosti in pospeška, usmerjenega pravokotno na tir, ki meri ukrivljenost tira.

Poglejmo še, kako bi kroženje obravnavali v kartezičnem koordinatnem sistemu z izhodiščem v središču kroga. Krajevni vektor telesa je enak

$$\vec{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi) = r\vec{e}_n.$$

Tu je $\vec{e}_n = (\cos\phi, \sin\phi)$ enotni vektor v smeri normale na krožnico. Hitrost telesa je enaka

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega(-\sin\phi, \cos\phi) = r\omega\vec{e}_t.$$



V slednji enačbi je $\vec{e}_t = (-\sin\phi, \cos\phi)$ enotni vektor v smeri tangente na krožnico.
Pospešek je enak odvodu hitrosti po času:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_t + r\omega\frac{d\vec{e}_t}{dt} = r\alpha\vec{e}_t - r\omega^2\vec{e}_n .$$

V prvem členu spoznamo tangentni pospešek, v drugem pa radialnega.

Za zaključek poglavja si oglejmo še pospešek, ki se pojavi, ko se pri kroženju spreminja polmer kroženja. Imenuje se Coriolisov pospešek. Za lažje razumevanje si predstavljajmo, da smo na vrteči se plošči, na kateri je v radialni smeri narisana črta. Ugotoviti nameravamo, kolikšen je naš pospešek, ko hodimo vzdolž te črte s hitrostjo v_r stran od osi vrtenja. Zunanji opazovalec opazi dvoje: spreminja se smer radialne hitrosti v_r in narašča naša obodna hitrost. Poglejmo najprej kolikšen je in kam kaže pospešek, ki je povezan s spreminjanjem smeri radialne hitrosti v_r. V času dt se plošča zasuka za kot $d\phi = \omega dt$. Za enak kot se za zunanjega opazovalca zasuka tudi vektor radialne hitrosti. Sprememba hitrosti dv, ki je s tem povezana, je po velikosti enaka $dv = v_r d\phi = v_r \omega dt$ in ima smer obodne hitrosti. Del pospeška, ki je povezan s spreminjanjem smeri radialne hitrosti je torej enak $dv/dt = v_r\omega$ in ima smer obodne hitrosti. Kot rečeno, se pri premikanju v radialni smeri spreminja tudi velikost obodne hitrosti. Če v času dt naraste polmer kroženja za $dr = v_r dt$, se pri tem poveča obodna hitrost za $dv = \omega dr = \omega v_r dt$. Sprememba vektorja hitrosti ima tudi v tem primeru smer obodne hitrost, z njo povezan pospešek pa je enak $dv/dt = \omega v_r$. Oba prispevka skupaj tvorita Coriolisov pospešek $a_{Cor} = 2\omega v_r$, ki ima pri naraščanju polmera kroženja smer obodne hitrosti, pri padanju polmera kroženja pa nasprotno smer. Sile, ki so povezane s Coriolisovim pospeškom, povzročajo značilno gibanje zračnih mas v okolici področja nizkega zračnega tlaka. Na severni zemeljski polobli se zračne mase sučejo v nasprotni smeri urinega kazalca, na južni polobli pa v smeri urinega kazalca.

Kot zgled obravnavajmo naslednji primer:

Opazujemo točko na obodu vztrajnika s polmerom 20 cm. V začetku opazovanja se vztrajnik vrti s frekvenco 60 Hz, čez 20 sekund pa s frekvenco 10 Hz. Predpostavimo, da je vrtenje vztrajnika v tem času enakomerno pojemajoče. Izračunajmo kotni pospešek, kot za katerega se zasuka vztrajnik v času opazovanja in število zasukov, pot ki jo opravi opazovana točka, hitrost in pospešek opazovane točke na začetku.

Kotni pospešek je enak $\alpha = \Delta\omega/\Delta t = 2\pi\Delta\nu/\Delta t = -5\pi\ s^{-2} = -15.7\ s^{-2}$

Kot zasuka $\Delta\phi$ najlaže izračunamo kot $\Delta\phi = \overline{\omega}\Delta t$. Pri enakomerno pospešenem (pojemajočem) vrtenju je povprečna kotna hitrost kar enaka polovici vsote začetne in končne kotne hitrosti: $\overline{\omega} = 2\pi.35\ s^{-1}$. Kot, za katerega se vztrajnik zasuka, je torej enak $\Delta\phi = 2\pi.35\ s^{-1}.20s = 1400\pi$ rd. Temu ustrezno število zasukov je $\Delta\phi/2\pi = 700$.

Pot opazovane točke je enaka poti enega obhoda ($2\pi r$) pomnoženi s številom zasukov: $s = 2\pi.0{,}2m.700 = 880$ m.

Hitrost opazovane točke na začetku je enaka $v = 2\pi.60\ s^{-1}.0{,}2\ m = 75{,}4\ ms^{-1}$.

Tangentni pospešek točke je enak $a_t = r\alpha = - 3{,}14\ ms^{-2}$.

Radialni pospešek a_r je enak: $a_r = v^2/r = 28400\ ms^{-2}$.

Skupni pospešek je skoraj enak radialnemu pospešku.

SILA, MASA, NEWTONOVI ZAKONI

Sila in masa

Silo spoznamo po njenih učinkih. Če hočemo nekemu telesu spremeniti hitrost je za to potrebna sila. Pri tem razumemo spreminjanje hitrosti po velikosti in po smeri. Sila povzroča tudi deformacije teles. Prožno deformacijo, na primer deformacijo vijačne vzmeti, lahko uporabimo za merjenje sile. Sile vedno povzročajo telesa. Opraviti imamo s silami ob stiku teles pa tudi s silami na daljavo. Kljub temu, da intuitivno vemo kaj je sila in jo tudi občutimo, moramo v fiziki silo najprej definirati.

Opazujmo gibanje pod vplivom stalne sile. Tako gibanje je na primer prosti pad. Da je teža v bližini zemlje res stalna sila lahko pokažemo z vzmetno tehtnico – dinamometrom. Kot smo že ugotovili z meritvijo, je prosti pad enakomerno pospešeno gibanje. Intuitivno tudi vemo, da s povečanjem sile povečamo pospešek. Če smer sile obrnemo, se obrne tudi smer pospeška. Privzamemo lahko, da je pospešek sorazmeren sili. Vendar pa pospešek ni odvisen le od sile. Vzemimo na primer dva različno dolga kosa krede in ju spustimo z enake višine. Oba kosa krede padeta istočasno na tla neodvisno od začetne višine. Pospešek je torej enak, čeprav je teža večjega kosa krede večja. Če je na primer večji kos krede dvakrat večji od manjšega je tudi teža dvakrat večja, pospešek pa je enak. Pospešek je torej odvisen še od neke količine, imenujemo jo masa, ki je pri homogeni snovi sorazmerna količini snovi. Pri konstantni sili pospešek z naraščanjem mase pada.

Preden bomo definirali silo, moramo torej definirati maso. Definirali jo bomo, kot je v fiziki navada, s pomočjo merilnega postopka in enote. Enota za maso – kilogram – je definirana z maso prakilograma, telesa iz zlitine platine in iridija, ki ga hranijo v Mednarodnem uradu za uteži in mere blizu Pariza. Kilogram je osnovna enota merskega sistema SI. Na osnovi tega primarnega standarda (prakilograma) so narejeni sekundarni, terciarni... standardi. Mednje sodijo uteži, katerih mase so enake več (2, 5, 10...) kilogramov, pa tudi enemu ali več delov kilograma (dag, g, mg,). Merilni postopek za merjenje mase je primerjanje teže merjenca in teže znanih uteži. Tako deluje na primer lekarniška tehtnica. Lahko pa z znanimi utežmi tehtnico (n. pr. vzmetno) umerimo in potem iz odziva tehtnice (deformacije vzmeti) določimo maso merjenca. V nerelativistični fiziki se masa telesa ne spremeni, če mu snovi ne odvzamemo ali dodamo. Velja torej zakon o ohranitvi mase.

Zdaj, ko smo definirali maso, lahko definiramo tudi silo, Definiramo jo s pomočjo pospeška ki ga povzroča, ko deluje na telo z maso m:

$F=ma.$

Maso znamo meriti, pospešek pa tudi. Enota za silo je produkt enote za maso in enote za pospešek ($kgms^{-2}$) in je po Isaacu Newtonu dobila ime newton (N):

$N = kgms^{-2}.$

Silo lahko merimo po definiciji, z merjenjem pospeška, ali pa na osnovi prožnih deformacij teles. Za vijačno vzmet na primer velja, da je raztezek s sorazmeren sili,

$F = ks,$

Pri čemer je k koeficient vzmeti.

Newtonovi zakoni

Osnovne ugotovitve v zvezi z delovanjem sil na telesa je strnil Isaac Newton v treh zakonih, ki jih imenujemo Newtonovi zakoni:

1. Telo miruje ali se giblje premo in enakomerno, če nanj ne deluje nobena sila.
2. Pospešek je sorazmeren sili in ima smer sile.
3. Če deluje prvo telo na drugo z neko silo, deluje drugo telo na prvo z enako veliko nasprotno silo.

Tretji zakon imenujemo zakon o akciji in reakciji oziroma zakon o vzajemnem učinku. V matematični obliki ga izrazimo kot

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}.$$

Drugi zakon, ki mu pravimo tudi osnovni zakon dinamike pa v matematični obliki zapišemo takole:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

V primeru, da je sil več, je vektorska vsota sil enaka produktu mase in pospeška:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

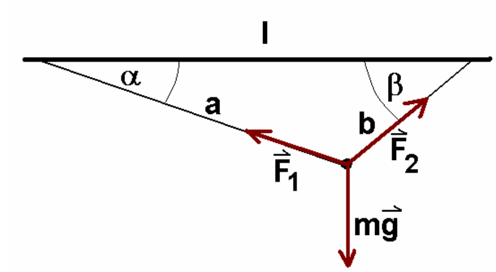
Z uvedbo koordinatnega sistema lahko gornjo vektorsko enačbo zapišemo kot tri skalarne enačbe:

$$\sum_i F_{ix} = ma_x \, , \sum_i F_{iy} = ma_x \, , \sum_i F_{iz} = ma_z \, .$$

Prvi Newtonov zakon pravzaprav sledi iz drugega. V primeru, ko je vektorska vsota sil enaka nič, je tudi pospešek enak nič. Hitrost telesa se ne spreminja, kar pomeni, da telo miruje, ali se giblje premo in enakomerno. Pomemben pa je prvi Newtonov zakon pri definiciji inercialnega sistema, to je sistema, v katerem velja drugi Newtonov zakon v prej omenjeni obliki.

Naredimo nekaj značilnih zgledov za uporabo Newtonovih zakonov.

Vzemimo, da majhno utež z maso m pritrdimo na lahki vrvici z dolžinama a in b. Prosta konca vrvic pritrdimo na vodoravni nosilec v razdalji l. Izračunajmo, s kolikšnima silama sta napeti vrvici?



Utež miruje, zato je po prvem Newtonovem zakonu vsota sil nanjo enaka nič. Na utež delujejo tri sile: dve kontaktni, ki ju povzročata vrvici in teža (sila na daljavo). Vsaka vrvica deluje s silo v svoji smeri. Vzemimo, da prva vrvica oklepa z vodoravno ravnino kot α in deluje na utež s silo F_1. Druga vrvica oklepa z vodoravno ravnino kot β in deluje na utež s silo F_2. To, da je vektorska vsota sil enaka nič pomeni, da je vsota projekcij sil na vodoravno ravnino enaka nič in, da je hkrati vsota projekcij sil na navpičnico enaka nič. V vodoravni smeri delujeta dve sili: $F_1\cos\alpha$ in $F_2\cos\beta$, ki sta nasprotno usmerjeni. Njuna vsota je nič, če je $F_1\cos\alpha = F_2\cos\beta$. V navpični smeri deluje navzdol teža mg, navzgor pa projekciji sil $F_1\sin\alpha$ in $F_2\sin\beta$. Velja torej:

$F_1 cos\alpha = F_2 cos\beta$

$F_1 sin\alpha + F_2 sin\beta = mg.$

Rešitev enačb sta sili

$F_1 = mgcos\beta/sin(\alpha+\beta)$

$F_2 = mgcos\alpha/sin(\alpha+\beta).$

Kota α in β izračunamo iz trikotnika s stranicami a, b in l s kosinusnim izrekom.

Na lahko vrvico dolžine l pritrdimo utež z maso m. Drugi konec vrvice pritrdimo na stojalo. Utež sunemo tako, da kroži v vodoravni ravnini, pri čemer oklepa vrvica z navpičnico kot α. Izračunajmo frekvenco kroženja in silo, s katero je napeta vrvica.

Utež enakomerno kroži. Pospešek uteži je torej $\omega^2 r$ in kaže proti središču kroženja. Pri tem je $r = l\sin\alpha$. Po drugem Newtonovem zakonu mora v vsakem trenutku proti središču kroženja kazati sila $m\omega^2 r$. Ta sila je projekcija sile vrvi na vodoravno ravnino, $F_v\sin\alpha$. V navpični smeri se utež ne giblje, zato mora biti vsota sil v tej smeri enaka nič: $mg = F_v\cos\alpha$. Iz slednje enačbe izračunamo silo vrvi, nato pa iz zveze $F_v\sin\alpha = m\omega^2 l\sin\alpha$ še kotno hitrost in frekvenco kroženja.

Sila lepenja in sila trenja

Če potiskamo telo, ki leži na vodoravni podlagi, z majhno silo se to ne premakne. Naši sili nasprotuje sila lepenja F_l. Šele, ko uporabimo dovolj veliko silo, se telo premakne. Potisna sila je presegla maksimalno silo lepenja. Meritve kažejo, da je maksimalna sila lepenja sorazmerna sili F_p, s katero pritiska telo na podlago:

$(F_l)_{max} = k_l F_p.$

Tu je k_l koeficient lepenja, ki je odvisen od materialov in obdelave površin.

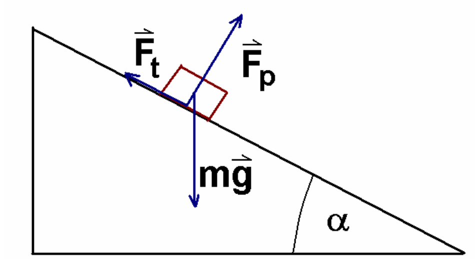
Ko potisna sila preseže maksimalno silo lepenja se začne telo premikati, pri čemer deluje v nasprotni smeri gibanja sila trenja F_t. Tudi sila trenja je sorazmerna sili F_p, s katero pritiska telo na podlago,

$F_t = k_t F_p$.

Koeficient trenja k_t ni konstanten, ampak se šibko spreminja s hitrostjo drsenja. Mi bomo v računih predpostavili, da k_t ni odvisen od hitrosti drsenja.

Trenje in lepenje nastopa tudi pri kotaljenju. Tu sta maksimalna sila lepenja in sila trenja še vedno sorazmerni sili F_p, koeficienta lepenja in trenja pa sta manjša, kot pri drsenju.

Kot zgled si oglejmo drsenje klade po klancu z nagibom α.



Na klado delujeta sila teže mg in sila podlage. Silo podlage bomo razstavili na dve sili: pravokotno silo podlage F_p in silo trenja F_t. Ker se klada giblje vzdolž klanca, je vsota sil pravokotno na klanec enaka nič. Projekcija teže na to smer, $mg\cos\alpha$, je enaka sili F_p. Gibanje vzdolž klanca pospešuje projekcija teže na to smer, $mg\sin\alpha$, nasprotuje pa ji sila trenja $F_t = k_t F_p = k_t mg\cos\alpha$. Po drugem Newtonovem zakonu je torej

$mg\sin\alpha - k_t mg\cos\alpha = ma$.

Pospešek je enak $a = g(\sin\alpha - k_t\cos\alpha)$. Pospešeno drsenje vzdolž klanca dobimo, ko je projekcija teže na smer klanca večja od sile trenja. V nasprotnem primeru gornja enačba opisuje ustavljanje na klancu.

Oglejmo si naslednji primer. Po klancu z nagibom $\alpha = 30^0$ sunemo v smeri navzgor telo z maso m. Začetna hitrost telesa je 10 m/s. Koeficient trenja med klancem in telesom je 0.1. Kako daleč od začetne lege se telo ustavi? Kolikšna je hitrost telesa, ko se ponovno giblje skozi začetno lego?

Najprej obravnavajmo gibanje po klancu navzgor. Projekcija teže na smer klanca in sila trenja sta usmerjeni v nasprotni smeri gibanja. Zato je pospešek

$a = -g\sin\alpha - k_t g\cos\alpha$.

Iz zveze med kvadratom hitrosti, pospeškom in premikom izračunamo

$s = -v_0^2/2a = v_0^2/2g(\sin\alpha + k_t\cos\alpha) = 8.5\ m$.

Pri gibanju navzdol je pospešek

$a = g\sin\alpha - k_t g\cos\alpha$.

Kvadrat hitrosti v začetni točki je enak $v^2 = 2as = v_0^2(\sin\alpha - k_t\cos\alpha)/(\sin\alpha + k_t\cos\alpha)$, hitrost pa je enaka v = 8.4 m/s.

Inercialni in neinercialni sistemi

Drugi Newtonov zakon velja v taki obliki, kot smo ga zapisali, samo v inercialnih sistemih, ki jih definira prvi Newtonov zakon. Vprašanje je, kakšne enačbe gibanja

veljajo sistemih ki niso inercialni. Neinercialni sistemi so običajno pospešeni sistemi (dvigalo, avtobus, vrtiljak...). V teh sistemih mirujoča telesa občutijo silo
$F_s = - ma_s$.
Tu je a_s pospešek sistema F_s pa se imenuje sistemska sila. Na vrtiljaku je pospešek (radialni) usmerjen proti središču kroženja, opazovalec na sedežu pa občuti sistemsko (centrifugalno) silo v nasprotni smeri. Ko avtobus pospeši občuti potnik sistemsko silo v nasprotni smeri pospeška.

V neinercialnem sistemu zapišemo drugi Newtonov zakon tako, da pravim silam dodamo še sistemsko silo:

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_s = m\vec{a}.$$

Primer sistemske sile je tudi Coriolisova sila. Ta je enaka $F_{Cor} = -2\omega v_r$. Posledica Coriolisove sile je smer gibanja zračnih mas v okolici področja nizkega zračnega tlaka in morskih tokov. Na severni zemeljski polobli se cikloni vrte v nasprotni smeri urinega kazalca, morski tokovi pa v smeri urinega kazalca. Na južni zemeljski polobli pa je ravno obratno. Cikloni se vrte v smeri urinega kazalca, morski tokovi pa v nasprotni smeri urinega kazalca. Zaradi Coriolisove sile je treba popraviti tudi smer topovskih izstrelkov večjega dometa. Angleška mornarica je v bitki pri Falklandih v I. svetovni vojni uporabila te popravke, granate pa so zgrešile cilj za okrog 100 m. Drobna težava je bila v tem, da so bili popravki izračunani za severno zemeljsko poloblo, ne pa za južno poloblo, kjer ima Coriolisova sila ravno nasprotno smer.

IZREK O KINETIČNI ENERGIJI

Pri študiju gibanja teles pod vplivom sil nas pogosto eksplicitna časovna odvisnost lege in hitrosti ne zanima. Bolj nas zanima zveza med hitrostjo in lego. V tem primeru nam pogosto koristi izrek o kinetični energiji. Do tega izreka pridemo z integracijo drugega Newtonovega zakona. Vzemimo, da opazujemo gibanje točkastega telesa kratek čas dt. V tem času se hitrost telesa spremeni za $d\vec{v}$, telo pa se premakne za $d\vec{s}$. Pomnožimo drugi Newtonov zakon s premikom $d\vec{s}$:

$$\vec{F}d\vec{s} = m\vec{a}d\vec{s}. \qquad (1)$$

Tu je $\vec{F}$ vektorska vsota vseh sil, ki delujejo na telo. Desno stran enačbe preuredimo. Ker je $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, lahko skalar dt prenesemo k vektorju $d\vec{s}$ in dobimo:

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)d\vec{s} = md\vec{v}\left(\frac{d\vec{s}}{dt}\right) = m\vec{v}d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Upoštevali smo, da je $v^2 = \vec{v}.\vec{v}$ in da je diferencial tega izraza enak $dv^2 = d\vec{v}.\vec{v} + \vec{v}.d\vec{v} = 2\vec{v}d\vec{v}$. Enačbo (1) zapišemo kot

$$\vec{F}d\vec{s} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

njen pomen pa je naslednji. Delo sile dA pri tem majhnem

premiku, $dA = \vec{F}.d\vec{s} = Fds\cos\varphi$, je enako spremembi kinetične energije W_k, $W_k = \frac{mv^2}{2}$.

Tu je φ kot med smerjo sile in smerjo premika. Večji premik iz točke (1) v točko (2) sestavimo iz majhnih premikov. Pri tem je delo sile A enako

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}.d\vec{s}, \qquad (2)$$

vsota sprememb kinetične energije pa razliki med kinetično energijo telesa v točki (2), W_{k2}, in kinetično energijo telesa v točki (1), W_{k1}. Na ta način smo dobili izrek o kinetični energiji ki pravi, da je delo vseh sil, ki delujejo na telo pri nekem premiku enako spremembi kinetične energije:

$A = W_{k2} - W_{k1}$.

Delo sile izračunamo po enačbi (2). Ko je sil več, se dela posameznih sil seštejejo. Če deluje sila na telo v smeri gibanja, je delo pozitivno in kinetična energija telesa narašča. Z naraščanjem kinetične energije narašča tudi velikost hitrosti telesa. Če deluje sila v nasprotni smeri gibanja, je delo negativno in kinetična energija telesa pada. Ko pa je sila usmerjena pravokotno na smer gibanja, se kinetična energija ohranja, saj je delo enako nič. Primer take sile je centripetalna sila pri kroženju, ki spreminja smer hitrosti, njeno velikost pa ohranja.

Oglejmo si še enoto za delo sile in kinetično energijo. Iz gornjih zvez vidimo, da je ta enota Nm oziroma kgm^2s^{-2}. Po angleškem fiziku Joulu se ta enota imenuje joule, označimo pa jo z J: J = kgm^2s^{-2}.

Za ilustracijo uporabe izreka o kinetični energiji si oglejmo naslednji zgled.

Telo porinemo na hrapavi vodoravni podlagi tako, da dobi v začetni točki hitrost v_0. Kako daleč od začetne točke se telo ustavi?

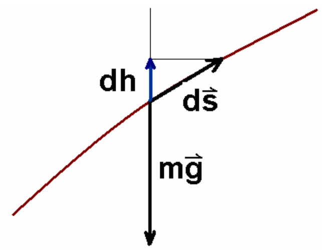
Za točko (1) premika vzemimo začetno točko, v kateri je kinetična energija telesa enaka $W_{k1} = \frac{mv_0^2}{2}$. Za točko (2) vzamemo točko, v kateri se telo ustavi. V tej točki je njegova kinetična energija enaka nič, $W_{k2} = 0$. Razdaljo med tema dvema točkama imenujmo s. Med premikom iz točke (1) v točko (2) deluje na telo v nasprotni smeri gibanja sila trenja, ki je po velikosti enaka $k_t mg$, njeno delo pa je enako $A = -k_t mgs$. Sila teže in pravokotna sila podlage sta enako veliki in nasprotno usmerjeni pa še pravokotni sta na smer premika. Njuno delo je seveda enako nič. Izrek o kinetični energiji pove:

$$-k_t mgs = 0 - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Pot, ki jo opravi telo je enaka $mv_0^2/2k_t g$. Do tega rezultata bi na preprost način lahko prišli tudi z uporabo drugega Newtonovega zakona. Primere, ki bodo pokazali uporabnost izreka o kinetični energiji bomo srečali pozneje.

Teža je v naši okolici vedno prisotna, zato jo bomo obravnavali posebej. Oglejmo si delo teže pri premiku točkastega telesa iz točke (1), ki je v višini h_1 nad izbranim nivojem v točko (2), ki je v višini h_2 nad izbranim nivojem po poljubni poti. Delo teže pri premiku $d\vec{s}$ je enako

$dA_g = m\vec{g}.d\vec{s} = -mgdh.$



Tu je dh sprememba višine telesa pri premiku $d\vec{s}$. Delo teže dA_g je neodvisno od velikosti projekcije vektorja $d\vec{s}$ na vodoravno ravnino. Pri premiku iz točke (1) v točko (2) je delo teže enako

$A_g = -mg(h_2 - h_1) = mgh_1 - mgh_2.$

Delo teže je odvisno samo od spremembe višine pri premiku, neodvisno pa je od poti. Sile, katerih delo je odvisno samo od začetne in končne točke premika, ni pa odvisno od poti, imenujemo konservativne sile. Konservativni sili sta gravitacija in električna sila, a o tem pozneje. Delo konservativne sile A_k pri premiku telesa iz točke (1) v točko (2) v splošnem zapišemo kot spremembo potencialne energije W_p:

$A_k = W_{p1} - W_{p2}.$

Tu je W_{p1} potencialna energija v točki (1), W_{p2} pa potencialna energija v točki (2). Teži pripišemo potencialno energijo

$W_p = mgh.$

Od katerega nivoja merimo višino h je stvar naše izbire. Ko smo ga izbrali, moramo vse višine meriti od tega nivoja. V tej poljubni izbiri nivoja se skriva še ena lastnost potencialne energije. Ta je namreč nedoločena do konstante, ki si jo lahko poljubno izberemo. Ko smo jo izbrali pa se moramo te izbire držati. Pri računanju dela konservativne sile se namreč navedena konstanta odšteje.

Poglejmo, kako se z upoštevanjem dela teže zapiše izrek o kinetični energiji. Zapišimo delo vseh sil A kot

$A = Ag + A' = Wp1 - Wp2 + A'.$

Tu je A' delo vseh sil razen teže. Izrek o kinetični energiji sedaj zapišemo kot

$A' = (Wk2 + Wp2) - (Wk1 + Wp1).$

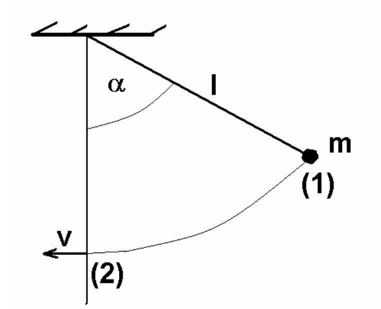
Delo vseh sil razen teže je enako spremembi vsote kinetične in potencialne energije. Posebej zanimivi so primeri, ko je delo preostalih sil A' enako nič. Tedaj se namreč vsota kinetične in potencialne energije ohranja:

$W_{k2} + W_{p2} = W_{k1} + W_{p1}.$

Pri prostem padu kinetična energija telesa raste, potencialna energija pa pada. Njuna vsota je konstantna, če ne upoštevamo zračnega upora.

Oglejmo si zgled, pri katerem bi imeli z neposredno uporabo drugega Newtonovega zakona precej več dela.

Na lahki vrvi dolžine l je obešena majhna utež z maso m. Utež izmaknemo iz ravnovesne lege tako, da oklepa vrv z navpičnico kot α in spustimo. S kolikšno hitrostjo se giblje utež skozi ravnovesno lego?



V ravnovesni legi je vrv navpična. Točka (1) naj bo točka iz katere smo utež spustili, točka (2) pa naj predstavlja ravnovesno lego. Kinetična energija v točki (1) je enaka nič, v točki (2) pa je enaka $mv^2/2$, pri čemer hitrosti v še ne poznamo. Na utež delujeta teža in sila vrvi. Delo teže bomo opisali s pomočjo potencialne energije, delo sile vrvi pa je enako nič. Sila vrvi ima namreč radialno smer in je vedno pravokotna na smer premika, ki ima tangentno smer. Delo A' je torej enako nič. Vsota kinetične in potencialne energije se ohranja. Pri določanju potencialne energije si moramo izbrati nivo, od katerega bomo merili višino. Naj bo to nivo pritrdišča vrvi. Glede na ta nivo je $h_1 = -l\cos\alpha$ in $h_2 = -l$. Vsota kinetične in potencialne energije v točki (1) je enaka vsoti kinetične in potencialne energije v točki (2):

$-mgl\cos\alpha = mv^2/2 - mgl.$

Iz te enačbe dobimo $v^2 = 2gl(1-\cos\alpha) = 4gl\sin^2(\alpha/2)$. S korenjenjem tega izraza dobimo hitrost uteži v ravnovesni legi.

Naredimo še en zgled.

Z balkona višine h vržemo kamen z začetno hitrostjo v_0 pod kotom α glede na vodoravno ravnino. S kolikšno hitrostjo zadene kamen tla?

Ne vprašamo se niti kdaj zadene kamen tla, niti kje in pod kakšnim kotom. Zanima nas le njegova hitrost, tik preden zadene tla. Zopet bomo uporabili izrek o kinetični energiji in zračni upor zanemarili. Točka (1) naj bo začetna točka kamna točka (2) pa tista v kateri kamen zadene tla. Nivo, od katerega merimo višino, izberimo na tleh. V točki (1) je potem kinetična energija kamna $mv_0^2/2$, potencialna pa mgh. V točki (2) je kinetična energija kamna $mv^2/2$, potencialna pa nič. Ker se vsota energij ohranja velja

$mv^2/2 = mv_0^2/2 + mgh$

oziroma, $v^2 = v_0^2 + 2gh$. Hitrost kamna je neodvisna od kota α. Od kota α pa je seveda odvisna dolžina leta, mesto kjer kamen zadene tla in kot pod katerim kamen zadene tla.

S pomočjo energije lahko opišemo tudi delo prožnostnih sil. Tu bomo obravnavali samo delo sile vijačne vzmeti. Vzemimo, da je začetni raztezek vzmeti s_1. Oglejmo si kolikšno delo opravi sila vzmeti, ko povečamo raztezek z začetne vrednosti s_1 na vrednost s_2. Sila vzmeti je v splošnem enaka $F_v = -ks$. Tu je k koeficient vzmeti, minus v tem izrazu pa pomeni, da je sila vzmeti nasprotna raztezku. Delo sile vzmeti A_v je enako:

$$A_v = \int_{s_1}^{s_2} F_v ds = -\int_{s_1}^{s_2} ks ds = \frac{ks_1^2}{2} - \frac{ks_2^2}{2}.$$

Delo je odvisno samo od začetnega in končnega raztezka vzmeti in ga zapišimo kot razliko prožnostnih energij

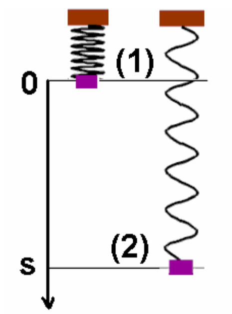
$A_v = W_{pr1} - W_{pr2}.$

Tu je

$W_{pr} = ks^2/2$.
Prožnostna energija za razliko od potencialne energije ni nedoločena do konstante in je vedno večja, ali enaka nič. Nič je enaka tedaj, ko vzmet ni deformirana.

Z upoštevanjem prožnostne energije zapišemo izrek o kinetični energiji na naslednji način:
$A'' = (W_{k2} + W_{p2} + W_{pr2}) - (W_{k1} + W_{p1} + W_{pr1})$.
Tu je A" delo vseh sil razen teže in prožnostnih sil. V primeru, ko je A" enako nič se mehanska energija, ki je v tem primeru vsota kinetične, potencialne in prožnostne energije, ohranja:
$W_{k2} + W_{p2} + W_{pr2} = W_{k1} + W_{p1} + W_{pr1}$.

Kot zgled vzemimo utež z maso m, ki jo pritrdimo na spodnji konec navpično obešene vzmeti s koeficientom k. V začetku držimo utež v legi, v kateri vzmet ni deformirana, nato pa jo spustimo. Vprašajmo se, kolikšna je hitrost uteži v legi, ki je za s nižja od začetne lege.



Če zanemarimo zračni upor, delujeta na utež le teža in sila vzmeti. Delo obeh sil opišemo s spremembo potencialne in prožnostne energije. Delo A" je enako nič. Lega (1) naj bo začetna lega uteži, lega (2) pa spodnja lega. Nivo, od katerega merimo višino, izberimo tako, da je v zgornji legi potencialna energija enaka nič. V zgornji legi so torej kinetična, potencialna in prožnostna energija enake nič. V spodnji legi je kinetična energija $mv^2/2$, potencialna energija $-mgs$ in prožnostna energija $ks^2/2$. Ker se mehanska energija ohranja, mora biti tudi v spodnji legi vsota kinetične, potencialne in prožnostne energije enaka nič:
$mv^2/2 - mgs + ks^2/2 = 0$.
Iz te enačbe izračunamo hitrost v kot funkcijo premika s:

$$v = \sqrt{2gs - \frac{k}{m}s^2}\ .$$

Iz te enačbe lahko nadalje izračunamo najnižjo lego (v=0) in lego, v kateri je hitrost uteži največja (dv/ds = 0).

Za zaključek poglavja obravnavajmo moč. Sila, ki jo na primer povzroča motor, lahko opravi delo v daljšem ali krajšem času. Močnejši motor bo dvignil enako breme za enako višino v krajšem času kot šibkejši. Kaj je pravzaprav moč?

Moč definiramo kot delo na enoto časa:
$P = dA/dt$.
Če je moč stalna jo lahko zapišemo tudi kot $P = A/t$. Enota za moč je watt (W), $W = Js^{-1} = kgm^2s^{-3}$. Iz gornje zveze sledi, da je delo enako

$A = \int P dt.$

Delo, predvsem električno, pogosto podajamo v kilovatnih urah (kWh).
V mehaniki je moč, ki jo prejema telo, na katerega deluje sila $\vec{F}$, enaka

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}.$$

Moč je lahko pozitivna, ali negativna. Če se prijemališče sile giblje v smeri sile, je moč pozitivna in telo prejema delo. Če se prijemališče sile giblje v nasprotni smeri sile, je moč negativna in telo oddaja delo. V primeru, ko prijemališče sile miruje, sila ne opravlja nobenega dela in je moč enaka nič.

Kot zgled izračunajmo moč, ki je potrebna, da breme z maso 1000kg dvigamo s hitrostjo 1m/s.

Sila F, ki deluje na pritrdišče, je pri enakomernem dviganju enaka teži, ki je približno 10^4 N. Potrebna moč je $P = Fv = 10\ kW$. V resnici mora biti moč motorja večja, saj noben motor nima 100% izkoristka. .

IZREK O GIBALNI KOLIČINI

Obravnavali bomo točkast delec in sistem točkastih delcev ter trke med njimi. Najprej integrirajmo drugi Newtonov zakon po času:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int m d\vec{v} = m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 .$$

Zvezo imenujemo izrek o gibalni količini. Integralu na levi strani pravimo sunek sile. Če je sil več, se sunki sil vektorsko seštejejo. Produkt mase in hitrosti, $m\vec{v}$, označimo s črko $\vec{G}$ in imenujemo gibalna količina. Sunek sile je torej enak spremembi gibalne količine. Enačba je vektorska. Če je sunek sil v neki smeri enak nič, se v tej smeri gibalna količina telesa ne spremeni.

Iz diferencialne oblike izreka o gibalni količini $\vec{F} dt = d\vec{G}$
dobimo malo drugačen zapis 2. Newtonovega zakona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Če je masa konstantna, je desna stran enačbe enaka $m\vec{a}$. Gornja zveza velja tudi v posebni teoriji relativnosti, ko masa ni konstantna.

Oglejmo si preprost zgled. Na telo z maso m, ki v začetku miruje, začne ob času nič delovati časovno odvisna sila $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$. Kakšna je odvisnost hitrosti telesa od časa?

Hitrost telesa se spreminja v smeri sile. V tej smeri velja mv(t) = $\int_0^t F dt = F_0\tau(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Hitrost telesa se torej s časovno konstanto τ eksponentno približuje vrednosti $F_0\tau/m$.

Oglejmo si še en primer. Vzemimo, da z višine h skočimo na tla. Ustavljanje na tleh naj traja čas Δt. Kolikšno povprečno silo podlage občutimo med ustavljanjem?

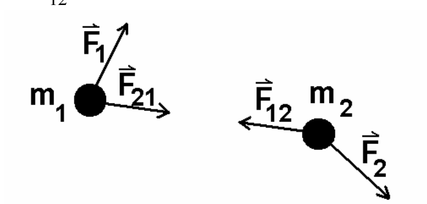
Preden smo se dotaknili tal je naša hitrost narasla na vrednost $v_0 = \sqrt{2gh}$. Med ustavljanjem pade hitrost z vrednosti v_0 na nič v času Δt. Med ustavljanjem delujeta na nas dve sili: pravokotna sila podlage F_p navpično navzgor in teža navpično navzdol. Če za pozitivno smer gibanja vzamemo smer navpično navzdol, je sprememba gibalne količine enaka $-mv_0$, sunek sile pa mgΔt - $\int_0^{\Delta t} F_p dt = mg\Delta t - \overline{F}_p \Delta t.$ Povprečno silo podlage, $\overline{F}_p$, smo definirali kot $\overline{F}_p = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} F_p dt$. Predpostavili smo namreč, da sila podlage ni povsem neodvisna od časa. Izrek o gibalni količini pove, da je povprečna sila podlage enaka

$$\overline{F}_p = mg + \frac{mv_0}{\Delta t}.$$

Pri skoku z višine 2 m in času ustavljanja 0.2 s je povprečna sila podlage enaka 4.2 mg.

Obravnavajmo sistem točkastih teles. Sile, ki delujejo v sistemu točkastih teles razdelimo na zunanje in notranje sile. Zunanje sile povzročajo telesa iz okolice, notranje sile pa so sile med telesi iz sistema.

Lotimo se najprej najpreprostejšega sistema dveh teles. Na prvo telo z maso m_1 naj deluje zunanja sila $\vec{F}_1$ in notranja sila $\vec{F}_{21}$. Na drugo telo z maso m_2 naj deluje zunanja sila $\vec{F}_2$ in notranja sila $\vec{F}_{12}$.



Zapišimo izrek o gibalni količini za obe telesi v časovnem intervalu od časa t_1 do časa t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21})dt = m_1\vec{v}_1(t_2) - m_1\vec{v}_1(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12})dt = m_2\vec{v}_2(t_2) - m_2\vec{v}_2(t_1)$$

Enačbi seštejmo pa dobimo

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)dt = (m_1\vec{v}_1(t_2) + m_2\vec{v}_2(t_2)) - (m_1\vec{v}_1(t_1) + m_2\vec{v}_2(t_1)) = \vec{G}(t_2) - \vec{G}(t_1).$$

Z $\vec{G} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ smo označili gibalno količino sistema. Upoštevali smo, da velja tretji Newtonov zakon in da je zato $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, sunka notranjih sil pa se odštejeta. Gornja enačba pove, da na gibalno količino sistema vplivajo samo zunanje sile. Notranje sile sicer vplivajo na gibalne količine posameznih teles, ne vplivajo pa na gibalno količino sistema. Mi smo zaenkrat obravnavali samo preprost sistem dveh teles. Če je v sistemu več teles osnovne ugotovitve ostanejo. Gibalno količino sistema definiramo kot vektorsko vsoto gibalnih količin posameznih teles. Na gibalno količino sistema vplivajo samo zunanje sile, sunki notranjih sil pa se paroma odštejejo. Če zunanjih sil ni, ali če je sunek zunanjih sil enak nič, se gibalna količina sistema teles ohranja. To imenujemo zakon o ohranitvi gibalne količine. Velja tudi, da če je sunek zunanjih sil v dani smeri enak nič, se projekcija gibalne količine sistema na to smer ohranja.

Poglejmo še, kako je z izrekom o kinetični energiji v sistemu točkastih teles. Kinetično energijo sistema definiramo kot vsoto kinetičnih energij posameznih teles. Delo sil je enako delu zunanjih in notranjih sil. Oglejmo si delo notranjih sil na primeru para notranjih sil med telesoma 1 in 2. Delo notranjih sil dA_n pri majhnem premiku teles je enako

$$dA_n = \vec{F}_{21}d\vec{s}_1 + \vec{F}_{12}d\vec{s}_2 = \vec{F}_{12}(d\vec{s}_2 - d\vec{s}_1).$$

Če zapišemo $d\vec{s}_2 = d\vec{s}_1 + d\vec{s}$ predstavlja $d\vec{s}$ premik drugega telesa glede na prvo. Delo notranje sile je enako $dA_n = \vec{F}_{12}d\vec{s}$. Če je notranja sila centralna, kar pomeni, da ima smer zveznice med telesoma, je delo notranjih sil enako nič, ko se razdalja med telesoma ne spremeni. To pa pomeni, da je sistem dveh teles tog. Lahko se le suka. Električna sila, ki je odgovorna za strukturo snovi je centralna sila. Podobno sklepanje, kot v primeru dveh točkastih teles, velja tudi v primeru večjega števila teles. Ko je sistem tog, kar pomeni, da se razdalje med telesi ne spreminjajo, je delo notranjih sil enako nič. Tog sistem točkastih teles imenujemo togo telo.

Vrnimo se k izreku o gibalni količini. Oglejmo si popolnoma neprožen trk dveh teles v eni razsežnosti, pri katerem se gibajoče telo z maso m_1 in hitrostjo v_0 zaleti v mirujoče telo z maso m_2, Telesi se sprimeta in se po trku gibljeta skupaj s hitrostjo v.

Med trkom deluje samo notranja sila med telesoma, zato se gibalna količina ohranja. Začetna gibalna količina m_1v_0 mora biti enaka gibalni količini po trku $(m_1+m_2)v$. Iz tega izračunamo hitrost v:

$$v = m_1v_0/(m_1+m_2).$$

Če sta masi enaki, je končna hitrost ravno polovica začetne. Poglejmo še, kako je s kinetično energijo. Kinetična energija pred trkom je enaka $W_{k0} = m_1v_0^2/2$. Po trku je kinetična energija enaka $W_k = (m_1+m_2)v^2/2 = [m_1/(m_1+m_2)]W_{k0}$. Kinetična energija sistema torej pade za faktor $m_1/(m_1+m_2)$, kar je posledica dela notranje sile med trkom.

Kot nasprotje si oglejmo popolnoma prožen trk dveh teles v eni razsežnosti. Podobno kot prej telo z maso m_1 in hitrostjo v_0 trči v mirujoče telo z maso m_2. Drugo telo se po trku giblje v isti smeri, kot se je pred trkom gibalo prvo s hitrostjo v_2. V kateri smeri se po trku giblje prvo telo in s kolikšno hitrostjo (v_1)ne vemo. Izkušnja nas uči da, ko težje telo trči v lažje, se po trku obe telesi gibljeta v isti smeri. Ko lažje telo trči v težje, se odbije in se po trku giblje v nasprotni smeri kot pred trkom. Pri tem popolnoma elastičnem trku se ohranja gibalna količina in kinetična energija:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_0$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_0^2}{2}.$$

Iz teh dveh enačb izračunamo hitrosti v_1 in v_2:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0 \qquad \text{in} \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0 .$$

Če trčita telesi z enakima masama, prvo telo po trku obmiruje, drugo telo pa se giblje v isti smeri in z enako hitrostjo, kot se je pred trkom premikalo prvo. Tedaj je tudi prenos kinetične energije s prvega na drugo telo največji.

V splošnem trki niso niti idealno prožni, niti popolnoma neprožni. V vsakem primeru se ohranja gibalna količina.

Oglejmo si še, kako je s trki v dveh razsežnostih. Če sta se pred trkom telesi gibali po isti premici, ali pa je eno telo mirovalo in je trk centralen, se po trku telesi še vedno gibljeta po isti premici in ga lahko obravnavamo kot trk v eni razsežnosti. Za zgled obravnavajmo naslednji primer.

Na vodoravni hrapavi podlagi telo z maso 1 kg centralno trči v mirujoče telo z maso 2 kg. Tik pred trkom je hitrost lažjega telesa 4 m/s, tik po trku pa je hitrost težjega telesa 2.5 m/s. Količnik trenja je za obe telesi enak 0.1. Kako daleč narazen sta telesi, ko se ustavita?

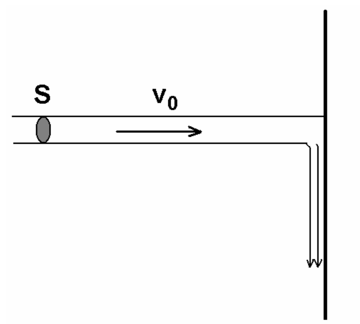
Vzemimo, da označimo hitrost prvega telesa pred trkom z v_0 po trku pa z v_1. Hitrost drugega telesa po trku označimo z v_2. Pri trku se ohranja gibalna količina, zato je $m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$.

Iz te enačbe izračunamo hitrost v_1: $v_1 = v_0 - (m_2/m_1)v_2 = -1$ m/s. Prvo telo se odbije od drugega in giblje v nasprotni smeri s hitrostjo 1 m/s. Pot, ki jo naredi prvo telo po trku, je enaka $s_1 = v_1^2/2gk_t = 0.5$ m, drugo telo pa naredi pot $s_2 = v_2^2/2gk_t = 3.13$ m . Ko se telesi ustavita je med njima razdalja enaka $s_1 + s_2 = 3.63$ m.

V primeru ko trk v dveh razsežnostih ni centralen, je treba upoštevati, da se ohranja vektor gibalne količine. Pri tem je v splošnem treba določiti štiri neznanke: v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} in v_{2y}. Iz zakona o ohranitvi gibalne količine dobimo dve enačbi. Še dve enačbi povezani s smerjo gibanja po trku ali kinetično energijo sta potrebni, da lahko izračunamo neznani hitrosti.

Oglejmo si, kako lahko centralni trk gibajočega telesa z maso m_1 in hitrostjo v_0 v mirujoče telo z maso m_2 opišemo iz gibajočega opazovalnega sistema. Predpostavljamo seveda, da sta oba opazovalna sistema inercialna in, da zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi kinetične energije (pri popolnoma prožnem trku) veljata v obeh inercialnih sistemih. Vzemimo, da se gibajoči koordinatni sistem giblje v isti smeri, kot se v »originalnem« opazovalnem sistemu giblje prvo telo, s hitrostjo v. V tem opazovalnem sistemu je pred trkom hitrost prvega telesa enaka $(v_0 - v)$, hitrost drugega telesa pa $-v$. Skupna gibalna količina obeh teles je enaka $m_1(v_0-v)-m_2v$. Posebej zanimiv je težiščni koordinatni sistem, v katerem je skupna gibalna količina enaka nič. To je sistem, ki se giblje s hitrostjo $v = m_1v_0/(m_1+m_2)$. V tem –težiščnem- opazovalnem sistemu je hitrost prvega telesa enaka $v_0m_2/(m_1+m_2)$, hitrost drugega telesa pa $-v_0m_1/(m_1+m_2)$. Če je trk popolnoma neelastičen, se telesi po trku sprimeta in sprimek v težiščnem sistemu obmiruje, V primeru, ko je trk popolnoma elastičen, je v težiščnem sistemu hitrost prvega telesa po trku enako velika in nasprotna hitrosti tega telesa pred trkom: $v_1 = -v_0m_2/(m_1+m_2)$. Enako velja za hitrost drugega telesa v_2, $v_2 = v_0m_1/(m_1+m_2)$.

Z izrekom o gibalni količini lahko obravnavamo tudi silo curka. Vzemimo, da curek kapljevine s presekom S , ki se s hitrostjo v_0 giblje proti mirujoči steni, zadeva steno in ob njej zdrsi na tla.



V času Δt trči ob steno kapljevina z maso $\Delta m = \rho S v_0 \Delta t$. Pri tem se ji hitrost v smeri gibanja po velikosti spremeni za v_0. Sprememba gibalne količine kapljevine je $\Delta G = \Delta m v_0 = \rho S v_0^2 \Delta t$, povzroči pa jo sila stene. Enako velika in nasprotna je sila kapljevine na steno, ki je enaka $F = \Delta G/\Delta t = \rho S v_0^2$. V primeru, ko je stena tako oblikovana da se kapljevina odbije od nje s hitrostjo v_1, se sila poveča:
$F = \rho S v_0(v_0+v_1)$. Delo te sile je seveda enako nič, saj se prijemališče sile ne premika. V primeru, ko se stena premika v smeri gibanja curka s hitrostjo v, se spremeni masa kapljevine Δm, ki v času Δt zadene steno. Ker se kapljevina giblje proti steni s hitrostjo $v_0 - v$, je $\Delta m = \rho S(v_0-v)\Delta t$. Tudi sprememba hitrosti je enaka $v_0 - v$, če predpostavimo, da kapljevina zdrsi ob steni na tla. Sprememba gibalne količine ΔG kapljevine v času Δt je enaka $\rho S(v_0-v)^2\Delta t$. Sila na steno je torej $F = \Delta G/\Delta t = \rho S(v_0-v)^2$, moč pa je v tem primeru $P = Fv = \rho S(v_0-v)^2 v$. Moč je enaka nič, ko stena miruje in ko se stena giblje s hitrostjo curka. Največjo moč dobimo, ko je $v = v_0/3$.

Z izrekom o gibalni količini lahko pojasnimo tudi raketni pogon. Vzemimo, da iz rakete izhaja gorivo s hitrostjo v_0 glede na raketo. Masni tok $\Delta m/\Delta t$ goriva naj bo enak Φ_m. Obravnavajmo časovni interval med časom t in časom t + dt. . Na začetku časovnega intervala je hitrost rakete z maso m_r in goriva z maso $m_g - \Phi_m t$ enaka v . Na koncu časovnega intervala je hitrost rakete s preostankom goriva enaka v + dv, hitrost goriva, ki je v času dt zapustilo raketo pa je enaka $v - v_0$. Ker ni zunanjih sil, se ohranja gibalna količina:
$(m_r + m_g - \Phi_m t)v = (m_r + m_g - \Phi_m t - \Phi_m dt)(v+dv) + \Phi_m dt(v-v_0)$,
ali
$\Phi_m dt v_0 = (m_r + m_g - \Phi_m t)dv$
z rešitvijo

$$v = v_0 \ln \frac{m_r + m_g}{m_r + m_g - \Phi_m t}.$$

Ko je porabljeno vse gorivo, je hitrost rakete enaka $v = v_0 \ln \dfrac{m_r + m_g}{m_r}$. Ta hitrost lahko preseže hitrost goriva v_0.

SISTEM TOČKASTIH TELES IN TOGO TELO, TEŽIŠČE

Pod izrazom sistem točkastih teles razumemo večje število točkastih teles, na katere delujejo zunanje sile, znotraj sistema pa delujejo tudi notranje sile. Kot že povedano je gibalna količina sistema enaka vsoti gibalnih količin posameznih teles

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i .$$

Na gibalno količino sistema vplivajo samo zunanje sile. Če teh ni, se gibalna količina sistema ohranja.

Kinetična energija sistema je enaka vsoti kinetičnih energij posameznih teles:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} .$$

Na kinetično energijo sistema notranje sile ne vplivajo, če je sistem tog, kar pomeni, da se razdalje med posameznimi telesi ne spreminjajo.

Pomembno vlogo pri študiju mehanike sistema točkastih teles pa tudi togega telesa ima težišče. Pri obravnavi trka dveh teles v gibajočem sistemu smo izbrali težiščni sistem, v katerem je gibalna količina sistema enaka nič. Težišče sistema točkastih teles definiramo na naslednji način. Naj bo m_i masa i-tega telesa, $\vec{r}_i$ pa njegov krajevni vektor glede na izbrano izhodišče. Krajevni vektor težišča, $\vec{r}_T$, glede na izbrano izhodišče je

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i . \qquad (1)$$

Z m smo označili maso sistema. V izhodišče postavimo pravokotni koordinatni sistem. Odmik težišča od izhodišča v smeri osi x, x_T, je enak

$$x_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i .$$

Podobno izračunamo tudi koordinati težišča y_T in z_T.

Pogosto nam vseh treh koordinat težišča ni treba izračunati. Pomagamo si s simetrijo. Težišče sistema dveh teles z enakima masama je na sredi med njima. Če leže vsa telesa na premici je tudi težišče na premici, če pa leže telesa v ravnini, je tudi težišče v ravnini. Če obstoja v sistemu dvoštevna os, okoli katere lahko sistem zasukamo za 180^0 in se pri tem porazdelitev mas ne spremeni, je težišče na tej osi...

Poglejmo, kolikšna je hitrost težišča $\vec{v}_T$. Enačbo (1) odvajajmo po času:

$$\vec{v}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Kot vidimo iz te enačbe, je gibalna količina sistema točkastih teles kar enaka $\vec{G} = m\vec{v}_T$. Gibalna količina sistema glede na težišče je enaka nič, ker je tedaj $\vec{v}_T = 0$.

Hitrost težišča še enkrat odvajajmo po času, da dobimo pospešek težišča $\vec{a}_T$. Ta je enak

$$\vec{a}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p}\vec{F}_{zk}.$$

Člene vsote $m_i\vec{a}_i$ smo izrazili z drugim Newtonovim zakonom. Pri seštevanju sil so se notranje sile paroma odštele. Ostale so le zunanje sile $\vec{F}_{zk}$. Število teh sil smo označili s p. Dobili smo izrek o gibanju težišča, ki pravi, da je vsota vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem točkastih teles, enaka produktu mase sistema in pospeška težišča.

Potencialna energija sistema W_p je enaka vsoti

$$W_p = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i = mgz_T.$$

Enaka je torej produktu teže sistema in višine težišča.

Oglejmo si kinetično energijo sistema točkastih teles. Krajevni vektor telesa i glede na izbrano izhodišče $\vec{r}_i$ zapišimo kot vsoto krajevnega vektorja težišča $\vec{r}_T$ in krajevnega vektorja i-tega telesa glede na težišče, ki ga označimo z $\vec{\rho}_i$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_T + \vec{\rho}_i.$$

Enačbo odvajamo po času pa dobimo

$$\vec{v}_i = \vec{v}_T + \vec{u}_i.$$

Tu je $\vec{u}_i$ hitrost i-tega telesa glede na težišče. Kinetična energija sistema je - gledano iz izbranega izhodišča – enaka

$$W_k = \sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}m_i\vec{v}_i\vec{v}_i = \tfrac{1}{2}mv_T^2 + \sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}m_i u_i^2.$$

Dva člena, ki vsebujeta produkte $\vec{u}_i\vec{v}_T$ sta enaka nič, ker je $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u}_i = 0.$ Ostaneta torej le dva člena. Prvi člen v izrazu za kinetično energijo predstavlja kinetično energijo gibanja težišča, drugi pa kinetično energijo gibanja teles glede na težišče.

Togo telo si lahko predstavljamo kot tog sistem množice točkastih teles. Vse ugotovitve, do katerih smo prišli v začetku tega poglavja, veljajo tudi za togo telo.

Ko računamo težišče togega telesa ne računamo s točkastimi masami, ampak z zvezno porazdeljeno maso. Krajevni vektor težišča je tedaj enak

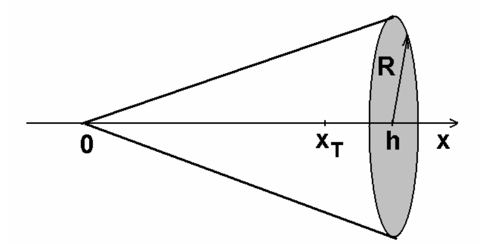
$$\vec{r}_T = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm.$$

Kot že vemo, lahko vektorsko enačbo zapišemo kot tri skalarne enačbe

$$x_T = \frac{1}{m}\int x\,dm, \quad y_T = \frac{1}{m}\int y\,dm, \quad z_T = \frac{1}{m}\int z\,dm.$$

Tu je m masa telesa, $\vec{r} = (x, y, z)$ pa krajevni vektor delčka telesa z maso dm.

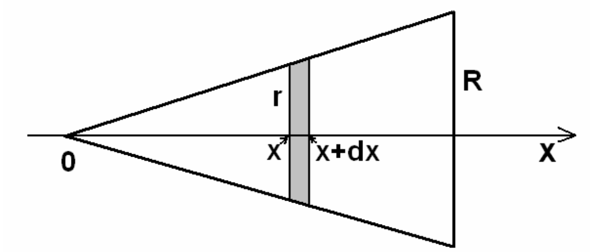
Kot zgled poiščimo težišče homogenega stožca s polmerom osnovne ploskve R in z višino h.



Stožec je osno simetrično telo. Če ga okrog njegove osi zasukamo za poljuben kot, ostane enak, kot je bil pred zasukom. Zato mora težišče ležati na osi stožca. Os x naj poteka po osi stožca, izhodišče pa postavimo v vrh stožca. Iščemo koordinato x_T. Ta je enaka

$$x_T = \frac{1}{m}\int x dm.$$

Mislimo si, da je stožec sestavljen iz tankih rezin, ki so pravokotne na os x. Rezina stožca, katere oddaljenost od izhodišča v smeri osi x je med x in x+dx je tanka okrogla plošča s polmerom r = xR/h in z debelino dx. Njena masa dm je enaka dm = $\rho\pi r^2 dx$.

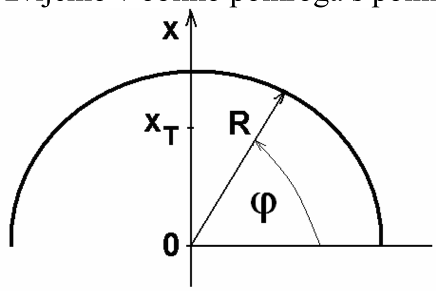


Tu je ρ gostota stožca. Masa stožca je enaka m = $\rho\pi R^2 h/3$. Koordinata x_T je enaka

$$x_T = \frac{3}{h^3}\int_0^h x^3 dx = \tfrac{3}{4}h.$$

Težišče homogenega stožca leži torej na osi in je od osnovne ploskve oddaljeno za četrtino višine.

Tanko kovinsko palico zvijemo v obliko polkroga s polmerom R. Kje je težišče?



Težišče leži na zveznici med središčem, kroga in sredino palice. Če namreč okrog te zveznice zasukamo palico za 180^0 je porazdelitev mase enaka, kot je bila pred zasukom, kar pomeni, da mora biti težišče na istem mestu. Če bi ležalo težišče izven omenjene zveznice, bi se pri tem zasuku premaknilo, zato leži na zveznici.
Os x usmerimo v smeri zveznice med središčem kroga in sredino palice, izhodišče pa postavimo v središče kroga. Iščemo torej x_T. Uporabimo polarne koordinate. Kot φ se

spreminja med 0 in π. Masa dm, ki ustreza intervalu kota med φ in φ+dφ je enaka mdφ/π. Oddaljenost mase dm od izhodišča vzdolž osi x je enaka Rsinφ. Koordinata x_T je enaka

$$x_T = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2R}{\pi}.$$

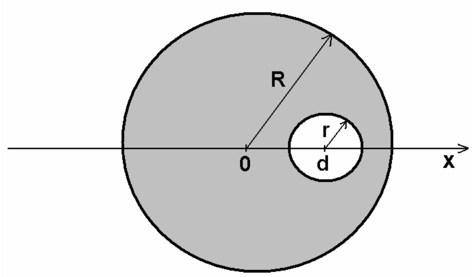
V tem primeru leži težišče izven telesa.

Poglejmo še, kako poiščemo težišče telesa, za katero si lahko mislimo, da je sestavljeno iz delov, katerih težišča poznamo. Označimo te dele z (1), (2),..(n). Krajevni vektor težišča je enak

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{m}\left\{\int_{(1)}\vec{r}\,dm + \int_{(2)}\vec{r}\,dm + \ldots + \int_{(n)}\vec{r}\,dm\right\} = \frac{1}{m}\left(m_1\vec{r}_{T1} + m_2\vec{r}_{T2} + \ldots + m_n\vec{r}_{Tn}\right).$$

Integral po celem telesu smo zapisali kot vsoto integralov po posameznih delih. Z m_1 smo označili maso, z $\vec{r}_{T1}$ pa krajevni vektor težišča dela (1) itd. S to enačbo lahko poiščemo lego težišča sestavljenega telesa, ali pa, če tega poznamo, težišče kakega dela.

Vzemimo, da v tanko homogeno okroglo ploščo s polmerom R izvrtamo okroglo odprtino s polmerom r. Oddaljenost središča odprtine od središča plošče je enaka d. Kje je težišče plošče z luknjo?



Težišče plošče z luknjo leži na zveznici središča plošče in središča izrezane odprtine. Usmerimo torej v tej smeri os x, izhodišče pa postavimo v središče plošče. Sestavljeno telo naj bo polna plošča z maso m in z $x_T = 0$. Telo (1) naj bo plošča s polmerom r, ki smo jo izrezali. Njena masa je enaka $m_1 = m(r/R)^2$, koordinata težišča pa $x_{T1} = d$. Telo (2) je plošča z luknjo. Njena masa je $m_2 = m(1 - (r/R)^2)$, koordinato težišča x_{T2} pa iščemo. Gornja enačba projicirana na os x je potem

$0 = (r/R)^2 d + (1 - (r/R)^2)x_{T2}$.

Odmik težišča od sredine plošče je torej

$x_{T2} = - r^2 d/(R^2 - r^2)$

v smeri, ki je nasprotna od lege odprtine. Smiselnost dobljenega izraza preverimo v preprostih situacijah. Recimo, da luknje sploh nismo zvrtali. Tedaj je r=0 in težišče ostane na sredi plošče, kar se sklada z izrazom. Druga možnost je, da izvrtamo odprtino na sredi plošče (d=0). Tudi v tem primeru ostane težišče na sredi plošče, kar se ujema z rezultatom računa.

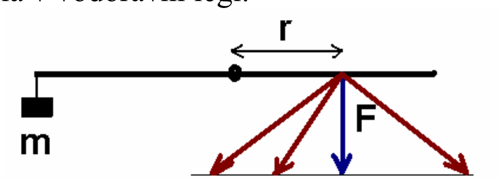
Za konec preverimo, da je lega težišča neodvisna od izbire izhodišča. Samo v tem primeru je smiselno govoriti o težišču kot neki posebni točki. Računamo s sistemom točkastih teles. Vzemimo dve izhodišči O in O'. Krajevna vektorja z obeh izhodišč do i-tega telesa označimo z $\vec{r}_i$ in $\vec{r}_i'$, zveza med njima pa je: $\vec{r}_i' = \vec{s} + \vec{r}_i$. Tu je $\vec{s}$ vektor od izhodišča O' do izhodišča O. Izračunajmo krajevni vektor težišča $\vec{r}_T'$ glede na izhodišče O':

$$\vec{r}_T' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{s} + \vec{r}_i) = \vec{s} + \vec{r}_T.$$

Ta zveza pove, da določata $\vec{r}_T$ in $\vec{r}_T'$ isto težišče in, da je lega težišča res neodvisna od izbire izhodišča.

NAVOR, NAVOR TEŽE, STATIKA

Pri togem telesu ni vseeno, kje prijemlje sila. Oglejmo si naslednji preprost primer. Vzemimo togo palico, ki je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi središče. Na en konec palice obesimo utež. Poskusimo z dinamometrom na drugi strani osi uravnotežiti palico tako, da bo mirovala v vodoravni legi.



Sila dinamometra naj kaže navpično navzdol. Meritev pokaže, da je potrebna sila tem večja, čim bliže osi uporabimo dinamometer. Kvantitativna meritev pokaže, da je produkt sile dinamometra in oddaljenosti prijemališča sile od osi (ročice) konstanten. Če pri isti ročici spremenimo smer sile se pokaže, da je za uravnoteženje palice potrebna večja sila, a projekcija te sile na smer, ki je pravokotna na ročico, ostaja enaka. Tisto, kar je pomembno za uravnoteženje palice je torej produkt ročice in projekcije sile na smer, ki je pravokotna na ročico, torej ročica krat sila krat sinus vmesnega kota φ. Če definiramo vektor ročice $\vec{r}$ kot vektor od osi do prijemališča sile je rFsinφ ravno velikost vektorskega produkta $\vec{r} \times \vec{F}$. Količino o kateri smo govorili imenujemo navor in jo označimo s črko $\vec{M}$. Navor je definiran kot

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Velikost navora je enaka rFsinφ, pri čemer je φ kot med vektorjema $\vec{r}$ in $\vec{F}$. Smer navora dobimo na primer s pravilom desnega vijaka. Postavimo oba vektorja v skupno izhodišče in poglejmo, kam bi se premaknil desni vijak, če bi ga zasukali iz smeri prvega vektorja proti smeri drugega vektorja. Smer, v katero bi se premaknil vijak, je smer vektorskega produkta, torej v našem primeru smer navora $\vec{M}$. Vektorski produkt vektorjev $\vec{r}$ in $\vec{F}$ lahko zapišemo tudi v obliki determinante:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Tu so $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$ enotni vektorji vzdolž osi koordinatnega sistema x, y in z, druga in tretja vrstica pa sta sestavljeni iz projekcij vektorjev $\vec{r}$ in $\vec{F}$ na osi koordinatnega sistema.

Kot smo videli je navor količina, ki ima pomembno vlogo pri vrtenju.

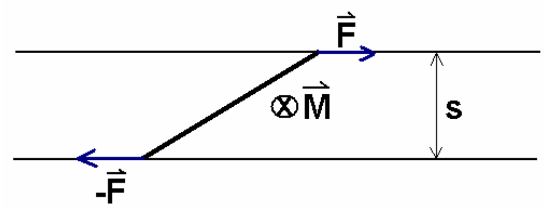
Poglejmo najprej kolikšen je navor teže. Teža je prostorsko porazdeljena sila. Pri računanju navora je treba upoštevati, da prijemlje v vsaki točki telesa. Na del telesa z maso dm in krajevnim vektorjem $\vec{r}$ deluje teža $dm\vec{g}$. Navor teže je enak

$d\vec{M}_g = \vec{r} \times dm\vec{g} = \vec{r}dm \times \vec{g}$. Navor teže na celo telo, $\vec{M}_g$, je enak integralu

$\vec{M}_g = \int \vec{r}dm \times \vec{g} = \left(\int \vec{r}dm\right) \times \vec{g} = m\vec{r}_T \times \vec{g} = \vec{r}_T \times m\vec{g}.$

Navor teže je tak , kot da cela teža prijemlje v težišču. Ker nas v mehaniki zanimata samo teža in njen navor, bomo pri vseh računih predpostavili, da teža prijemlje v težišču telesa.

Zanimiv je tudi navor dvojice sil. To sta dve enako veliki nasproti usmerjeni sili F in -F, ki ležita na vzporednih premicah v razdalji s. Navor je ne glede na izhodišče po velikosti enak sF, kaže pa v smeri, ki je pravokotna na ravnino, v kateri ležita premici.



Kakšni so pogoji za mirovanje togega telesa? Izrek o gibanju težišča pove, da je produkt mase telesa in pospeška težišča enak vsoti zunanjih sil. Če težišče telesa miruje, je vsota zunanjih sil enaka nič. A to še ni dovolj za mirovanje telesa. Telo se lahko vrti okrog težišča. Kot bomo pozneje pokazali je vrtenje okrog težišča enakomerno, ali pa ga ni, če je vsota navorov glede na težišče enaka nič. Če telo miruje se ne vrti okrog težišča, zato mora biti tudi vsota navorov glede na težišče enaka nič. A ta pogoj ni tako strog. Če je namreč vsota sil enaka nič in vsota navorov glede na težišče enaka nič, je tudi vsota navorov glede na katerokoli drugo točko enaka nič.

Naj bo $\vec{r}_{Ti}$ vektor od težišča telesa do prijemališča sile $\vec{F}_i$. Vektor od poljubnega izhodišča O do prijemališča sile $\vec{F}_i$ pa naj bo enak $\vec{r}_i$, pri čemer je $\vec{r}_i = \vec{r}_{Ti} + \vec{s}$. Vektor $\vec{s}$ je vektor od izhodišča O do težišča. Vsota navorov glede na izhodišče O je enaka

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_{Ti} + \vec{s}) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_{Ti} \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{s} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_{Ti} \times \vec{F}_i + \vec{s} \times \sum_i \vec{F}_i.$$

Prvi člen predstavlja vsoto navorov glede na težišče in je enak nič. Drugi člen je vektorski produkt vektorja $\vec{s}$ z vsoto sil. Ker je vsota sil enaka nič je tudi ta člen enak nič. Vsota navorov glede na poljubno točko je torej enaka nič.

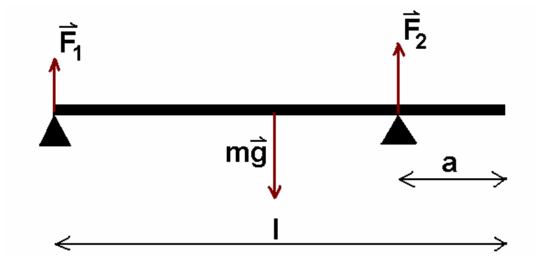
Pogoja za mirovanje togega telesa sta naslednja:

- Vsota sil je enaka nič.
- Vsota navorov glede na poljubno točko je enaka nič.

»Poljubno točko« si bomo, če bo le mogoče, izbrali tako, da bo navor kake sile, ki nas ne zanima, odpadel.

Oglejmo si nekaj primerov.

Desko z maso m in dolžino l podpremo na enem krajišču in v razdalji a od drugega krajišča tako, da leži vodoravno. Kolikšni sta sili v podporah?



Sili v podporah imenujmo F_1 in F_2. Sila F_1 kaže navpično navzgor in prijemlje na koncu deske. Sila F_2 kaže navpično navzgor in prijemlje v razdalji a od drugega konca deske. Za težo bomo, kot že rečeno, predpostavili, da prijemlje v težišču. Izberimo najprej izhodišče O v prijemališču sile F_1. Glede na to točko delujeta dva navora: navor sile F_2 in navor teže. Navora sta nasproti usmerjena, po velikosti pa morate biti enaka:

$$F_2(l-a)=mg\frac{l}{2}.$$

Sila F_2 je torej enaka $F_2=\dfrac{mgl}{2(l-a)}$.

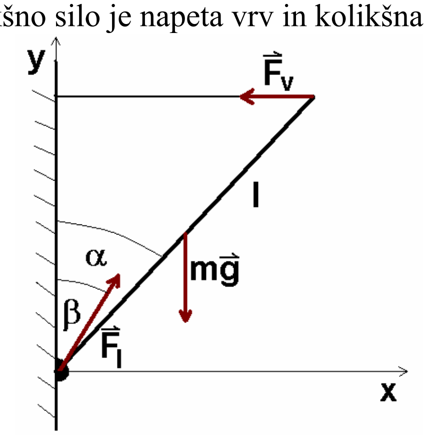
Pri računanju sile F_1 predpostavimo, da je izhodišče O v prijemališču sile F_2. Iz ravnovesja navorov dobimo

$$F_1(l-a)=mg\left(\frac{l}{2}-a\right).$$

Sila F_1 je torej enaka $F_1=\dfrac{mg(l-2a)}{2(l-a)}$.

Pri računu enačbe za ravnovesje sil eksplicitno sploh nismo uporabili. Smo jo pa uporabili implicitno, saj smo računali vsoto navorov glede na dve poljubni točki. V resnici je ta enačba izpolnjena, saj je $F_1 + F_2 = mg$.

Drog dolžine l in mase m naj bo vrtljiv okrog vodoravne osi tik ob steni. Drug konec droga je z vrvjo pritrjen ob steno. Vrv je vodoravna, drog pa oklepa z navpičnico kot α. Izračunajmo s kolikšno silo je napeta vrv in kolikšna je sila v ležaju.



Drog je telo, ki miruje. Nanj delujejo sila vrvi, sila v ležaju in teža. Izračunajmo najprej s kolikšno silo je napeta vrv. Postavimo izhodišče v os. Glede na to točko delujeta dva navora: navor teže droga in navor sile vrvi F_v. Navora sta po smeri nasprotna, po velikosti pa enaka:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = F_v l\cos\alpha.$$

Sila vrvi je torej enaka $F_v = \frac{mg}{2}tg\alpha.$

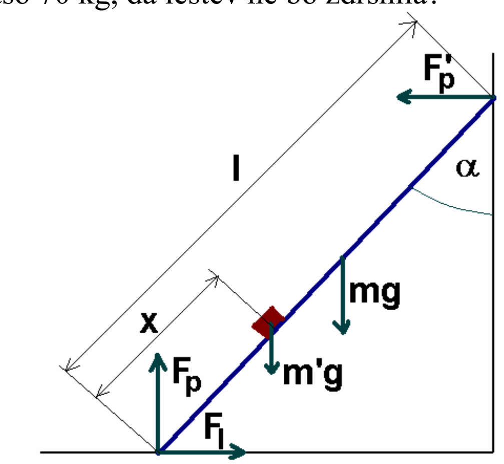
Izračunajmo še silo v ležaju. Kam kaže ta sila ne vemo, zato bomo izračunali njeno projekcijo na vodoravno smer in njeno projekcijo na navpično smer. Upoštevali bomo, da je vektorska vsota sil, ki delujejo na drog, enaka nič. V vodoravni smeri deluje v smeri proti steni sila vrvi F_v, stran od stene pa projekcija sile v ležaju na to smer, F_{lx}. Ker sta sili po velikosti enaki, je $F_{lx} = (mg/2)tg\alpha$. V navpični smeri deluje v smeri navzdol teža droga mg, v smeri navzgor pa projekcija teže na to smer, F_{ly}. Ker sta sili enaki, je $F_{ly} =$ mg. Po velikosti je sila v ležaju F_l enaka

$$F_l = \sqrt{F_{lx}^2 + F_{ly}^2} = \frac{mg}{2}\sqrt{4 + tg^2\alpha}\ ,$$

tangens kota β , ki ga sila v ležaju oklepa z navpičnico pa je enak:

$$tg\beta = \frac{F_{lx}}{F_{ly}} = \tfrac{1}{2}tg\alpha$$

10 m dolga lestev z maso 40 kg je prislonjena ob gladko steno tako, da oklepa s steno kot 45^0. Koeficient lepenja med lestvijo in podlago je 0.5. Kako daleč sme po lestvi splezati človek z maso 70 kg, da lestev ne bo zdrsnila?



Telo, ki miruje, je lestev. Nanjo delujejo naslednje sile. Sila stene F_p' je usmerjena pravokotno na steno in prijemlje na koncu lestve. Težo lestve mg obravnavamo, kot da prijemlje v težišču lestve, ki je na sredini. Teža plezalca m'g kaže navpično navzdol in prijemlje v razdalji x od spodnjega konca lestve. Na spodnjem koncu lestve deluje sila podlage, ki jo razstavimo na dve sili: pravokotno silo podlage F_p v smeri navpično navzgor in silo lepenja F_l, ki je vodoravna in kaže proti steni.

Vsota projekcij sil na vodoravno smer je enaka nič, kar pomeni, da je F_l enaka F_p'. Vsota projekcij sil na navpično smer je tudi enaka nič. To pa pomeni, da je pravokotna sila podlage F_p enaka vsoti tež mg + m'g. Izračunajmo silo Fp' tako, da postavimo izhodišče za računanje navorov na spodnji konec lestve. Navora teže lestve in teže plezalca imata isto smer, navor sile Fp' pa je usmerjen v nasprotni smeri. Ker so navori v ravnovesju velja

$$F_p' l \cos\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha + m' g x \sin\alpha .$$

Sila stene Fp' je torej enaka $F_p' = \left(\frac{m}{2} + m'\frac{x}{l}\right) g tg\alpha .$ Tej sili je enaka po velikosti sila lepenja, ki prav tako narašča z naraščajočim x. Poiščimo tisto vrednost x, pri kateri bo sila lepenja dosegla svojo maksimalno vrednost $k_l F_p = k_l(mg+m'g)$. Do tega pride, ko je

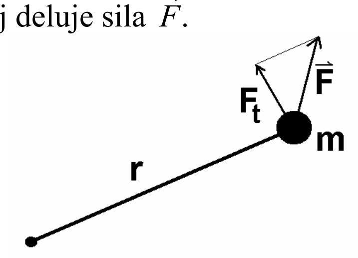
$$x = l\left[k_l\left(1+\frac{m}{m'}\right)ctg\alpha - \frac{m}{2m'}\right].$$

Pri naših podatkih je to pri x = 5m. Plezalec sme torej splezati do sredine lestve. Če gre više, bo maksimalna sila lepenja premajhna, da bi obdržala lestev v ravnovesju in lestev zdrsne. Da do tega ne bi prišlo je treba zmanjšati kot α. Iz zadnje enačbe lahko izračunate, pri katerem maksimalnem kotu α bo plezalec lahko priplezal na vrh lestve (x = l).

Ravnovesje teles je lahko stabilno, labilno, ali indiferentno. Ilustrirajmo to na primeru palice, ki je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi težišče. V katerokoli lego bomo zasukali palico in jo spustili, vedno bo palica v legi obmirovala. Tako ravnovesje imenujemo indiferentno. Zdaj pritrdimo na en konec palice utež in palico sunimo. Ko se bo nihanje končalo bo utež mirovala navpično pod osjo. Težišče telesa je navpično pod osjo. Če palico izmaknemo iz ravnovesne lege, se bo vrnila v ravnovesno lego. Tako ravnovesje imenujemo stabilno. Še ena ravnovesna orientacija palice z utežjo je možna. To je orientacija pri kateri je utež (in tudi težišče) navpično nad osjo. Če se potrudimo, bo palica tudi pri tej orientaciji mirovala, a če jo izmaknemo iz ravnovesne lege, se vanjo ne bo vrnila. Tako ravnovesje imenujemo labilno.

VRTENJE TOGEGA TELESA OKROG STALNE OSI

Obravnavajmo v začetku telo, ki je sestavljeno iz palice dolžine r in zanemarljive mase, ki je prosto vrtljiva okoli enega krajišča. Na drug konec palice je pritrjeno majhno telo mase m. Na to telo naj deluje sila $\vec{F}$.

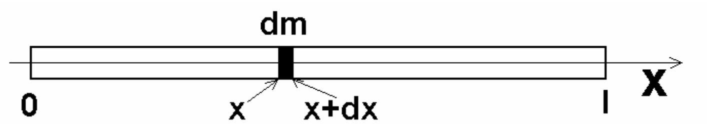


Telo se lahko giblje v tangentni smeri. V tej smeri deluje nanj projekcija sile $\vec{F}$ na tangentno smer, ki jo označimo s simbolom F_t. Drugi Newtonov zakon pove, da je

$F_t = ma.$
Ker je gibanje telesa v resnici kroženje, je a pravzaprav tangentni pospešek, ki je enak $r\alpha$. Nadalje smo videli, da je pri kroženju pomembna količina navor. Navor računamo glede na os vrtenja. Produkt rF_t predstavlja ravno projekcijo navora $\vec{r} \times \vec{F}$ na os vrtenja, ki jo označimo z $M_{||}$. Gornjo enačbo prepišemo v obliki
$M_{||} = mr^2\alpha.$
Za to, da telo z maso m s kotnim pospeškom α kroži po krogu s polmerom r je torej potreben navor $mr^2\alpha$ vzdolž osi vrtenja.

Kolikšen navor je potreben, da okoli stalne osi s kotnim pospeškom a kroži telo poljubne oblike? Za vsak del telesa z maso dm, ki kroži v razdalji r od osi je potreben navor $dM_{||}$, $dM_{||} = r^2\alpha dm$. Za celo telo je potem navor enak
$M_{||} = \left(\int r^2 dm\right)\alpha.$
Zvezo zapišemo v obliki
$M = J\alpha,$
pri čemer se zavedamo, da predstavlja M projekcijo navorov vseh sil na os vrtenja. Vztrajnostni moment J je podan kot
$J = \int r^2 dm$,
pri čemer je r pravokotna oddaljenost mase dm od osi vrtenja.

Preden bomo uporabili gornjo enačbo izračunajmo nekaj značilnih vztrajnostnih momentov. Najprej izračunajmo vztrajnostni moment palice za vrtenje okrog enega konca. Vzdolž palice usmerimo koordinatno os x. Z dm označimo maso tistega dela palice, ki leži med x in x+dx.



Enaka je dm = (m/l)dx, pri čemer je m masa palice, l pa njena dolžina. Oddaljenost od osi je enaka x. Vztrajnostni moment palice je enak
$J = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{ml^2}{3}.$
Izračunajmo še vztrajnostni moment palice za vrtenje okrog osi skozi središče. To lahko storimo na dva načina. Izhodišče prestavimo v središče palice. V gornjem integralu se integracijski meji spremenita. Integriramo od –l/2 do l/2. Lahko pa upoštevamo aditivnost vztrajnostnega momenta in izračunamo vztrajnostni moment dveh palic dolžine l/2 in mase m/2 za vrtenje okrog konca. V obeh primerih dobimo vztrajnostni moment $J = ml^2/12$.

Telo, ki ga pogosto srečamo je tanka valjasta cev z maso m in srednjim polmerom r. Računali bomo vztrajnostni moment za vrtenje okrog osi valja. Ker so vsi deli cevi v razdalji r od osi vrtenja je vztrajnostni moment kar $J = mr^2$.
V primeru homogenega valja s polmerom R si bomo mislili, da je sestavljen iz množice tankih cevi. Cev, ki ima notranji polmer r in zunanji polmer r+dr ima vztrajnostni moment r^2dm, pri čemer je $dm = m(2\pi rdr/\pi R^2)$. Člen v oklepaju predstavlja razmerje prostornin tanke cevi in celega valja, ki ima maso m. Z integracijo po r od nič do R dobimo vztrajnostni moment valja, ki je enak $J = mR^2/2$.

Omenimo še vztrajnostni moment krogle s polmerom r in maso m za vrtenje okrog osi skozi središče. Enak je $J = 2mr^2/5$.

Če poznamo vztrajnostni moment telesa za vrtenje okrog osi skozi težišče, J_T, poznamo vztrajnostni moment J za vrtenje tega telesa okrog katerekoli vzporedne osi. Steinerjev izrek pove, da je

$J = J_T + mx^2$.

Tu je m masa telesa, x pa razdalje med osema. Do Steinerjevega izreka pridemo na naslednji način. Označimo z O_T os skozi težišče, z O pa vzporedno os. Vektor $\vec{x}$ naj v pravokotni smeri poteka od katerekoli točke na osi O do ustrezne točke na osi O_T. Velikost vektorja $\vec{x}$ je razdalja med osema. Vektor $\vec{r}$ naj poteka v pravokotni smeri od osi O do dela telesa z maso dm. Vektor $\vec{r}_T$ naj poteka v pravokotni smeri od osi O_T do prej omenjenega dela telesa z maso dm. Med vektorji velja zveza

$\vec{r} = \vec{r}_T + \vec{x}$.

Vztrajnostni moment J za vrtenje telesa okrog osi O je enak

$J = \int \vec{r}\vec{r}dm = \int \vec{r}_T\vec{r}_T dm + 2\int \vec{x}\vec{r}_T dm + \int \vec{x}\vec{x}dm.$

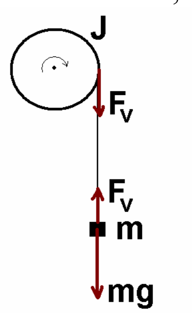
Prvi integral je enak vztrajnostnemu momentu J_T za vrtenje telesa okrog osi skozi težišče, tretji integral je enak mx^2, drugi integral pa je enak nič. Enak je namreč dvojni vrednosti skalarnega produkta vektorja $\vec{x}$ z integralom

$\int \vec{r}_T dm,$

ta integral pa je enak produktu mase telesa in oddaljenosti težišča od težišča v ravnini, ki je pravokotna na os vrtenja. Oddaljenost težišča od težišča je seveda enaka nič.

Uporabimo sedaj enačbo za vrtenje v dveh preprostih primerih.

Kolo z vretenom je vrtljivo okrog vodoravne osi in ima vztrajnostni moment J. Okoli vretena s polmerom r je navita lahka vrvica, na kateri je obešena utež z maso m.



Ko utež spustimo začne ta pospešeno padati, kolo pa se začne pospešeno vrteti. Najprej poglejmo utež. Nanjo deluje teža navpično navzdol in sila vrvice F_v navpično navzgor. Drugi Newtonov zakon nam pove, da je

$mg - F_v = ma.$

Na vrtenje kolesa z vretenom vpliva navor sile vrvice $F_v r$. Velja

$F_v r = J\alpha.$

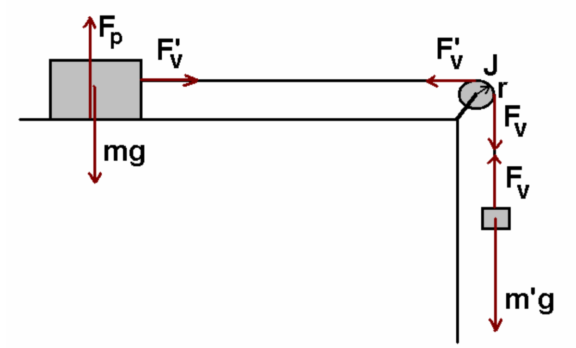
Če vrv ne drsi ob vretenu, za kar ponavadi poskrbimo z žebljičkom, je pospešek uteži kar tangentni pospešek na obodu vretena, kjer je vrv navita: $a = r\alpha$. Pospešek uteži je enak

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J}{mr^2}},$$

Vrv pa je napeta s silo

$$F_v = mg\frac{\frac{J}{mr^2}}{1+\frac{J}{mr^2}}.$$

Kot drugi primer obravnavajmo voziček mase m na zračni klopi. Nanj je privezana lahka vrv, na koncu katere je obešena utež z maso m'. Vrv poteka preko škripca tako, da utež prosto visi. Predpostavimo, da se med gibanjem škripec vrti skupaj z vrvico tako, da vrvica ob škripcu ne drsi. Vztrajnostni moment škripca naj bo J, polmer pa r.



Na utež delujeta teža in sila vrvi F_v. Drugi Newtonov zakon pove, da je $m'g-F_v = m'a$. Na voziček deluje v vodoravni smeri sila F_v', ki je manjša os sile F_v. Del sile F_v oziroma njenega navora se namreč porabi za pospeševanje škripca. Drugi Newtonov zakon za voziček pravi $F_v' = ma$. Zapisati moramo še enačbo za pospeševanje škripca. Ker sili F_v in F_v' prijemljeta v razdalji r od osi, je njun navor $(F_v - F_v')r$ in ta je enak $J\alpha$. Zopet velja $a = r\alpha$, saj vrv ne drsi ob škripcu. Enačbe prepišemo takole:

$m'g-F_v = m'a$

$F_v' = ma$

$F_v - F_v' = Ja/r^2.$

Enačbe seštejemo. Pri tem odpadeta sili F_v in F_v' in kot edina neznanka ostane pospešek:

$$a = \frac{m'g}{m+m'+\frac{J}{r^2}}.$$

Zdaj bolj natančno vidimo, kdaj škripca ni treba upoštevati. Razmerje J/r^2 mora biti mnogo manjše od mase vozička m.

Drugi Newtonov zakon smo integrirali po poti in dobili izrek o kinetični energiji. Podobno lahko storimo tudi z enačbo za vrtenje okrog stalne osi. Pri vrtenju ustreza poti kot. Zato integriramo po kotu. Vzemimo, da je na začetku opazovanja kot, ki opiše lego telesa φ_1, kotna hitrost pa ω_1. Nekaj pozneje naj bo kot φ_2, kotna hitrost pa ω_2. Integrirajmo enačbo za vrtenje po kotu od kota φ_1 do kota φ_2:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J\alpha d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J\frac{d\omega}{dt}d\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}.$$

Na levi strani enačbe nastopa delo navora, na desni pa sprememba kinetične energije. Da je izraz $J\omega^2/2$ zares kinetična energija vrtenja lahko preverimo tako, da jo neposredno izračunamo.

Hitrost dela telesa z maso dm, ki kroži v razdalji r od osi, je enaka ωr, kinetična energija pa $(1/2)\omega^2 r^2 dm$. Kinetična energija celega telesa je enaka

$$W_k = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} J\omega^2.$$

Kot že rečeno je delo navora enako

$$A = \int M d\varphi.$$

Iz tega lahko izračunamo moč, ki je enaka

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M d\varphi}{dt} = M\omega.$$

Izrek o kinetični energiji lahko uporabimo tudi za toga telesa, ki so vrtljiva okrog stalne osi. Treba je le upoštevati delo vseh sil in navorov, pri potencialni energiji pa seveda višino težišča.

Poskusimo z izrekom o kinetični energiji izračunati primer s kolesom z vretenom, okrog katerega je navita vrv, na kateri visi utež z maso m. Vzemimo, da v začetku sistem miruje. Ko se utež spusti za h, pade potencialna energija sistema za mgh, hkrati pa kinetična energija zraste za $mv^2/2+J\omega^2/2$. Zunanje sile razen teže ne opravijo nobenega dela, sila vrvi pa je notranja sila in, ker vrv ne drsi ob vretenu, je njeno celotno delo nič. Zato se skupna energija sistema ohranja kar pomeni, da je

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Ker vrv ne drsi ob vretenu, velja ša $v=\omega r$.Tu je r polmer vretena. Hitrost uteži je enaka

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{J}{mr^2}}}.$$

Tako hitrost bi dobili tudi iz zgornjega izraza za pospešek z upoštevanjem zveze $v^2=2ah$.

Kot naslednji primer obravnavajmo homogeno palico, ki je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi eno krajišče. Palico dvignemo v vodoravno lego, nato pa spustimo. S kolikšno hitrostjo gre konec palice skozi najnižjo lego?

Predpostavimo, da v ležaju ni navora, zato se vsota kinetične in potencialne energije ohranja. V začetni (vodoravni) legi je kinetična energija palice enaka nič. Vzemimo, da je tedaj tudi potencialna energija palice enaka nič. V legi, v kateri je prost konec palice najnižje, je kinetična energija palice $J\omega^2/2$, potencialna energija palice pa $-mg(l/2)$. Ker se mehanska energija ohranja velja

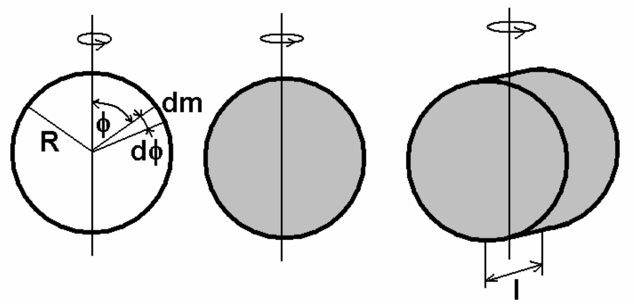
$$\frac{J\omega^2}{2} - \frac{mgl}{2} = 0.$$

Upoštevajmo še, da je $J=ml^2/3$ in da iščemo hitrost konca palice, $v=\omega l$ pa dobimo

$$v = \sqrt{3gl}.$$

Obravnavajmo še naslednje zglede.

Izračunajmo vztrajnostni moment tankega obroča in tanke plošče in valja za vrtenje okrog prečne osi skozi težišče.



Lotimo se obroča s polmerom R. Vpeljimo polarne koordinate in začnimo meriti kot na osi. Del obroča med kotoma ϕ in ϕ+dϕ ima maso dm = mdϕ/2π. Pri tem je m masa obroča. Polmer kroženja te mase je r = Rsinϕ. Vztrajnostni moment obroča je enak

$$J = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{m}{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{mR^2}{2}.$$

To enačbo uporabimo za računanje vztrajnostnega momenta homogene tanke plošče debeline d, mase m im polmera R. Mislimo si, da je plošča sestavljena iz tankih obročev. Vzemimo tanek obroč z notranjim polmerom r in zunanjim polmerom r+dr. Razmerje med maso tega obroča dm in maso plošče m je enako razmerju ploščin ($2\pi r dr/\pi R^2$). Vztrajnostni moment plošče je enak

$$J = \int_0^R \tfrac{1}{2} r^2 dm = \int_0^R \frac{m}{R^2} r^3 dr = \frac{mR^2}{4}.$$

Izračunajmo še vztrajnostni moment homogenega valja z maso m, dolžino l in polmerom osnovne plošče R za vrtenje okrog prečne osi skozi težišče. Vzdolž osi valja vpeljimo os z. Izhodišče naj bo v težišču. Mislimo si, da je valj sestavljen iz tankih plošč debeline dz in polmera R. Tanka plošča ima maso dm = (m/l)dz, njen vztrajnostni moment dJ pa je z upoštevanjem Steinerjevega izreka enak

$$dJ = \frac{R^2 dm}{4} + z^2 dm.$$

Vztrajnostni moment valja je enak:

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{mR^2}{4l} dz + \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} z^2 dt = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}.$$

Če je valj tanek (R<<l), dobimo kar vztrajnostni moment palice, če je pa zelo sploščen (R>>l) pa vztrajnostni moment tanke krožne plošče.

VRTILNA KOLIČINA

Z integracijo drugega Newtonovega zakona po času smo dobili izrek o gibalni količini. Če integriramo enačbo za vrtenje po času dobimo izrek o vrtilni količini:

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{t_1}^{t_2} J \frac{d\omega}{dt} dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J d\omega = J\omega_2 - J\omega_1 = \Gamma_2 - \Gamma_1.$$

Na levi strani enačbe nastopa sunek navora, z Γ pa smo označili vrtilno količino, ki je pri vrtenju okrog stalne osi enaka $\Gamma = J\omega$.

Navor je vektorska količina. Prav tako lahko pripišemo vektorski značaj tudi kotu, kotni hitrosti, kotnemu pospešku in vrtilni količini. Smer vektorja kota dobimo s pravilom desnega vijaka. Zasuk v ravnini v smeri urinega kazalca ima smer v ravnino kroženja. Enako lahko pripišemo vektorski značaj tudi kotni hitrosti in kotnemu pospešku. Zvezo med kotno in obodno hitrostjo zapišemo kot vektorski produkt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

pri čemer je $\vec{r}$ vektor od osi do točke na obodu kroga.

Vektor vrtilne količine je enak $\vec{\Gamma} = J\vec{\omega}$.

Če kroži točkasto telo je $J = mr^2$ in je $\Gamma = rmv = rG$.

V splošnem je vrtilna količina točkastega telesa glede na izbrano izhodišče enaka vektorskemu produktu

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{G}.$$

Tu je $\vec{r}$ krajevni vektor telesa, $\vec{G}$ pa gibalna količina. Tako izračunana vrtilna količina se ujema po velikosti in smeri s prej izračunano vrednostjo, če jo računamo glede na središče kroženja točkastega telesa.

Poglejmo, čemu je enak časovni odvod vrtilne količine:

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \vec{v} \times \vec{G} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}.$$

Vektorski produkt hitrosti in gibalne količine je nič, ker sta vektorja vzporedna. Produkt mase in pospeška smo nadomestili z rezultanto sil $\vec{F}$. Vektorski produkt ročice in rezultante sil je seveda rezultanta navorov. Ta zveza ne predstavlja nič novega. Je le drugače zapisan 2. Newtonov zakon za primer, ko telo kroži.

Vrtilno količino sistema točkastih teles definiramo kot vsoto vrtilnih količin posameznih teles:

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Gamma}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{G}_i.$$

Časovni odvod vrtilne količine sistema točkastih teles je enak vsoti navorov vseh sil, ki delujejo na telesa v sistemu:

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \vec{M}_k.$$

Podobno, kot pri gibalni količini sistema, tudi tu ločimo zunanje in notranje sile.

Poglejmo, kolikšen je navor para notranjih sil $\vec{F}_{12}$ in $\vec{F}_{21}$:

$$\vec{M} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{12}.$$

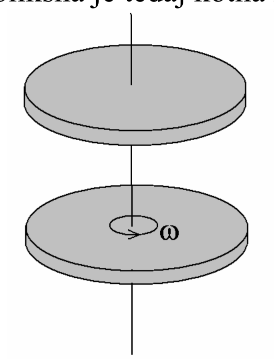
Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ leži na zveznici teles in je usmerjen od telesa 1 proti telesu 2. Navor para notranjih sil $\vec{F}_{12}$ in $\vec{F}_{21}$ je enak nič, če ležita na zveznici teles torej, če sta centralni. Če so notranje sile centralne, ne vplivajo na vrtilno količino sistema točkastih teles pa tudi teles, ki niso točkasta, saj si vsako telo lahko predstavljamo kot sistem točkastih teles. V praksi se pokaže, da so notranje sile zares centralne. Vrtilna količina sistema točkastih teles se torej ohranja, če je rezultanta navorov zunanjih sil enaka nič. To imenujemo zakon o ohranitvi vrtilne količine. Pokaže se celo, da se vrtilna količina ne ohranja samo v klasični (makroskopski) fiziki, ampak tudi v fiziki atomov in subatomskih delcev.

Ohranitev vrtilne količine lahko pokažemo na nekaj značilnih primerih.

Vzemimo človeka, ki se vrti na vrtljivem stolu in pri tem iztegne roki. Če smatramo za sistem človeka in vrtljivi stol, ne deluje v smeri osi vrtenja na sistem noben zunanji navor, zato se vrtilna količina sistema ohranja. Ko človek iztegne roki, se mu poveča vztrajnostni moment. Vrtilna količina se ohrani, zato kotna hitrost vrtenja pade. Ko človek spet skrči roke, mu kotna hitrost naraste.

Človek sedi na vrtljivem stolu in miruje, pri tem pa drži v rokah kolo ki se vrti. Smer osi vrtenja kolesa sovpada s smerjo osi stola. Ko človek zasuka kolo za 180^0, se začne vrteti. Za sistem vzemimo človeka, stol in kolo. Na sistem zopet ne deluje noben zunanji navor vzdolž osi vrtenja, zato se v tej smeri vrtilna količina ohranja. Ker se je vrtilna količina kolesa spremenila z Γ na $-\Gamma$, morata človek in stol dobiti vrtilno količino 2Γ.

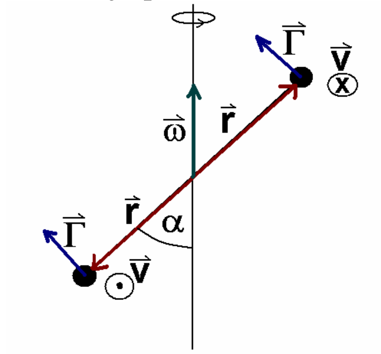
Vzemimo, da se okrogla plošča z vztrajnostnim momentom J enakomerno vrti okrog svoje osi s kotno hitrostjo ω. Nanjo pade enaka plošča, ki pa se ne vrti. Druga plošča pade na prvo tako, da osi sovpadata. Trenje med ploščama povzroči, da se čez nekaj časa plošči vrtita skupaj. Kolikšna je tedaj kotna hitrost?



Vzdolž osi vrtenja ne deluje noben zunanji navor, zato se vrtilna količina ohrani. Preden sta se plošči dotaknili je bila skupna vrtilna količina $J\omega$, ko se vrtita skupaj pa je vrtilna količina $2J\omega'$. Ker se vrtilna količina ohranja, velja $\omega' = \omega/2$. Poglejmo še, kako je s kinetično energijo. V začetku je bila enaka $J\omega^2/2$, na koncu pa $2J(\omega/2)^2/2 = J\omega^2/4$. Končna kinetična energija je manjša od začetne za delo sile trenja, ki je pospešila zgornjo ploščo in upočasnila spodnjo ploščo.

Za spreminjanje smeri vrtilne količine je potreben navor. To je dobro čutil človek pri enem od prejšnjih zgledov, ko je spreminjal orientacijo osi vrtečega se telesa. Zaradi tega daje vrtenje telesom stabilnost. Primer je na primer vožnja kolesa, vrtenje izstrelkov, satelitov itd.

Smer vrtilne količine ne sovpada vedno z osjo vrtenja. Primer za to je lahka palica dolžine 2l, na koncu katere sta pritrjeni dve uteži z maso m. Palica se vrti s kotno hitrostjo ω okrog osi, ki oklepa s smerjo palice kot α.



Računajmo vrtilno količino glede na sredino palice. Vrtilna količina ene uteži je po velikosti enaka $\omega ml^2\sin\alpha$, leži v ravnini, ki jo v vsakem trenutku določata smer palice in os vrtenja in kaže v smeri, ki oklepa z osjo vrtenja kot $90^0 - \alpha$. Vrtilni količini obeh uteži kažeta v isti smeri. Skupna vrtilna količina telesa je torej $2\omega ml^2\sin\alpha$ in se skupaj s palico vrti okrog osi vrtenja tako, da oklepa z osjo vrtenja kot $90^0 - \alpha$. Projekcija vrtilne količine na os vrtenja je enaka $2\omega ml^2\sin^2\alpha$, kar je enako $J\omega$, pri čemer je $J = 2ml^2\sin^2\alpha$. Projekcija vrtilne količine na ravnino, ki je pravokotna na os vrtenja,spreminja svojo smer, za kar je potreben navor. Ta navor, ki je po velikosti enak $d\Gamma/dt = 2\omega^2 ml^2\sin\alpha\cos\alpha$ občutijo ležaji. Navor povzroča tresenje ležajev. Pri simetričnih telesih, kot je na primer tudi prej omenjena palica pri kotu $\alpha = 90^0$, navora v ležajih ni. Centriranje avtomobilskih koles je postopek, s katerim poskušajo narediti avtomobilska kolesa čim bolj simetrična, da je tresenja tem manj.

Velikost vrtilne količine je linearna funkcija kotne hitrosti, smeri kotne hitrosti in vrtilne količine pa se v splošnem ne ujemata:

$$\vec{\Gamma} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})dm.$$

To pomeni, da zveza med vrtilno količino in kotno hitrostjo ni skalarna, ampak je v resnici bolj zapletena. Povezuje ju tenzor vztrajnostnega momenta. Pri poljubnem telesu lahko poiščemo tri med seboj pravokotne osi skozi težišče, okrog katerih se telo lahko vrti, ne da bi povzročalo navore v ležajih. To so lastne osi tenzorja vztrajnostnega momenta, ki jih imenujemo tudi glavne osi telesa. Ena izmed teh osi ustreza največjemu možnemu vztrajnostnemu momentu, druga pa najmanjšemu možnemu vztrajnostnemu momentu. Vztrajnostni moment pri vrtenju okrog tretje glavne osi telesa je nekje vmes. Telo, ki je podprto samo v težišču, se bo vrtelo okrog tiste osi, ki ustreza največjemu možnemu vztrajnostnemu momentu. Če so motnje dovolj majhne bo možno vrtenje tudi okrog osi z najmanjšim vztrajnostnim momentom. Prosto telo, na katerega ne deluje noben zunanji navor se bo lahko vrtelo okrog katerekoli glavne (proste) osi.

Zanimivo gibanje povezano z vrtečimi telesi je precesija. Vzemimo vrtavko, ki se v eni točki dotika tal. Ko se vrtavka ne vrti okrog svoje osi, je ne moremo postaviti v tako lego, da bi obmirovala. Vedno se bo prevrnila. Povsem drugače se obnaša, ko se vrti okrog svoje osi. Če jo tedaj nagnemo in malo sunemo bomo opazili gibanje, pri katerem se smer vrtilne količine vrti (precedira) okrog navpičnice in pri tem oklepa z navpičnico stalen kot. Vrtavka se ne prevrne. Razlog za to je, da je navor, ki je posledica spreminjanja smeri vrtilne količine, ravno nasproten navoru teže. Če vrtavke v začetku ne sunemo v smeri precesije začne padati. Pri tem se zaradi spreminjanja smeri vrtilne količine pojavi navor, ki požene vrtavko v smeri precesije do kotne hitrosti, ki je večja od kotne hitrosti precesije. Zaradi tega se začne os vrtavke dvigati navzgor in kotna hitrost vrtenja okrog navpičnice se zmanjšuje, dokler os vrtenja ne oklepa z navpičnico enak kot, kot v začetku. Potem se zgodba ponovi... Takemu gibanju pravimo nutacija.

Izračunajmo kotno hitrost precesije za vrtavko z vrtilno količino Γ, ki je nagnjena proti navpičnici za kot α. Oddaljenost težišča vrtavke od točke, kjer se vrtavka dotika tal, naj bo d. Navor teže je enak $mgd\sin\alpha$. Pri tem je m masa vrtavke. Navor, ki je posledica spreminjanja smeri vrtilne količine vrtavke ima nasprotno smer kot navor teže, po velikosti pa je enak $(\Gamma\sin\alpha\omega_p dt)/dt = \Gamma\omega_p\sin\alpha$. Tu je ω_p kotna hitrost precesije. Ker sta navora enaka velja

$\Gamma\omega_p\sin\alpha = mgd\sin\alpha$.

Kotna hitrost precesije vrtavke je neodvisno od kota α enaka

$\omega_p = mgd/\Gamma$.

Večji navor povzroči večjo, večja vrtilna količina pa manjšo kotno hitrost precesije.

S precesijo klasično razlagamo gibanje jedrskih magnetnih momentov v magnetnem polju in z njim povezano jedrsko magnetno resonanco.

Izrek o vrtilni količini, ki smo ga zapisali v obliki $\sum_{k=1}^{m}\vec{M}_k = d\vec{\Gamma}/dt$ velja, če je izhodišče v inercialnem koordinatnem sistemu. Vzemimo, da iz inercialnega koordinatnega sistema opazujemo sistem točkastih teles. Njihove krajevne vektorje zapišimo v obliki

$$\vec{r}_i = \vec{r}_T + \vec{\rho}_i.$$

Tu je $\vec{r}_T$ krajevni vektor težišča, $\vec{\rho}_i$ pa vektor od težišča sistema do i-tega telesa. Z odvajanjem te enačbe po času dobimo

$$\vec{v}_i = \vec{v}_T + \vec{u}_i.$$

Izrek o vrtilni količini ima sedaj obliko

$$\vec{r}_T \times \sum_{k=1}^{m}\vec{F}_k + \sum_{k=1}^{m}\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_T \times m_i\vec{v}_T + \vec{r}_T \times m_i\vec{u}_i + \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_T + \vec{\rho}_i \times m_i\vec{u}_i).$$

V vsoti na desni strani enačbe sta drugi in tretji člen enaka nič. Drugi člen je enak

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_T \times m_i\vec{u}_i = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_T \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{u}_i\right).$$

Vsota na desni strani enačbe pa je enaka produktu mase sistema m in hitrosti težišča sistema glede na težišče sistema. Seveda je ta vsota enaka nič. Podobno nastopa v tretjem členu oddaljenost težišča sistema od težišča sistema, ki je seveda tudi enaka nič. Izrek o vrtilni količini sedaj zapišemo

$$\vec{r}_T \times \sum_{k=1}^{m}\vec{F}_k + \sum_{k=1}^{m}\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k = \vec{r}_T \times m\vec{a}_T + \frac{d\vec{\Gamma}'}{dt}.$$

Prvi člen na levi strani enačbe je enak prvemu členu na desni strani enačbe, saj je to le malo drugače zapisan izrek o gibanju težišča. Zato mora biti tudi drugi člen na levi strani enačbe enak drugemu členu na desni strani enačbe:

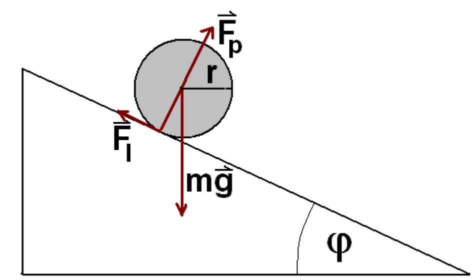
$$\sum_{k=1}^{m} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k = \frac{d\vec{\Gamma}'}{dt}.$$

Na levi strani enačbe nastopa vsota navorov glede na težišče, na desni strani enačbe pa časovni odvod vrtilne količine telesa glede na težišče. Čeprav težiščni sistem v splošnem ni inercialen, ima izrek o vrtilni količini enako obliko, kot v inercialnih sistemih.

S tem tudi razložimo drugi pogoj za mirovanje togega telesa in sicer, da mora biti vsota navorov glede na težišče enaka nič.

Pri opisu splošnega gibanja sistema točkastih teles, ali togega telesa, bomo torej uporabili dve enačbi: izrek o gibanju težišča in izrek o vrtilni količini v težiščnem sistemu.

Kot primer splošnega gibanja togega telesa obravnavajmo kotaljenje valja s polmerom r in maso m po klancu. Predpostavimo, da je nagib klanca φ dovolj majhen, da je sila lepenja, ki nastopa ob stiku valja in klanca, manjša od maksimalne sile lepenja pri kotaljenju.



Težišče valja se giblje vzdolž klanca. V smeri gibanja deluje projekcija teže na to smer, $mg\sin\varphi$, v nasprotni smeri pa sila lepenja F_l. Izrek o gibanju težišča pravi:

$mg\sin\varphi - F_l = ma$.

Tu je a pospešek težišča. Vrtilna količina valja glede na težišče je $J\omega$, njen časovni odvod pa $J\alpha$. Navor glede na težišče povzroča samo sila lepenja in sicer je enak $F_l r$ Velja torej

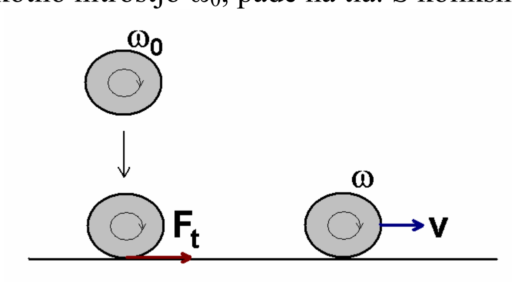
$F_l r = J\alpha$.

Hitrost točke na valju, ki je v stiku s podlago je enaka razliki med hitrostjo težišča v in obodno hitrostjo ωr. Ker valj ne spodrsava, je ta razlika nič:

$v = \omega r$,

oziroma $a = \alpha r$. Sila lepenja je enaka $F_l = Ja/r^2$, pospešek težišča pa $a = g\sin\varphi/(1 + J/mr^2)$. Pri računu smo vseskozi govorili o valju, nismo pa tega nikjer upoštevali, zato dobljeni rezultati veljajo tudi za cev in kroglo.

Valj, ki se vrti s kotno hitrostjo ω_0, pade na tla. S kolikšno hitrostjo se odkotali?



Ko se valj dotakne tal, začne delovati sila trenja F_t, ki pospešuje težišče in zmanjšuje kotno hitrost vrtenja toliko časa, da postane hitrost težišča enaka ωr in se valj samo še kotali. Izrek o gibalni količini za težišče pove:

$$\int F_t dt = mv.$$

Izrek o vrtilni količini za vrtenje okrog težišča po drugi strani pove

$$-\int rF_t dt = J\omega - J\omega_0 = \frac{J}{r}(v - r\omega_0).$$

Iz enačb izločimo sunek sile trenja pa dobimo

$$v = \frac{J/r^2}{m + J/r^2}(r\omega_0).$$

Za prazen valj (cev) dobimo $v = r\omega_0/2$, za homogen valj pa $v = r\omega_0/3$. Kinetična energija valja na koncu je enaka začetni kinetični energiji pomnoženi z $(J/(J+mr^2))$. Razlika kinetičnih energij je enaka delu sile trenja.

ELASTIČNE DEFORMACIJE

Toga telesa, o katerih smo govorili do sedaj, so seveda le približek. V naravi togih teles ni. Vsa telesa so zgrajena iz atomov in molekul, med katerimi delujejo privlačne in pri dovolj kratkih razdaljah tudi odbojne sile. Če uporabimo silo, se razdalje med gradniki snovi spremene. Makroskopsko to opazimo kot deformacijo telesa.

Vzemimo za začetek žico, na katero obesimo utež. Žica se pri tem raztegne. Raztezek žice narašča z naraščajočo težo uteži. Če teža uteži ni prevelika, je raztezek žice sorazmeren sili. To imenujemo Hookov zakon. Pri večji teži uteži sorazmernosti ni več, a ko utež snamemo z žice, je njena dolžina enaka, kot je bila v začetku. Presegli smo mejo sorazmernosti. Če težo uteži še povečamo, se žica raztegne in po razbremenitvi ostane daljša, kot je bila v začetku. Iz področja prožnosti (elastičnosti) smo prešli v področje plastičnosti. Razmerje med silo F_{me}, pri kateri smo prešli iz področja prožnosti v področje plastičnosti in presekom žice S imenujemo meja prožnosti: $\sigma_e = F_{me}/S$. Pri dovolj veliki teži uteži se žica pretrga. Meja trdnosti se imenuje razmerje med silo F_{mt}, pri kateri se žica pretrga in presekom žice S:

$\sigma_t = F_{mt}/S$.

Omeniti je treba, da sta meja sorazmernosti in meja prožnosti odvisni od natančnosti merjenja. Če merimo raztezek z natančnostjo 1 %, bo manjše odstopanje od sorazmernosti, n. pr. 0.2 %, znotraj merske napake in rekli bomo, da smo še v področju sorazmernosti. Če merimo raztezek z natančnostjo 0.1 %, je odstopanje od sorazmernosti večje od merske napake. Mejo sorazmernosti smo torej že prešli.

Mislimo si, da je sila, ki deluje na žico, dovolj majhna, da smo še v področju sorazmernosti, ko je raztezek žice sorazmeren sili. Poglejmo, kaj še vpliva na raztezek žice. Prav gotovo so to geometrijski podatki in snov, iz katere je narejena žica. Od geometrijskih podatkov sta bistvena presek in dolžina žice. Vzemimo žico dolžine l in žico dolžine 2l. Obe žici sta narejeni iz enake snovi in imata enak presek. Obe žici obremenimo z enako silo F. Žica dolžine l se raztegne za Δl. Raztezek Δl je seveda sorazmeren sili F. Pri žici dvojne dolžine je vsaka polovica žice enako obremenjena,kot žica dolžine l. Zato je tudi njen raztezek enak Δl. Raztezek celotne žice je enak 2Δl. Enak razmislek pove, da je pri žici trojne dolžine raztezek enak 3Δl itd. Velja torej, da je raztezek žice sorazmeren sili in dolžini:

$\Delta l \propto Fl$.

Poglejmo še, kakšno vlogo igra presek. Vzemimo dve enaki vzporedni žici in ju obremenimo s silo F. Na vsako žico odpade sila F/2, zato je tudi raztezek enak Δl/2. Dve vzporedni žici lahko združimo v žico dvojnega preseka pa dobimo isto. V primeru treh enakih vzporednih žic ali žice trojnega preseka je raztezek Δl/3 itd. Raztezek žice je torej obratno sorazmeren preseku

$\Delta l \propto Fl/S$.

Do sedaj smo upoštevali silo, ki povzroči raztezek in geometrijske podatke. Nismo pa še upoštevali snovi, iz katere je narejena žica. Ni namreč vseeno, ali je žica jeklena, bakrena, plastična... Snov opiše prožnostni (Youngov) modul E, ki ga definiramo z enačbo

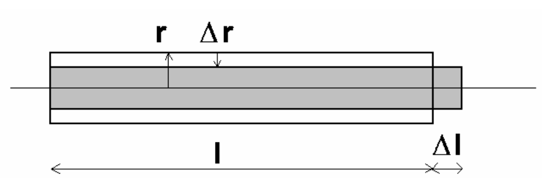
$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}.$$

Prožnostni modul je sorazmernostna konstanta med natezno napetostjo F/S in relativnim raztezkom Δl/l. Odvisen je od snovi. Enota za prožnostni modul je N/m^2.

Pri žici smo lahko uporabili silo samo v eni smeri. Pri palici lahko uporabimo silo tudi v nasprotni smeri in dobimo skrček. Pri tem gornja enačba še vedno velja.

Vzdolžna deformacija je vedno povezana z deformacijo v prečni smeri. Če se palica podaljša, se v prečni smeri skrči, če se pa v vzdolžni smeri skrajša, se v prečni smeri odebeli. Vzemimo, da imamo opraviti s palico krožnega preseka narejeno iz izotropne snovi. Tedaj velja

$\Delta r/r = -\mu\Delta l/l$.



Relativna sprememba polmera palice je sorazmerna relativni spremembi dolžine. Znak – pove, da imata spremembi nasprotno smer, konstanto μ, ki je odvisna od snovi, pa imenujemo Poissonovo število. Podobno, kot se pri palici krožnega preseka spremeni polmer, se pri palici drugačnega preseka spremeni katerakoli prečna dimenzija. Pri palici pravokotnega preseka s stranicama a in b velja $\Delta a/a = \Delta b/b = -\mu\Delta l/l$.

Poglejmo še, kolikšna je pri vzdolžni deformaciji sprememba prostornine. Vzemimo, da ima palica dolžine l pravokotni presek s stranicama a in b in prostornino $V = lab$. Relativne spremembe računamo z diferenciali:

$\ln V = \ln l + \ln a + \ln b$

$dV/V = dl/l + da/a + db/b = (1-2\mu)dl/l$.

Če je relativna sprememba dolžine Δl/l dosti manjša od 1 velja dovolj natančno tudi

$\Delta V/V = (1-2\mu)\Delta l/l$.

Ta zveza velja za palico poljubnega prečnega preseka. Pri vrednosti $\mu = 0.5$ se prostornina palice ne spremeni, pri manjših vrednostih Poissonovega števila pa se prostornina palice poveča, ko jo raztegnemo.

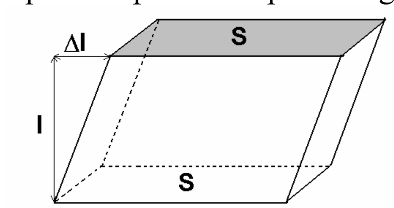
Ko smo palico podaljšali ali skrčili, se je povečala njena prožnostna energija. Ker velja Hookov zakon, lahko uporabimo enačbo, ki smo jo izpeljali za vijačno vzmet. Raztezku s ustreza raztezek Δl, koeficientu vzmeti k pa (SE/l). Prožnostna energija deformirane palice W_e je enaka

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{SE}{l}\Delta l^2 = (Sl)\left(\frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2\right) = Vw_e.$$

Produkt Sl je enak prostornini palice V, drugi člen, ki smo ga označili z w_e pa predstavlja gostoto prožnostne energije oziroma prožnostno energijo na enoto prostornine:
$w_e = W_e/V = E(\Delta l/l)^2/2$.

Poglejmo, kako se deformirajo trdna telesa pod vplivom izotropnega tlaka. Kot primer vzemimo kocko z robom a. Naj na vsako od šestih stranskih ploskev v pravokotni smeri navznoter deluje sila F. Razmerje $F/S = F/a^2$ bomo označili kot Δp. Deformacijo kocke si bomo predstavljali kot linearno superpozicijo treh vzdolžnih deformacij v treh med seboj pravokotnih smereh. Pri eni od teh deformacij, recimo vzdolž osi x, je sprememba prostornine $(\Delta V/V)_x$ enaka
$(\Delta V/V)_x = (1 - 2\mu)\Delta a/a = -(1 - 2\mu)(F/ES) = -(1 - 2\mu)(\Delta p/E)$.
Ko upoštevamo še ostali dve deformaciji vzdolž osi y in z, ki povzročita enaki spremembi prostornine $(\Delta V/V)_x = (\Delta V/V)_y = (\Delta V/V)_z$, je skupna sprememba prostornine $\Delta V/V$ enaka
$\Delta V/V = -3(1 - 2\mu)(\Delta p/E) = -\chi\Delta p$.
Stisljivost χ prožnih izotropnih trdnih snovi je torej enaka $\chi = 3(1 - 2\mu)/E$.

Strižno deformacijo povzroči dvojica sil, ki deluje vzdolž dveh nasprotnih ploskev kvadra. Pri tem se ena ploskev premakne proti drugi za Δl.

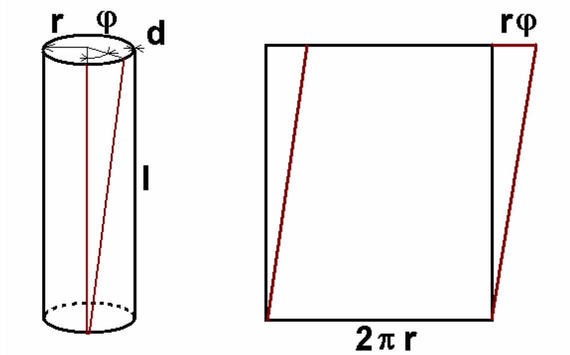


Dokler smo v področju sorazmernosti velja

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta l}{l}. \qquad (1)$$

Tu je S velikost ploskve, na kateri prijemlje ena od sil, l razdalja med ploskvama na katerih prijemljeta sili in G strižni modul. Omeniti je treba, da mora na telo poleg omenjene dvojice sil delovati še en par sil, ki kompenzira navor prvega para sil. Strižni modul ni neodvisna prožnostna konstanta, saj je povezan z elastičnim modulom in Poissonovim številom na naslednji način:
$G = E/2(1+\mu)$.

Primer strižne deformacije je torzijska deformacija cevi ali palice. Pri tem zasukamo en konec cevi ali palice proti drugemu za kot φ. Kot primer vzemimo tanko cev dolžine l, srednjega polmera r in debeline d, d<<r.



Ker govorimo o zasukih bomo namesto sile raje uporabili navor M = rF. Ploskev S, ki se premakne proti drugi je prerez cevi, enak 2πrd. Premik ene ploskve proti drugi je enak rφ, razdalja med ploskvama pa je enaka l. Enačbo (1) zapišemo s temi podatki:

$$\frac{(M/r)}{2\pi rd} = G\frac{r\varphi}{l}.$$

V malo lepši obliki jo zapišemo kot M = Dφ, pri čemer je $D = 2\pi G r^3 d/l$. Za palico polmera r in dolžine l je D enak $D=\pi G r^4/2l$.

Z merjenjem torzijskih deformacij merimo sile in navore.

Oglejmo si še nekaj tipičnih vrednosti nekaterih konstant prožnih teles

snov	E [10^{10} N/m^2]	G [10^{10} N/m^2]	μ	Meja prožnosti [10^7 N/m^2]	Meja trdnosti [10^7 N/m^2]
jeklo	20	8	0.25	30 - 150	50 - 250
aluminij	7.0	2.5	0.40	9.5	11
baker	11	4.2	0.31	7	22
steklo	6.5	2.6	0.25	-	7
kavčuk	0.8	0.3			

Omenimo še, da sta v izotropnih snoveh samo dve neodvisni prožnostni konstanti. Ostale lahko s pomočjo teh dveh izračunamo.

Kot zgled izračunajmo, za koliko se podaljša žica zaradi lastne teže. Žico dolžine l obesimo ne enem koncu. Izhodišče izberimo na tem koncu žice, os x pa usmerimo po žici navpično navzdol. Na del žice med koordinatama x in x+dx (pred deformacijo) deluje teža spodnjega dela žice F = ρS(l-x)g in lastna teža, ki jo bomo zanemarili. Ta del žice se podaljša za du:

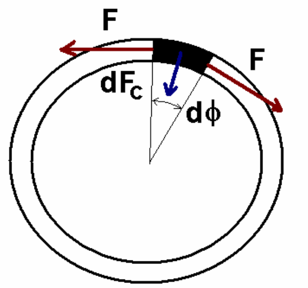
(ρS(l-x)g)/S = Edu/dx

oziroma du = (ρg/E)(l-x)dx. Podaljšek žice u je enak

$$u = \frac{\rho g}{E}\int_0^l (l-x)dx = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

Izračunamo lahko tudi, kako dolga žica bi se strgala zaradi lastne teže. Najbolj je žica obremenjena v pritrdišču. Tam deluje sila, ki je enaka teži žice ρlSg. Razmerje med to silo in presekom žice ρlg je enako meji trdnosti. Za bakreno žico dobimo l = 2.5 km.

Če vrtimo okrog lastne osi vztrajnik s previsoko frekvenco bo razpadel. Kot preprost zgled izračunajmo, s kolikšno največjo frekvenco smemo vrteti okrog lastne osi tanek obroč, da ne bo razpadel. Uporabimo polarni koordinatni sistem z izhodiščem v sredini obroča. Na del obroča, ki ustreza kotu $d\phi$ deluje proti sredini obroča centripetalna sila $dF_c = (\rho S r d\phi)\omega^2 r = \rho S \omega^2 r^2 d\phi$. To silo povzročajo deli obroča na levi in desni.



Če je sila, ki napenja obroča F, je centripetalna sila $2F(d\phi/2)= Fd\phi$. Napetost obroča je torej $F = \rho S\omega^2 r^2$ in $F/S= \rho\omega^2 r^2$ ne sme preseči natezne trdnosti σ_t. Drugače povedano, obodna hitrost ωr ne sme preseči vrednosti $\sqrt{\sigma_t / \rho}$. Pri tipičnih vrednostih $\sigma_t \approx 10^8$ N/m^2 in $\rho \approx 10^4$ kg/m^3 obodna hitrost ne sme preseči 100 m/s. Če je polmer obroča 10 cm je maksimalna kotna hitrost 1000 s^{-1}, maksimalna frekvenca pa 160 Hz ali 9600 rpm (obratov v minuti).

Primera se lahko lotimo tudi drugače. Opazujmo obroč v sistemu, ki se vrti skupaj z obročem. V tem opazovalnem sistemu obroč miruje. Opazovalni sistem je neinercialen. V njem deluje sistemska –centrifugalna- sila. Oglejmo si sile na polovico obroča. Na stiku z drugo polovico obroča delujeta dve enaki sili F, skupaj torej 2F. V nasprotni smeri deluje rezultanta centrifugalnih sil na posamezne dele obroča. Ker v navedenem opazovalnem sistemu ta del obroča miruje, mora biti vsota sil, ki delujejo nanj, enaka nič. Upoštevati je treba tudi sistemsko (centrifugalno) silo.
Dele obroča opišemo v polarnem koordinatnem sistemu. Na majhen del obroča, ki ustreza intervalu kota med ϕ in $\phi+\delta\phi$ in ima maso $dm = \rho S r d\phi$, deluje centrifugalna sila $\omega^2 r dm$. Njena projekcija na smer rezultante je enaka
$dF_c = \omega^2 r dm \sin\phi = \rho\omega^2 S r^2 \sin\phi d\phi$.
Rezultanta centrifugalnih sil na dele polovice obroča je enaka

$$F_c = \int_0^{\pi} \rho\omega^2 S r^2 \sin\phi d\phi = 2\rho\omega^2 S r^2.$$

Ker v opazovalnem sistemu obroč miruje, je $F_c = 2F$. Sila F, ki napenja obroč je torej enaka $F = \rho\omega^2 r^2 S$. Prišli smo do enakega rezultata kot prej.

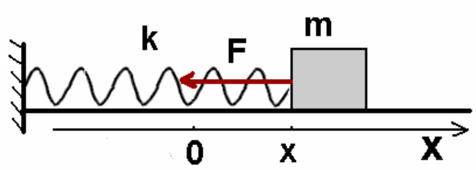
Za vajo lahko izračunate, s kolikšno največjo frekvenco se sme okrog osi skozi težišče vrteti palica, da se ne bo pretrgala.

NIHANJE IN NIHALA

Do nihanja pride če telo izmaknemo iz stabilne ravnovesne lege in se pri tem pojavi sila ali navor, ki potiska telo nazaj proti ravnovesni legi.

Sisteme, ki nihajo, imenujemo nihala. Obravnavali bomo vzmetno nihalo, matematično nihalo, fizično nihalo in sučno nihalo.

Za začetek obravnavajmo vodoravno vzmetno nihalo, ki ga sestavljata vzmet s koeficientom k in utež z maso m. Predpostavljamo, da utež drsi po vodoravni podlagi brez trenja. Mirovna lega uteži je tista,v kateri vzmet ni raztegnjena.



Če je v nekem trenutku utež izmaknjena iz mirovne lege za x, deluje nanjo vzmet s silo F = –kx. Ker drugih vodoravnih sil ni, je po 2. Newtonovem zakonu ma = -kx, oziroma $a+(k/m)x = 0$.

Enačbo, ki smo jo dobili, imenujemo enačba nihanja. Rešitev enačbe zapišemo v obliki: $x = x_0 sin(\Omega t+\Phi)$.

Konstanti x_0 in Φ sta poljubni in ju moramo določiti iz začetnih pogojev. Amplituda odmika x_0 meri največji odmik od mirovne (ravnovesne) lege, faza Φ pa pove, v kateri legi (mirovni,skrajni...) je utež v začetku opazovanja. Krožna frekvenca Ω ni poljubna, ampak je določena z lastnostmi nihala. Enaka je $\sqrt{k/m}$. Krožno frekvenco lahko povežemo z nihajnim časom t_0, $\Omega\, t_0 = 2\pi$, ali frekvenco nihanja ν, $\nu = 1/t_0 = \Omega/2\pi$.

Hitrost in pospešek uteži sta enaka

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \Omega \cos(\Omega t + \Phi) = v_0 \cos(\Omega t + \Phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_0 \Omega^2 \sin(\Omega t + \Phi) = -a_0 \sin(\Omega t + \Phi).$$

Največjo hitrost v_0 ima utež v mirovni legi, največji pospešek a_0 pa v skrajni legi.

Ker med nihanjem opravlja delo samo sila vzmeti, je mehanska energija, ki je enaka vsoti kinetične energije in prožnostne energije, konstantna. Enaka je tudi največji kinetični energiji (v mirovni legi), ali največji prožnostni energiji (v skrajni legi):

$$W = W_k + W_e = mv^2/2 + kx^2/2 = mv_0^2/2 = kx_0^2/2. \qquad (1)$$

Pri navpičnem vzmetnem nihalu je v mirovni legi teža uteži mg enaka ks_0. Tu je s_0 raztezek vzmeti. Ko izmaknemo utež iz mirovne lege v navpični smeri za x, se sila vzmeti spremeni za kx. Proti mirovni legi torej deluje sila velikosti kx, enako kot pri vodoravnem vzmetnem nihalu. Enačba nihanja in njene rešitve so enake, kot pri vodoravnem vzmetnem nihalu. Razlika je le pri energiji. Poleg sile vzmeti tu opravlja delo tudi teža, zato je vsota kinetične, potencialne in prožnostne energije konstantna. Pokaže se, da je energija nihanja, ki predstavlja razliko med energijo nihajočega nihala in energijo nihala v mirovni legi, še vedno podana z enačbo (1), ki smo jo dobili pri vodoravnem nihalu.

Matematično nihalo predstavlja majhna utež z maso m na lahki vrvi dolžine l. Utež se giblje po krožnici, zato bomo uporabili enačbo za kroženje M = Jα. Navor teže je po velikosti enak mglsinφ. Tu je φ zasuk iz mirovne lege. Navor teže moramo zapisati kot M = –mglsinφ. Da je to res lahko preverimo pri majhnih kotih, ko je sin$\varphi \approx \varphi$ in je torej M$\approx$ –mglφ. Navor teže in zasuk φ iz mirovne lege sta nasprotno usmerjena, zato je

minus v enačbi potreben. Enako velja tudi pri večjih kotih. Vztrajnostni moment uteži glede na pritrdišče vrvice je $J = ml^2$. Enačba nihanja je v tem primeru
$\alpha + (g/l) \sin\varphi = 0$.
V splošnem je reševanje te enačbe bolj zapleteno, kot reševanje enačbe nihanja vzmetnega nihala ($a + \Omega^2 x = 0$). Če pa se omejimo na majhne amplitude kota tako, da lahko $\sin\varphi$ dovolj dobro aproksimiramo s prvim členom Taylorjeve vrste,
$\sin\varphi = \varphi - \varphi^3/3! + \varphi^5/5! - ...$,
dobimo enačbo
$\alpha + (g/l)\, \varphi = 0$,
ki je ekvivalentna enačbi vzmetnega nihala. Rešitev enačbe nihanja matematičnega nihala je
$\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega t+\Phi)$.
Amplitudo kota φ_0 in fazo Φ je treba določiti iz začetnih pogojev, krožna frekvenca Ω pa je enaka

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Frekvenca matematičnega nihala je $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, nihajni čas pa $t_0 = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Kotna hitrost in kotni pospešek matematičnega nihala sta enaka
$\omega = \varphi_0 \Omega \cos(\Omega t+\Phi)$
$\alpha = -\varphi_0 \Omega^2 \sin(\Omega t+\Phi)$.

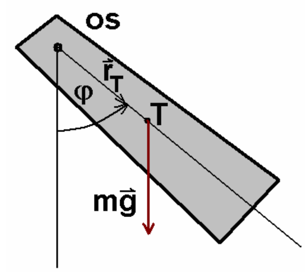
Pri večjih amplitudah nihanje ni več harmonično, nihajni čas pa postane odvisen od amplitude kota.

Če zanemarimo zračni upor in neidealnost vrvice, opravlja pri nihanju matematičnega nihala delo samo teža, zato je vsota kinetične in potencialne energije uteži konstantna. Z zakonom o ohranitvi mehanske energije lahko izračunamo hitrost uteži pri poljubnem kotu φ, če je amplituda kota φ_0 znana. Pri tem je lahko amplituda kota velika. Vzemimo, da merimo potencialno energijo od pritrdišča vrvice. V skrajni legi je kinetična energija nič, potencialna energija pa $-mgl\cos\varphi_0$. V trenutku, ko je odmik iz mirovne lege enak φ, je kinetična energija uteži enaka $mv^2/2$, potencialna energija pa $-mgl\cos\varphi$. Mehanska energija je v obeh legah enaka. Iz tega dobimo hitrost uteži:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

Z matematičnim nihalom lahko dokaj natančno izmerimo težni pospešek g. Nihajni čas je namreč odvisen le od dolžine vrvi in težnega pospeška. Nihajni čas lahko natančno izmerimo tako, da izmerimo čas velikega števila nihajev, n. pr. Nt_0, in ga delimo s številom nihajev N. Nihaje štejemo pri prehodu nihala skozi ravnovesno lego, kjer je hitrost uteži največja. Relativna napaka izmerjenega nihajnega časa pada kot 1/N.

Fizično nihalo je katerokoli telo, ki je vrtljivo okrog vodoravne osi, ki ne gre skozi težišče. V mirovni legi je težišče navpično pod osjo.



Če je v nekem trenutku nihalo izmaknjeno iz mirovne lege za kot φ, deluje nanj navor M enak: $M = -mgr_T \sin\varphi$. Tu je r_T oddaljenost težišča telesa od osi. Enačba za vrtenje pove, da je M = Jα, oziroma

$\alpha + (mgr_T/J)\sin\varphi = 0.$

Upoštevati moramo seveda vztrajnostni moment telesa za vrtenje okrog osi. Težave so enake, kot pri matematičnem nihalu, zato bomo obravnavali le nihanja z majhnimi amplitudami, ko bomo sinφ lahko nadomestili s φ. V tem primeru je krožna frekvenca Ω enaka $\Omega = \sqrt{mgr_T/J}$, nihajni čas pa $t_0 = 2\pi\sqrt{J/mgr_T}$.

Obravnavajmo kot primer homogeno palico dolžine l in mase m, ki je vrtljiva okrog vodoravne osi, ki je od središča oddaljena za x. Po Steinerjevem izreku je vztrajnostni moment J za vrtenje palice okrog te osi enak $J = ml^2/12 + mx^2$. Oddaljenost težišča od osi je enaka x. Nihajni čas palice je enak

$$t_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{l^2}{12x} + x}.$$

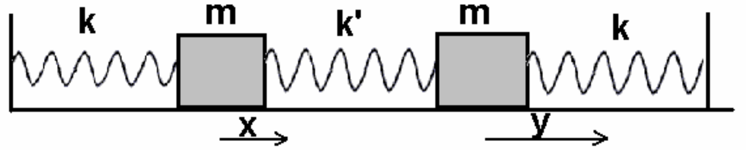
Najkrajši nihajni čas dobimo, ko je $x = l/\sqrt{12}$.

Zadnje nihalo, ki ga bomo obravnavali je sučno nihalo. Pod tem izrazom si bomo predstavljali simetrično telo z vztrajnostnim momentom J, ki je vrtljivo okrog navpične osi. Na to telo je pritrjena polžasta vzmet s koeficientom D, ali pa palica ali žica, ki se pri zasuku telesa torzijsko deformira. V obeh primerih je navor, ki se pojavi pri zasuku telesa iz mirovne lege za kot φ enak M = –Dφ. Enačba nihanja je v tem primeru

$\alpha + (D/J)\,\varphi = 0.$

Enačbe ni treba linearizirati, kot v primeru matematičnega in fizičnega nihala. Pri poljubni amplitudi dobimo harmonično nihanje s krožno frekvenco $\Omega = \sqrt{D/J}$.

Do sedaj smo obravnavali nihanje posameznih nihal. Poglejmo, kaj se zgodi , ko nihala sklopimo med sabo tako, da ne nihajo neodvisno. Ogledali si bomo samo preprost primer dveh enakih vodoravnih vzmetnih nihal, ki ju povežemo z vzmetjo s koeficientom k'. Vsako nihalo sestavlja telo z maso m in vzmet s koeficientom k. Obe telesi drsita brez trenja po vodoravni podlagi.



Ko je v nekem trenutku odmik prvega telesa iz mirovne lege enak x, odmik drugega telesa iz mirovne lege pa y, deluje na prvo telo sila
$F_1 = -kx - k'(x - y)$. Sila na drugo telo je v tem trenutku enaka $F_2 = -ky + k'(x - y)$.
Zapišimo drugi Newtonov zakon za obe telesi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k'(x-y)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky + k'(x-y).$$

Enačbi seštejmo pa dobimo

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x+y) = -k(x+y).$$

Podobno dobimo, ko enačbi odštejemo

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x-y) = -(k+2k')(x-y).$$

Obe enačbi sta enačbi nihanja. Njuni rešitvi sta
$x+y = A\sin(\Omega t+\Phi_1)$
$x-y = B\sin(\Omega' t+\Phi_2)$.
A, B, Φ_1 in Φ_2 so konstante, ki jih moramo določiti iz začetnih pogojev, krožni frekvenci pa sta enaki $\Omega = \sqrt{k/m}$ in $\Omega' = \sqrt{(k+2k')/m}$. Dobili smo pravzaprav dve lastni nihanji sistema sklopljenih nihal. Pri prvem lastnem nihanju je vseskozi odmik x enak odmiku y. Nihali nihata v isti smeri z enako amplitudo A/2, sklopitvena vzmet pa se ne razteza. Nihali nihata s krožno frekvenco Ω, kot v primeru, ko nista sklopljeni. Pri drugem lastnem nihanju je vseskozi x = -y. Nihali nihata z enakima amplitudama B/2 drugo proti drugemu s krožno frekvenco Ω', ki je višja od krožne frekvence Ω.
Poljubno nihanje sistema dveh nihal je vedno linearna kombinacija lastnih nihanj. Pri obravnavanem primeru je zanimiva še rešitev, ko je A = B in $\Phi_1 = \Phi_2$. Zaradi enostavnosti vzemimo $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Tedaj velja

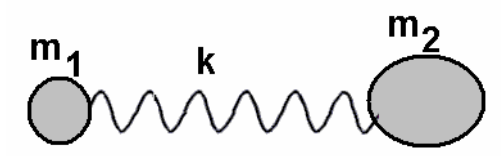
$$x = 2A\sin\left(\frac{\Omega'+\Omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\Omega'-\Omega}{2}t\right)$$

$$y = -2A\cos\left(\frac{\Omega'+\Omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega'-\Omega}{2}t\right).$$

V primeru šibke sklopitve, ko je $k' \ll k$, se krožni frekvenci malo razlikujeta in opazimo utripanje. Nihanje prehaja z enega nihala na drugo in nazaj. Čas utripa t_u je čas med dvema mirovanjema enega nihala. V času enega utripa naraste argument drugega člena v izrazu za x ali y za π: $(\Omega'-\Omega)t_u/2=\pi$. Frekvenca utripanja je enaka $\nu_u=1/t_u=(\Omega'-\Omega)/2\pi= \nu'-\nu$. Enaka je torej razliki lastnih frekvenc.

V primeru, ko sklopimo dve različni nihali, nekatere ugotovitve še vedno veljajo. Še vedno dobimo dve lastni nihanji pri katerih se amplitudi nihanja nihal ne spreminjata. Lastni nihanji imata v splošnem različni frekvenci in sta bolj zapleteni, kot v obravnavanem primeru. Poljubno nihanje sistema dveh sklopljenih nihal je linearna kombinacija lastnih nihanj.

Oglejmo si še nihalo, ki ga sestavljata telesi z masama m_1 in m_2 povezani z vzmetjo s koeficientom k, katere maso zanemarimo.



Tako nihalo predstavlja klasični model nihanja dvoatomne molekule. Vzemimo, da se telesi gibljeta po vodoravni podlagi brez trenja. Ker v vodoravni ravnini na nihalo ne deluje nobena zunanja sila, težišče nihala miruje, ali pa se giblje premo in enakomerno. Vzemimo, da težišče miruje in opazujmo nihalo iz težiščnega sistema. V sistemu deluje samo notranja sila, sila vzmeti. Če je odmik prvega telesa iz mirovne lege enak x, drugega pa y velja $m_1x+m_2y=0$, težišče se namreč ne premika. Sila vzmeti je po velikosti enaka $k(x-y) = kx(1+m_1/m_2)$.Drugi Newtonov zakon za prvo telo pravi
$m_1d^2x/dt^2 = -k(1+m_1/m_2)x$.
Dobili smo enačbo harmoničnega nihanja s krožno frekvenco Ω,

$$\Omega = \sqrt{k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Časovna poteka odmikov teles iz mirovne lege x in y sta enaka
$x = x_0\sin(\Omega t+\Phi)$
$y = -(m_1/m_2)x_0\sin(\Omega t+\Phi)$.
Maso m, ki nastopa v izrazu za krožno frekvenco in je enaka $m = m_1m_2/(m_1+m_2)$, imenujemo reducirana masa.

DUŠENO IN VSILJENO NIHANJE

Dušeno nihanje

Doslej smo predpostavljali, da je nihanje nihal nedušeno, kot da se nihala nikoli ne ustavijo. Iz prakse pa vemo, da se vsako nihalo enkrat ustavi. Razlog za to so trenje, zračni upor, neidealnost vzmeti itd. Opis dušenja v splošnem ni preprost. Zato bomo obravnavali model, v katerem je sila upora, ki zavira gibanje, sorazmerna hitrosti. V praksi je taka viskozna sila. Matematično je ta model najlaže obdelati, ugotovitve pa veljajo bolj splošno.

Obravnavajmo torej vodoravno vzmetno nihalo, pri čemer pa telo, ki je pritrjeno na vzmet, ne drsi po idealno gladki podlagi, ampak deluje podlaga na telo s silo F_u, ki je po smeri nasprotna, po velikosti pa sorazmerna hitrosti: $F_u = -Kv$. Ta podrobnosti, od katerih je odvisna konstanta K se zaenkrat ne zmenimo. Zapišimo drugi Newtonov zakon za telo, ki je izmaknjeno iz ravnovesne lege za x:
$-kx - Kv = ma$.
Enačbo delimo z maso in zapišemo na naslednji način:
$a + 2\beta v + \Omega_0^2 x = 0$.
Z 2β smo označili razmerje K/m, z Ω_0 pa krožno frekvenco nedušenega nihala $\sqrt{k/m}$. Rešitev enačbe iščemo v obliki

$x = Ae^{\lambda t}$,

pri čemer je λ lahko kompleksno število. Ko vstavimo nastavek v enačbo dobimo

$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \Omega_0^2) = 0.$

Če hočemo, da je nastavek res rešitev (diferencialne) enačbe, mora biti zadnja enačba izpolnjena v vsakem trenutku, to pa pomeni, da mora biti izraz v oklepaju enak nič:

$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \Omega_0^2 = 0.$

Enačba ima dve rešitvi:

$\lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Omega_0^2}.$

Splošno rešitev enačbe dušenega nihanja zapišemo torej v obliki

$x = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}.$

Konstanti A in B določimo iz začetnih pogojev. Zavedati se moramo, da sta konstanti A in B lahko tudi kompleksni, odmik iz izhodišča x pa mora biti realen.

Poglejmo najprej primer, ko ni dušenja (β=0).Tedaj sta rešitvi enačbe $\lambda = \pm i\Omega_0$, rešitev enačbe nihanja pa je

$x = Ae^{i\Omega_0 t} + Be^{-i\Omega_0 t}.$

S pomočjo zveze

$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

prepišemo rešitev enačbe nihanja v obliki

$x = (A+B)\cos\Omega_0 t + i(A-B)\sin\Omega_0 t.$

Rešitev je realna, kot mora biti, ko je A = B* in jo lahko napišemo v obliki

$x = C\cos\Omega_0 t + D\sin\Omega_0 t$ ali, kot smo jo pisali do sedaj, $x = x_0\sin(\Omega_0 t+\Phi)$

Ko imamo opravka z dušenjem ločimo tri možnosti:

- podkritično dušenje ($\beta<\Omega_0$)
- kritično dušenje ($\beta=\Omega_0$) in
- nadkritično dušenje ($\beta>\Omega_0$)

Pri nadkritičnem dušenju sta obe vrednosti λ_+ in λ_- realni in negativni. Če nihalo izmaknemo iz mirovne lege in spustimo, se bo vračalo proti mirovni legi, ne bo je pa prešlo. Odmik iz mirovne lege je vsota dveh eksponentno padajočih členov.

Pri kritičnem dušenju je $\lambda_+=\lambda_-$. Splošna rešitev enačbe nihanja ima obliko

$x = Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}.$

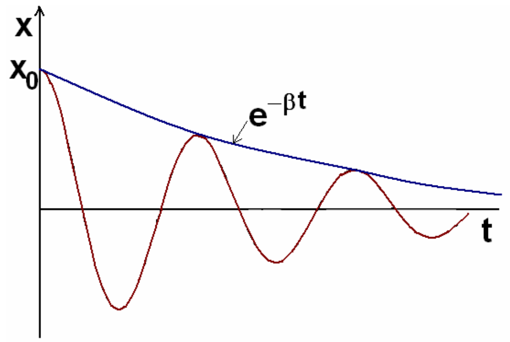
Če nihalo izmaknemo iz mirovne lege in spustimo, se bo vračalo proti mirovni legi in je ne bo prešlo. Kot zanimivost omenimo, da se v tem primeru nihalo najhitreje vrača proti mirovni legi.

Do pravega dušenega nihanja pride v primeru podkritičnega dušenja. Tedaj lahko časovni potek odmika iz mirovne lege zapišemo na naslednji način:

$x = Ae^{-\beta t}\sin\Omega t + Be^{-\beta t}coc\Omega t = x_0 e^{-\beta t}\sin(\Omega t + \Phi)$. Pri podkritičnem dušenju lahko rečemo, da je amplituda nihanja $x_0(t)$ časovno odvisna, $x_0(t) = x_0 e^{-\beta t}$, β pa imenujemo faktor dušenja. Krožna frekvenca nihala Ω pa je manjša od krožne frekvence nedušenega nihala Ω_0 :

$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \beta^2}.$

Značilni čas τ, s katerim pada amplituda nihanja je enak $\tau=\beta^{-1}$. V času τ pade amplituda na $1/e\approx1/3$ začetne vrednosti, v času 5τ pa približno na stotino začetne vrednosti.



Ker se s časom zmanjšuje amplituda nihala, se s časom zmanjšuje tudi energija nihanja. To je posledica dela, ki ga opravlja sila upora. Ko je nihalo v skrajni legi je energija nihanja vzmetnega nihala enaka $kx_0^2/2$. V našem primeru amplituda nihanja $x_0(t)$ eksponentno pada proti nič, zato proti nič pada tudi energija nihanja W(t). Ker je energija nihanja sorazmerna kvadratu amplitude, velja

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}.$$

Tu je W_0 začetna energija nihanja.

Vsiljeno nihanje

Nihalu lahko nihanje tudi vsiljujemo. Na nihalo lahko delujemo s časovno odvisno silo ali navorom. Pri tem začne nihalo nihati. Zanimal nas bo primer, ko je sila ali navor sinusna funkcija časa.

Oglejmo si za začetek primer, ki ga brez težav realiziramo. Vzemimo vzmet na kateri visi utež. Zgornje pritrdišče vzmeti naj sinusno niha v navpični smeri okrog srednje lege. Utež naj bo potopljena v posodo z vodo ali glicerinom. Pri gibanju v kapljevini namreč nastopi sila upora, ki povzroča dušenje nihala.

Poglejmo najprej, kaj opazimo, ko je frekvenca nihanja pritrdišča nizka. Tedaj utež sledi pritrdišču. Utež niha torej v fazi in z enako amplitudo kot pritrdišče.

Povsem drugačna je situacija, ko je frekvenca nihanja pritrdišča blizu lastne frekvence nihala. Ko začne pritrdišče nihati, začne nihati tudi utež. Amplituda nihanja uteži narašča, dokler ni doseženo stacionarno stanje. V stacionarnem stanju niha utež z enako frekvenco kot pritrdišče, a z drugo fazo. V resonanci, ko je vsiljevana frekvenca enaka lastni frekvenci nihala, je fazni premik 90^0. Ko je pritrdišče v skrajni legi, je hitrost uteži največja in ko je hitrost pritrdišča največja je utež v skrajni legi. Amplituda nihanja uteži je večja od amplitude nihanja pritrdišča, odvisna pa je od dušenja nihala. Z naraščanjem dušenja nihala amplituda nihanja uteži v resonanci pada.

Ko postane vsiljevana frekvenca višja od lastne frekvence nihala se amplituda nihanja uteži zmanjša in z naraščajočo frekvenco nihanja pritrdišča pada. Utež in pritrdišče pa nihata drugo proti drugemu torej s faznim premikom 180^0.

Kot zgled, s katerim bomo te kvalitativne ugotovitve tudi kvantitativno opisali, obravnavajmo dušeno vodoravno vzmetno nihalo. Sila upora naj bo sorazmerna hitrosti, $F_u = -Kv$. Na utež naj deluje v smeri proti pritrdišču vzmeti časovno odvisna sila $F(t) = F_0 \sin\Omega t$. Pri poljubnem odmiku x iz mirovne lege ob času t deluje na utež rezultanta sil $-kx - Kv + F(t)$, ki je po drugem Newtonovem zakonu enaka ma:

$$ma = -kx - Kv + F(t).$$

Enačbo delimo z maso in prepišemo v znano obliko:

$$a + 2\beta v + \Omega_0^2 x = (F_0/m)\sin(\Omega t).$$

Rešitev enačbe lahko sestavimo iz dveh delov: iz splošne rešitve homogenega dela enačbe in iz ene (partikularne) rešitve nehomogenega dela. Rešitev homogenega dela je pravzaprav dušeno nihanje in to v času, ki je enak nekaj značilnih časov τ, $\tau=\beta^{-1}$, zamre. Potem ostane samo še nihanje z vsiljevano frekvenco. Doseženo je torej stacionarno stanje, o katerem smo govorili pri kvalitativnem opisu vsiljenega nihanja. Rešitev enačbe bomo torej iskali v obliki

$x = x'\sin(\Omega t) + x''\cos(\Omega t)$.

Nastavek vstavimo v enačbo za vsiljeno nihanje in izenačimo koeficient pri $\sin(\Omega t)$ na levi strani z F_0/m:

$x'(\Omega_0^2 - \Omega^2) - x''2\beta\Omega = F_0/m$.

Koeficient pri $\cos(\Omega t)$ na levi strani enačbe mora biti enak nič:

$x'2\beta\Omega + x''(\Omega_0^2 - \Omega^2) = 0$.

Rešitvi enačb sta

$$x' = \frac{(F_0/m)(\Omega_0^2 - \Omega^2)}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}$$

$$x'' = -\frac{(F_0/m)2\beta\Omega}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}.$$

Odmik telesa od izhodišča lahko zapišemo tudi v obliko $x = x_0\sin(\Omega t - \Phi)$. Pri tem je $x' = x_0\cos\Phi$ in $x'' = -x_0\sin\Phi$. Amplituda nihanja uteži je enaka

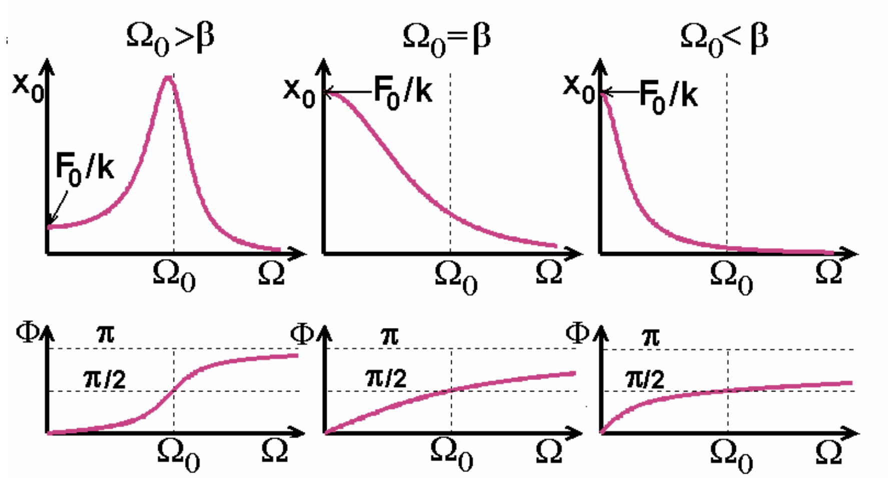
$$x_0 = \sqrt{x'^2 + x''^2} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

Fazna razlika Φ med nihanjem sile in nihanjem uteži pa je enaka

$$\Phi = arctg\left(-\frac{x''}{x'}\right) = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)}\right).$$

Z največjo amplitudo niha nihalo v resonanci pri $\Omega \approx \Omega_0$. V primeru šibkega dušenja ($\beta \ll \Omega_0$) je amplituda nihanja uteži v resonanci enaka $x_0 = F_0/2m\beta\Omega_0 = F_0/2k(\beta/\Omega_0)$. Amplituda je torej obratno sorazmerna faktorju dušenja β.

Fazna razlika Φ med nihanjem sile in uteži pa je pri nizkih frekvencah enaka nič, v resonanci 90^0 in, ko je vsiljevana frekvenca dosti višja od lastne frekvence, postane fazna razlika enaka 180^0. Za tri primere dušenja sta frekvenčni odvisnosti x_0 in Φ narisani na naslednji sliki.



Poglejmo še, kakšno moč troši nihalo potem, ko se vzpostavi stacionarno stanje. Moč je enaka produktu Fv, pri čemer je $F = F_0\sin(\Omega t)$ hitrost v pa je enaka
$v = dx/dt = x'\Omega\cos\Omega t - x''\Omega\sin\Omega t$.
Moč je enaka

$$P = \frac{F_0 x'\Omega}{2}\sin(2\Omega t) + \frac{F_0 x''\Omega}{2}\cos(2\Omega t) - \frac{F_0 x''\Omega}{2}.$$

Prva dva člena sta odvisna od časa. Njuno časovno povprečje je enako nič. Tretji člen pa je konstanten in predstavlja povprečno moč $\overline{P}$, ki jo troši nihalo. Ta je enaka

$$\overline{P} = \frac{(F_0^2/m)\beta\Omega^2}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}.$$

V primeru šibkega dušenja troši nihalo največjo moč, ko je $\Omega_0 \approx \Omega$. Tedaj je povprečna moč približno enaka $F_0^2/4\beta m$. Nihalo troši moč zaradi dela upora.

Na koncu omenimo, da smo zaenkrat obravnavali samo nihanje mehanskih nihal. Nihanje pa je mnogo bolj splošen pojav. Srečali ga bomo med drugim še v elektriki in pri obravnavanju lastnosti snovi. Kot zanimivost omenimo, da si tudi molekule vode v kapljevini lahko predstavljamo kot dušena nihala in če jih vzbujamo z mikrovalovi s frekvenco približno 2.5 GHz , ki je v bližini resonančne frekvence vodnih molekul, pride do porabe moči in gretja vode. Na tej osnovi delujejo mikrovalovne pečice.

GRAVITACIJA

Gravitacijska sila

Gravitacijska sila je privlačna sila, ki deluje med masami. Kot težo jo občutimo vsak dan. Pomembne podatke o naravi te sile so dala opazovanja gibanja planetov. Bistvena dognanja teh opazovanj so zbrana v treh Keplerjevih zakonih:

- Planet se giblje po elipsi. Sonce je v gorišču elipse.
- Krajevni vektor od sonca do planeta opiše v enakih časih enake ploščine.

- Kvocient kuba velike polosi elipse in kvadrata obhodnega časa okrog sonca je za vse planete enak.

Tiri planetov se malo razlikujejo od krogov pa tudi s kroženjem smo se že ukvarjali. Zato poglejmo, kako bi Keplerjeve zakone prepisali za primer kroženja.

- Planet kroži okoli sonca.
- Kotna hitrost je konstantna.
- Kvocient kuba polmera kroženja in kvadrata obhodnega časa r^3/t_0^2 je za vse planete enak.

Poglejmo, kaj ti poenostavljeni zakoni povedo o gravitacijski sili. Če planet enakomerno kroži okrog sonca, deluje nanj stalna centripetalna sila proti središču kroženja (soncu). Gravitacijska sila je torej centralna sila, ki je odvisna samo od razdalje r od sonca do planeta, ni pa odvisna od smeri. Ker je gravitacijska sila F v tem primeru centripetalna sila velja

$F = m\omega^2 r = m(2\pi)^2 r/t_0^2$.

Iz te enačbe izračunamo razmerje r^3/t_0^2, ki je za vse planete konstantno:

$r^3/t_0^2 = Fr^2/m(2\pi)^2 = \text{konst.}$

Ta konstanta je neodvisna od polmera kroženja in od mase planeta, saj je za vse planete enaka. To pa pomeni, da mora biti sila, s katero sonce privlači planet sorazmerna masi planeta in obratno sorazmerna kvadratu oddaljenosti od planeta do sonca:

$F \propto m/r^2$.

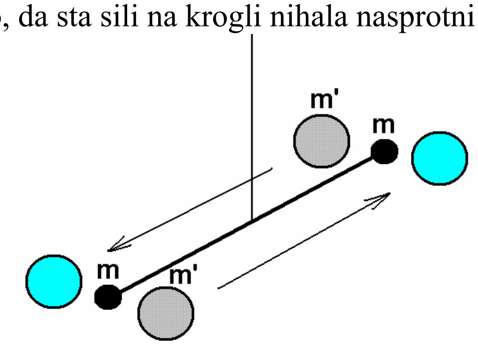
Ker morata v enačbi nastopati masa planeta m in masa sonca M enakopravno je gravitacijska sila med planetom sorazmerna mM/r^2. Vpeljemo gravitacijsko konstanto κ in zapišemo izraz za silo med planetom in soncem v obliki:

$F = \kappa mM/r^2$.

Enak izraz lahko zapišemo za silo med dvema majhnima telesoma z masama m_1 in m_2 v razdalji r:

$F = \kappa m_1 m_2/r^2$.

Gravitacijsko konstanto κ izmerimo s Cavendishovo tehtnico. Osnova te tehtnice je torzijsko nihalo. Na tanki niti visi vodoravna palica, ki ima na konceh pritrjeni uteži z maso m. Dve drugi uteži z maso m' Sta najprej postavljeni tako, da delujeta z gravitacijsko silo na uteži nihala v radialni smeri. Ko se nihalo umiri dodatni uteži premaknemo in sicer tako, da sta sili na krogli nihala nasprotni kot v začetku.



Nihalo ni več v mirovni legi, zato zaniha. Ker so zasuki nihala majhni, jih merimo tako, da posvetimo s curkom svetlobe na zrcalo, ki je pritrjeno na nihalo in opazujemo odbit curek na oddaljenem zaslonu. Izmerimo lahko dvoje:

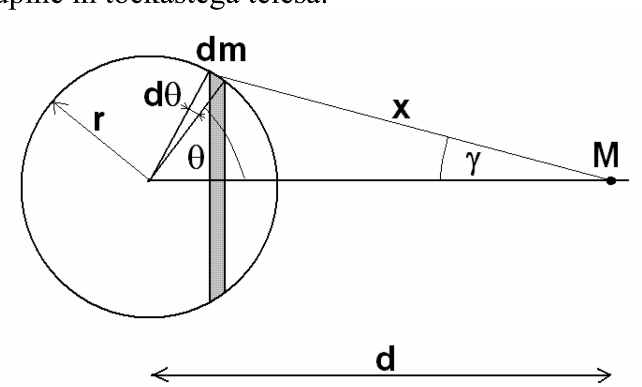
- kot med obema ravnovesnima legama nihala in nihajni čas, ali
- začetni pospešek uteži nihala.

V obeh primerih lahko izračunamo gravitacijsko konstanto κ. Ta je enaka $\kappa = 6.67259\ 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

Mimogrede omenimo, da je drugi Kepplerjev zakon povezan z ohranitvijo vrtilne količine. Gravitacijska sila je torej centralna.

Zveza $F = \kappa m_1 m_2/r^2$, ki smo jo zapisali za dve točkasti telesi velja tudi če imamo opravka z dvema homogenima kroglama, ali kroglo in točkasto maso. V prvem primeru je r razdalja med središčema krogel, v drugem pa razdalja med središčem krogle in točkasto maso. Da je to res ugotovimo, ko izračunamo silo med homogeno krogelno lupino in točkasto maso, ki je zunaj ali znotraj lupine. Če je točkasta masa znotraj lupine, je gravitacijska sila lupine nanjo enaka nič. Zunaj lupine je gravitacijska sila lupine na točkasto maso taka, kot bi bila vsa masa lupine zbrana v njenem središču.

Naj bo μ masa na enoto površine tanke krogelne lupine, njen polmer pa naj bo r. Točkasto telo z maso M maj bo zunaj krogelne lupine v oddaljenosti d od središča lupine. Mislimo si da je krogelna lupina razrezana na tanke pasove okrog premice, ki povezuje središče lupine in točkasto telo. Od te zveznice merimo kot ϑ. Pas naj ustreza intervalu med kotom ϑ in $\vartheta+d\vartheta$. Masa dm tega pasu je enaka $dm = \mu(2\pi r\sin\vartheta)(rd\vartheta)$. Prvi oklepaj predstavlja dolžino pasu, drugi pa širino. Označimo z x razdaljo med poljubno točko na pasu in točkastim telesom, z γ pa kot med zveznico točke na pasu in točkastega telesa in zveznico središča lupine in točkastega telesa.



Gravitacijska sila dF, ki jo na točkasto telo povzroča omenjeni pas, je enaka

$$dF = \kappa \frac{Mdm\cos\gamma}{x^2} = \frac{\kappa 2\pi M\mu r^2}{x^2}\cos\gamma \sin\vartheta d\vartheta.$$

Po kosinusnem izreku izračunamo $\cos\gamma$:

$r^2 = d^2 + x^2 - 2xd\cos\gamma$.

Prav tako po kosinusnem izreku izračunamo $\cos\vartheta$ in potem diferencial $\sin\vartheta d\vartheta$:

$x^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\vartheta$

$xdx = rd\sin\vartheta d\vartheta$.

S spremenljivko x je potem dF zapisan

$$dF = \pi\kappa\mu M\,\frac{r}{d^2}\left(1 + \frac{d^2 - r^2}{x^2}\right)dx.$$

Pri integraciji moramo upoštevati da se x spreminja od d-r do d+r pa dobimo

$F = \kappa(4\pi r^2\mu)M/d^2 = \kappa mM/d^2$.

Člen v oklepaju je ravno masa krogelne lupine m. Sila je torej taka, kot da je vsa masa krogelne lupine zbrana v njenem središču.

Če bi ponovili podoben račun za primer, ko je točkasto telo znotraj lupine bi dobili enak integral, le integracijski meji bi bili od r-d do r+d. Integral je v tem primeru enak nič.

Pokazali smo torej, da je znotraj tanke homogene krogelne lupine gravitacijska sila lupine enaka nič, zunaj lupine pa je gravitacijska sila lupine taka, kot da bi bila vsa masa lupine zbrana v njenem središču. Če vzamemo kroglo mase M, katere gostota je odvisna samo od oddaljenosti od središča, ne pa od smeri, je zunaj krogle sila na majhno telo mase m enaka $F=\kappa Mm/r^2$, pri čemer je r razdalja od središča krogle do majhnega telesa. Podobno velja, če imamo opravka z dvema krogelnima telesoma.

Kako pa je znotraj krogelnega telesa? Zaradi enostavnosti vzemimo homogeno krogelno telo s polmerom R in gostoto ρ. Ko je majhno telo z maso m v razdalji r (r<R) od središča krogle, delujejo nanj z gravitacijsko silo samo tisti deli krogelnega telesa, ki so od središča oddaljeni za manj kot r. Gravitacijska sila je torej enaka

$$F=\frac{\kappa m\left(\frac{4\pi r^3\rho}{3}\right)}{r^2}=\frac{4\pi\kappa m\rho}{3}r.$$

Gravitacijska sila je v središču krogle enaka nič in linearno narašča z r do površja krogle, kjer doseže maksimalno vrednost $F_0 = 4\pi\kappa m\rho R/3$. Nad površjem krogle gravitacijska sila z naraščajočim r pada kot $F = F_0(R/r)^2$, pod površjem krogle pa narašča kot $F = F_0(r/R)$.

Teža je gravitacijska sila v bližini Zemljinega površja. Na telo z maso m poljubne oblike, katerega dimenzije so dosti manjše or polmera zemlje R, $R\approx 6400$ km, deluje zemlja s silo

$$F=\kappa\frac{mM}{R^2}=mg.$$

Težni pospešek je torej enak $g=\kappa M/R^2$. Iz težnega pospeška lahko izračunamo maso zemlje $M = 5.97\ 10^{24}$ kg in povprečno gostoto $\bar{\rho} = 5.5$ kg/dm^3.

Težni pospešek nad površjem zemlje z naraščajočo višino h pada kot $g(h)=g(R/(R+h))^2$. Ko je h = 1% R = 64 km, pade g za 2 %, kar je enako 0.2 m/s^2.

Doslej smo računali, kot da je zemlja krogla, katere gostota je odvisna samo od oddaljenosti od središča. V tem primeru bi bil težnostni pospešek na površju zemlje povsod enak. To je sicer dober prvi približek, v resnici pa se g po površju zemlje spreminja.

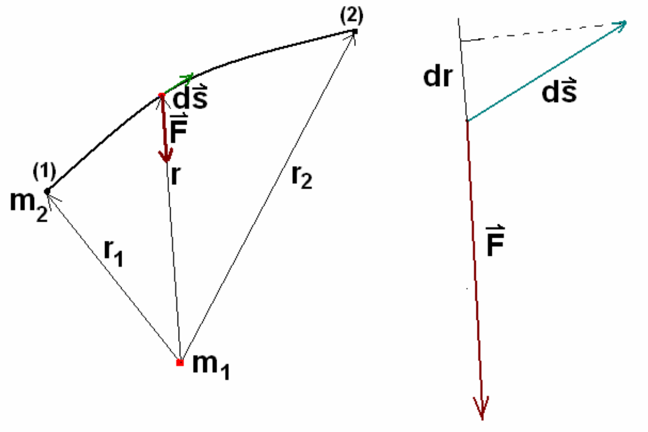
Zemljin plašč ni homogen in spremembe gostote zemeljskega plašča vplivajo na spremembe g. Merjenja teh, sicer majhnih, sprememb g uporabljajo v geologiji, rudarstvu, pri iskanju nafte...

Zemlja nima zares oblike krogle, ampak geoida, ki je na polih sploščen. Polmer ekvatorja je za 21 km večji od oddaljenosti polov od središča zemlje. Zaradi tega je g na ekvatorju za približno 0,5 % manjši, kot na polih.

Zaradi vrtenja zemlje nismo v inercialnem sistemu, ampak občutimo sistemsko, centrifugalno, silo, ki je enaka $m\omega^2 r$. Na ekvatorju je zaradi centrifugalne sile težnostni pospešek manjši za 0.034 m/s^2.

Delo gravitacijske sile

Vzemimo dve telesi z masama m_1 in m_2, katerih velikosti sta dosti manjši od medsebojne razdalje. Telo (1) naj miruje, telo (2) pa naj se premakne tako, da je v začetku opazovanja razdalja med telesoma r_1, na koncu opazovanja pa r_2. Kolikšno delo opravi gravitacijska sila med telesoma? Vzemimo, da se v nekem vmesnem trenutku, ko je razdalja med telesoma enaka r,telo (2) premakne za $d\vec{s}$.



Pri tem premiku gravitacijska sila opravi delo

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = -Fdr = -\frac{\kappa m_1 m_2 dr}{r^2}.$$

Tu je dr sprememba oddaljenosti med telesoma. Delo gravitacijske sile pri večjem premiku je enako

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\kappa m_1 m_2 dr}{r^2} = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r_1} + \frac{\kappa m_1 m_2}{r_2}.$$

Delo gravitacijske sile je odvisno samo od začetne in končne razdalje med telesoma, ni pa odvisno od poti. Gravitacijska sila je torej konservativna sila. Njeno delo zapišemo v obliki A = $W_{p1} - W_{p2}$. Tu je W_{p1} potencialna energija v začetni legi , W_{p2} pa potencialna energija v končni legi opazovanega premika. Gravitacijska potencialna energija dveh »točkastih« teles v razdalji r je torej enaka

$$W_p = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r} + konst.$$

Konstanto, ki je sicer poljubna, ponavadi izberemo tako, da je pri neskončni oddaljenosti med telesoma gravitacijska potencialna energija enaka nič. Konstanta je torej enaka nič. Gravitacijska potencialna energija je negativna, kar je povezano s tem, da se telesi privlačita. Če ju hočemo spraviti v neskončno oddaljenost moramo dovesti delo, zato je potencialna energija negativna.

Izraz za gravitacijsko potencialno energijo dveh točkastih teles velja tudi, če imamo opravka s krogelnimi telesi, katerih gostota je odvisna samo od oddaljenosti od središča.

Kot zgled izračunajmo ubežno hitrost z zemlje. Zračni upor zanemarimo. V bližini površja zemlje je kinetična energija telesa, ki naj bi ravno ubežalo z zemlje, enaka $mv^2/2$, potencialna pa $-\kappa mM/R$. V veliko oddaljenosti od zemlje sta obe energiji enaki nič. Ker se energija ohranja velja

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}} = \sqrt{2gR} = 11.2\, km/s.$$

Če sestavlja sistem več teles, je gravitacijska potencialna energija sistema enaka

$$W_p = -\sum_{i<k} \frac{\kappa m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Seštevamo po vseh parih in vsak par upoštevamo enkrat.

Če poznamo gravitacijsko potencialno energijo telesa z maso m v odvisnosti od lege, lahko izračunamo silo na to telo. Premik velikosti ds v smeri sile povzroči največje zmanjšanje potencialne energije: $dW_p = -Fds$. Sila je torej enaka negativni vrednosti odvoda potencialne energije po premiku v smeri, v kateri potencialna energija najmočneje narašča. V praksi izračunamo silo kot negativno vrednost gradienta potencialne energije:

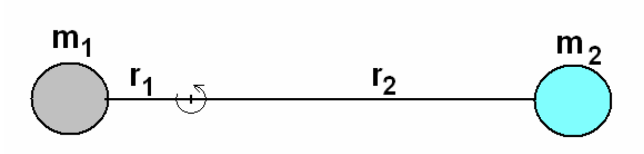
$$\vec{F} = -gradW_p = (-\partial W_p / \partial x, -\partial W_p / \partial y, -\partial W_p / \partial z).$$

Kot primer poglejmo potencialno energijo telesa z maso m v gravitacijskem polju zemlje. Os z usmerimo pravokotno na Zemljino površje stran od središča zemlje Izhodišče izberimo na površju zemlje. Pri koordinati z je potencialna energija telesa enaka $Wp = -\kappa mM/(R+z)$. Izračunajmo silo:

$$\vec{F} = -gradW_p = (0,0,-\kappa mM / (R+z)^2).$$

Sila torej kaže proti središču zemlje, njena velikost pa se ujema z znanim izrazom. V tem primeru sicer nismo dobili nič novega, je pa zato zgornja zveza koristna, ko je gravitacijsko polje bolj zapleteno.

Za zaključek obravnavajmo še kroženje dveh teles med katerima deluje gravitacijska sila. Razdalja med telesoma naj bo r. Če drugih teles ni, ni zunanjih sil in težišče sistema miruje, ali pa se giblje premo in enakomerno, odvisno od opazovalnega sistem. Opazujmo telesi v težiščnem sistemu. V tem sistemu krožita telesi okrog težišča.



Gravitacijska sila je centripetalna sila. Velja:

$$m_1 \omega^2 r_1 = \frac{\kappa m_1 m_2}{r^2}$$

$$m_2 \omega^2 r_2 = \frac{\kappa m_1 m_2}{r^2}$$

$$r_1 + r_2 = r.$$

Kotna hitrost vrtenja je enaka

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa(m_1 + m_2)}{r^3}},$$

polmera kroženja pa sta

$$r_1 = r\frac{m_2}{m_1 + m_2} \text{ in } r_2 = r\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

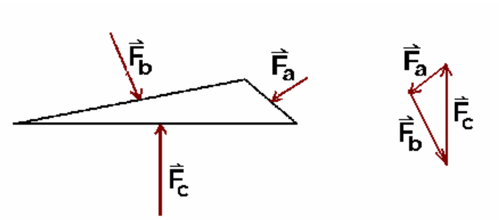
HIDROSTATIKA

Pod izrazom tekočine bomo razumeli tekočine v vsakdanjem pomenu, ki jih bomo imenovali kapljevine in pline. Tekočine nimajo oblike, ampak zavzamejo obliko posode, v kateri so. Po drugi strani pa predmeti iz trdnih snovi v običajnih razmerah ne spreminjajo oblike.

Tlak

Oglejmo si najprej tekočine v mirovanju. Na vsako ploskev predmeta, ki je potopljen v tekočino, deluje tekočina s silo. Ta sila je pravokotna na ploskev. V mirovanju v tekočini ni strižnih sil. Poskus pokaže, da se sila na ploskev ne spreminja, ko spreminjamo orientacijo ploskve. Če pogledamo sile na stranske ploskve namišljene tanke vodoravno ležeče trikotne prizme in pri tem zanemarimo težo, morajo biti vse tri sile v ravnovesju:

$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0.$



Trikotnik sil je podoben trikotniku robov osnovne ploskve prizme, zato velja

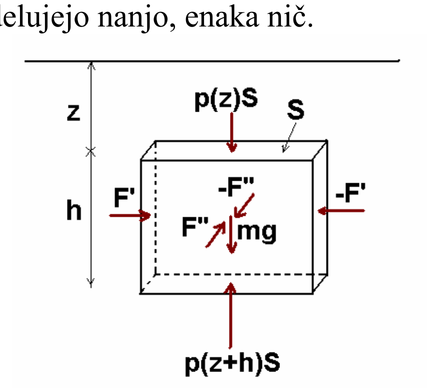
$F_a/a = F_b/b = F_c/c = F_a/S_a = F_b/S_b = F_c/S_c = p.$

S črko p smo označili tlak v tekočini, ki ga imenujemo hidrostatični tlak. Sila, s katero tekočina deluje na poljubno orientirano ploskev velikosti S, je torej enaka F = pS. Enota za tlak je N/m^2 ali Pa (pascal). Večja enota za tlak je bar: 1 bar = 10^5 Pa. Zvezo med silo, tlakom in ploskvijo lahko zapišemo tudi v vektorski obliki,

$\vec{F} = p\vec{S},$

Pri čemer je vektor $\vec{S}$ pravokoten na ploskev, kaže pa ven iz tekočine. Velikost vektorja $\vec{S}$ je seveda enaka velikosti ploskve.

Hidrostatični tlak z globino narašča. Kako narašča, bomo ugotovili po naslednjem razmisleku. Vzemimo namišljeno pokončno prizmo v mirujoči kapljevini. Prizma naj ima višino h in velikost osnovne ploskve S. Kapljevina znotraj te namišljene prizme miruje, zato mora biti vsota sil, ki delujejo nanjo, enaka nič.



Nanjo deluje okoljna kapljevina in teža. Naj bo zgornja ploskev prizme v globini z pod gladino, spodnja ploskev pa v globini z+h. Če hočemo, da sila okoljne kapljevine v navpični smeri uravnoteži težo, mora biti tlak ob spodnji ploskvi p(z+h) večji kot tlak od zgornji ploskvi p(z). Velja

$p(z+h)S - p(z)S = mg = \rho Shg$, oziroma

$p(z+h) = p(z) + \rho gh$.

Naj bo tik nad gladino kapljevine zračni tlak p_0. Če je gladina ravna je tik pod gladino tudi tlak p_0. V globini h je tlak

$p(h) = p_0 + \rho gh$.

Podobna zveza velja tudi v plinu, če sprememba višine h in s tem tlaka ni prevelika. S tlakom se namreč spreminja tudi gostota plina. Če splezamo na hrib, katerega višina nad okolico je h, bo zračni tlak padel za ρgh. Na tej osnovi delujejo preprosti merilniki višine. Pri večjih spremembah višine pa se z višino spreminjata tlak in temperatura in s tem tudi gostota zraka in je zato spreminjanje tlaka bolj zapleteno.

Kot modelni primer obravnavajmo spreminjanje zračnega tlaka z višino v izotermni mirujoči atmosferi. Če je temperatura plina konstantna, je konstantno tudi razmerje p/ρ. Naj bo tik ob zemeljskem površju zračni tlak $p_0 \approx 1$ bar, gostota zraka pa naj bo enaka

$\rho_0 \approx 1.26\ \mathrm{kg/m^3}$. V poljubni višini z je razmerje p/ρ enako p_0/ρ_0. Vzemimo navpičen stolp zraka s presekom S. Tanka plast zraka med višinama z in z+dz je v ravnovesju, zato je vsota sil nanjo enaka nič. Sila okoljnega zraka v navpični smeri je torej enaka teži:

$p(z)S - p(z+dz)S = \rho gSdz$.

Enačbo delimo s Sdz pa dobimo

$-dp/dz = \rho g$.

Če bi bila gostota zraka konstantna, bi bila rešitev te enačbe $p = p_0 - \rho gz$. Tako rešitev smo dobili pri kapljevinah, za katere smo predpostavili, da so nestisljive. V našem modelu se gostota plina spreminja in sicer velja

$\rho = (\rho_0/p_0)p$.

Vstavimo ta izraz v gornjo enačbo in ločimo spremenljivki:

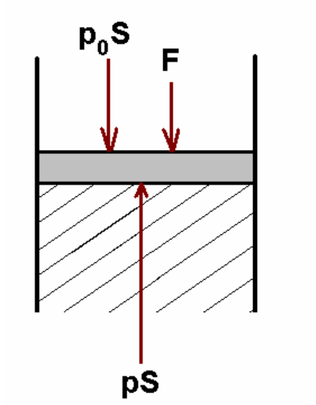
$dp/p = -(\rho_0 g/p_0)dz$.

Integrirajmo izraz po višini v mejah od 0 do z in po tlaku v mejah od p_0 do p(z).Dobimo:

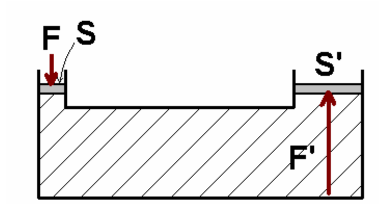
$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 gz}{p_0}} = p_0 e^{-\frac{z}{z_0}}.$$

V izotermni atmosferi tlak eksponentno pada z višino. Značilna višina z_0, v kateri tlak pade na $p_0/e \approx p_0/3$ je enaka $z_0 = p_0/\rho_0 g = 8.6$ km. V resnici je padanje tlaka z višino hitrejše, ker z naraščajočo višino pada tudi temperatura.

Tlak v tekočini lahko tudi povečamo. Vzemimo, da posodo s kapljevino zapira bat s presekom S. Ko pritisnemo na bat s silo F, se ta zaradi stisljivosti kapljevine zanemarljivo premakne, potem pa obmiruje. Na bat delujeta na eni strani zrak s silo p_0S in sila F, na drugi strani pa kapljevina s silo pS.



Če težo bata zanemarimo velja
$pS = p_0S + F$, oziroma
$p = p_0 + F/S$.
Hidrostatični tlak v posodi naraste za F/S. Če je v isti višini kot omenjeni bat še drugi bat s presekom S', deluje nanj sila
$F' = (p-p_0)S' = F(S'/S)$.



Sila F' je lahko mnogo večja od sile F, če je S'/S>>1. Na tem principu delujejo hidravlične naprave: stiskalnice, dvigala... Naj bo premik prvega bata x, premik drugega bata pa x'. Ker je kapljevina praktično nestisljiva velja $xS = x'S'$. Premik večjega bata je seveda manjši, delo sile F pa je enako delu sile F': $A = Fx = F'x'$.

V mirujoči tekočini opazujmo del tekočine, ki ga omejuje poljubna zaključena ploskev. Ker ta del tekočine miruje, mora sila okoljne tekočine na tekočino znotraj zaključene ploskve,

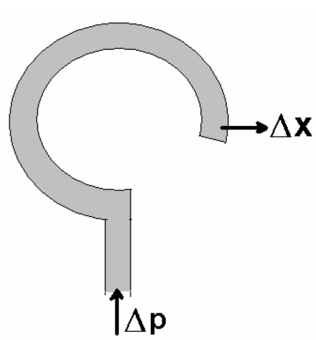
$$\vec{F} = \oint p d\vec{S} ,$$

kazati navpično navzgor, po velikosti pa mora biti enaka teži tekočine znotraj zaključene ploskve. Če v tekočino potopimo predmet, katerega površje se ujema s prej omenjeno zaključeno ploskvijo, je sila okoljne tekočine enaka kot prej: kaže navpično navzgor, po velikosti pa je enaka teži izpodrinjene tekočine. To silo imenujemo vzgon. Vzgon opazimo v kapljevinah in plinih. Ko je povprečna gostota potopljenega predmeta $\overline{\rho} = m/V$ večja od gostote tekočine, predmet pada navzdol, ker je teža večja od vzgona. Ko je vzgon večji od teže, do česar pride, ko je povprečna gostota predmeta manjša od gostote tekočine, potuje predmet navzgor. V primeru kapljevine tak predmet plava na površini. Potopljen je tolikšen del predmeta, da je vzgon enak teži. Ko je povprečna gostota predmeta enaka gostoti tekočine, predmet lebdi. To lahko ilustriramo s primerom balona na segret zrak. Ko segrejemo zrak v balonu, ga nekaj zapusti balon, povprečna gostota balona s tem pade in balon se začne dvigati. Ko se balon hladi, vstopa vanj zrak iz okolice, kajti balon je odprt in tlak v balonu je enak tlaku v okolici. Pri tem povprečna gostota balona raste in, ko ta preseže gostoto zraka, začne balon padati.

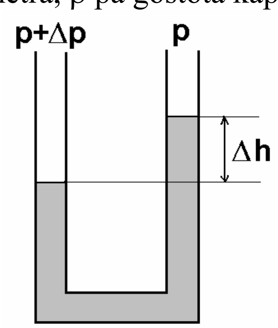
Vzgon uporabljamo za merjenje gostote kapljevin. Plavač (areometer) plava na površju kapljevine. Del plavača, ki gleda iz kapljevine, je tem večji, čim večja je gostota kapljevine.

Za merjenje tlaka uporabljamo manometre. Primer manometra je manometer na prožno opno. Če sta na obeh straneh opne različna tlaka, se bo opna prožno deformirala (usločila). Velikost deformacije je sorazmerna razliki tlakov. Z manometrom na opno torej merimo razliko tlakov. Če hočemo z manometrom na opno meriti tlak, mora biti na eni strani opne vakuum.

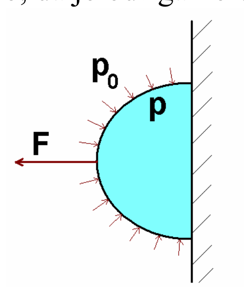
Za merjenje večjih tlakov uporabljamo Bourdonovo cev. Osnova manometra je zvita kovinska cev, ki je na enem koncu zamašena. Ko v cevi tlak naraste, se ta poskuša zravnati. Pri tem pride do prožne deformacije kovine. Zmanjšanje ukrivljenosti cevi je sorazmerno razliki med tlakom v cevi in tlakom v okolici. Konec cevi je preko vzvodov pritrjen na kazalec, katerega zasuk je sorazmeren razliki med tlakom v cevi in tlakom v okolici.



Majhne razlike tlakov merimo z manometrom na cevko v obliki črke U. V cevki je kapljevina, ponavadi živo srebro, lahko pa tudi voda. Če sta v krakih manometra različna tlaka, je tudi višina gladin različna. Višinska razlika gladin Δh je enaka $\Delta p/\rho g$. Pri tem je Δp razlika tlakov v krakih manometra, ρ pa gostota kapljevine.



Oglejmo si naslednji zgled. Polkrožna lupina s polmerom R se tesno prilega k ravni steni. Iz lupine deloma izsesamo zrak. Tlak v lupini je p, zunaj lupine pa p_0 ($p<p_0$). S kolikšno silo moramo vleči lupino, da jo odtrgamo od stene?



Sila, s katero vlečemo, mora biti enaka sili, s katero zrak pritiska na polkroglo. Smer sile okoljnega zraka lahko uganemo. Kazala bo v smeri od srednje točke na površju lupine proti središču krogle, torej pravokotno na steno. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v središče krogle, kot ϑ pa merimo proti zveznici med srednjo točko na površju lupine in središčem krogle Ozek pas na površju krogle, ki ustreza intervalu kota med ϑ in $\vartheta+d\vartheta$ ima površino $dS = (2\pi R\sin\vartheta)Rd\vartheta = 2\pi R^2\sin\vartheta d\vartheta$. Velikost sile okoljnega zraka na ta pas v smeri rezultante je enaka $dF = (p_0-p)dS\cos\vartheta = (p_0-p)2\pi R^2\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta$. Z integriranjem po pasovih izračunamo celotno silo:

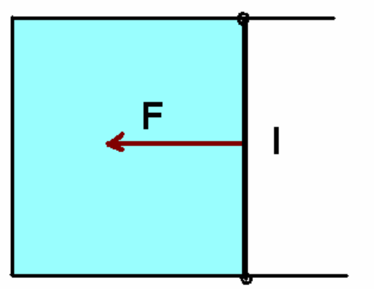
$$F = (p_0 - p)2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta = (p_0 - p)\pi R^2.$$

Sila je torej enaka produktu razlike tlakov $p_0 - p$ in prečnega preseka polkrogle πR^2. V primeru, ko je razlika tlakov 1 bar polmer polkrogle pa 10 cm je potrebna sila 3140 N.

Površinska napetost

Drsalci drsijo po površini vode , ne da bi se potopili. Če na vodno površino previdno položimo iglo ali britev ta plava na površju in se ne potopi. Ko iglo ali britev potopimo pod površje, se potopi na dno. Če vodovodno pipo malo odpremo tako, da bo curek vode tenak, bo ta razpadel v kapljice. Vse to je posledica površinske napetosti vode.

Preprost poskus lahko naredimo z okvirjem z gibljivo prečko. Ko med okvir in prečko napnemo milnično opno opazimo silo na prečko.

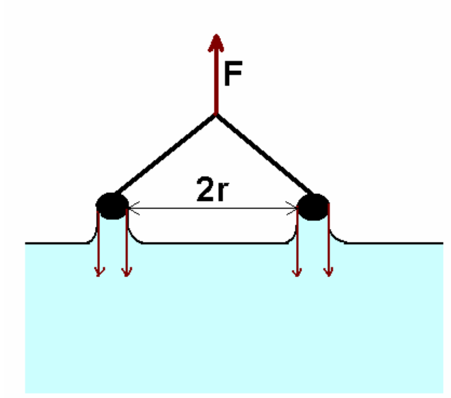


Če prečko spustimo se začne premikati v taki smeri, da se površje kapljevine zmanjšuje. Silo povzroča površje kapljevine zato pravimo, da je površje kapljevine napeto. Meritve pokažejo, da je sila sorazmerna dolžini prečke l. Zapišemo jo v obliki

$F = 2\gamma l.$

Faktor 2 nastopa, ker ima milnica dve površji, γ pa imenujemo površinska napetost. Enota za površinsko napetost je N/m. Pri sobni temperaturi je površinska napetost vode 0.073 N/m, milnice 0.025 N/m, živega srebra pa 0.47 N/m.

Površinsko napetost merimo tako, da merimo silo, ki je potrebna, da od površja kapljevine odtrgamo tanko krožno platinasto zanko s polmerom r. Sila, s katero površje kapljevine vleče zanko navzdol je enaka $F = 2\gamma 2\pi r$.



Napetost površja lahko povežemo s površinsko energijo. Ko se gibljiva prečka na okviru premakne za x, se površina kapljevine zmanjša za $\Delta S = 2lx$, sila površja kapljevine pa opravi delo $A = \gamma 2lx = \gamma \Delta S$. To delo je po velikosti enako spremembi površinske energije. Površinska energija kapljevine je torej enaka

$W_{pov} = \gamma S$.

Površinsko energijo si lahko predstavljamo, če pomislimo, da so molekule v kapljevini bolj vezane, kot molekule na površju, zato je tudi njihova energija nižja. Večji površini ustreza več molekul na površju, zato je tudi površinska energija večja.

Zaradi površinske napetosti teži površje kapljevine k temu, da bi bilo čim manjše. Majhni deli kapljevine se oblikujejo v kroglice, saj ima krogla pri dani prostornini najmanjšo površino.

Milnica ima drugačno površinsko napetost kot voda, ker se dodane molekule naberejo na površju. Njihov hidrofilni del se dotika vode hidrofobni del pa je obrnjen stran od vode. Te molekule so tudi daljše in med seboj prepletene, zato se površje teže »pretrga«, kot v primeru vode in omogoča tvorbo open.

Tlak v majhni okrogli kapljici s polmerom r je zaradi površinske napetosti večji od tlaka v okolici. Če si mislimo, da je kapljica sestavljena iz dveh polovic, delujeta na eno polovico dve nasprotni sili: sila zaradi površinske napetosti $\gamma 2\pi r$ proti drugi polovici kapljice in sila zaradi razlike tlakov $\Delta p \pi r^2$ stran od druge polovice kapljice. Sili sta po velikosti enaki. Zato je razlika tlakov Δp enaka

$\Delta p = 2\gamma/r$.

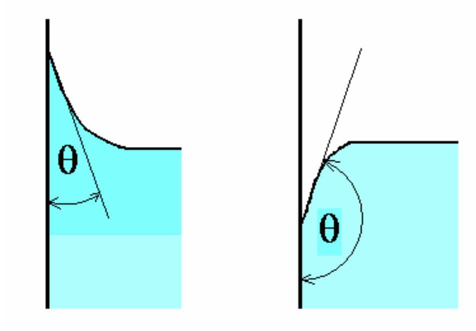
Tlak v kapljici narašča s padajočim polmerom. V milnem mehurčku je tlak večji od tlaka v okolici za $\Delta p = 4\gamma/r$, ker ima mehurček dve površji.

V splošnem sta na straneh ukrivljene kapljevinske površine tlaka različna. Razlika tlakov je enaka

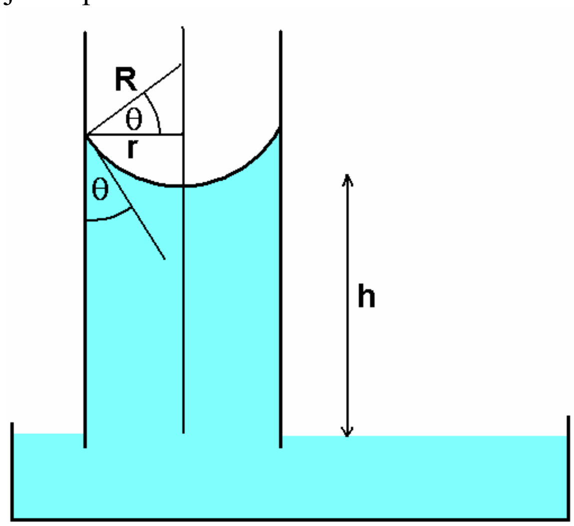
$\Delta p = \gamma(1/r_1 + 1/r_2)$,

pri čemer sta r_1 in r_2 največji in najmanjši polmer pritisnjenega kroga na površino. V primeru krogelne kapljice je $r_1 = r_2 = r$, razlika tlakov pa je enaka $\Delta p = 2\gamma/r$.

Če potopimo v kapljevino trden predmet se v skrajni točki, v kateri se kapljevina dotika predmeta površje tekočine usmeri tako, da tvori s površino trdnega predmeta kot, ki je odvisen od kapljevine, snovi iz katere je narejen trden predmet in tretje snovi, ki je v tem primeru zrak. Enak kot tvori na meji površje kapljevine s površjem trdne snovi tudi če kanemo kapljo kapljevine na trdno snov. Kot imenujemo mejni kot θ.



V primeru, ko je tretja snov zrak, je ob stiku vode in stekla mejni kot 0^0, vode in srebra 90^0, vode in parafina 107^0 in živega srebra in stekla 140^0. Če je mejni kot manjši od 90^0, se ob stiku s trdno steno kapljevina dvigne. V tem primeru kapljevina omoči steno. Če je mejni kot večji od 90^0, se kapljevina spusti. Kapljevina ne omoči stene. Dvig ali spust kapljevine ob steni je reda velikosti mm. Dosti večji dvig ali spust kapljevine opazimo, ko v njo potopimo kapilaro s polmerom r. Vzemimo tako kapilaro, da kapljevina omoči steno. Pri tem je mejni kot θ manjši od 90^0, kapljevina pa se v kapilari dvigne. Površje kapljevine tvori na meji s kapilaro kot θ.



Obravnavamo ga kot del krogelne površine s polmerom R = r/cos θ. Temu ustreza razlika tlakov

$\Delta p = 2\gamma/R = 2\gamma\cos\theta/r$.

Tik pod gladino kapljevine v kapilari je tlak za Δp manjši od zračnega tlaka p_0. Ker je tam, kjer je kapilara potopljena v kapljevino, tlak enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0, je hidrostatični tlak ob gladini kapljevine v kapilari enak $p_0 - \rho gh$, pri čemer je h dvig kapljevine v kapilari. Velja torej

$2\gamma\cos\theta/r = \rho gh$.

Kapilarni dvig je enak

$h = 2\gamma\cos\theta/\rho gr$.

V stekleni cevki s polmerom 0.5 mm se voda dvigne za 29 mm.

Kapilarni dvig je eden izmed mehanizmov transporta vode v rastlinah.

Za zaključek izračunajmo, za koliko se dvigne voda ob steni čistega steklenega kozarca. Uporabimo zvezo

$\Delta p = \rho gy = \gamma(1/r_1 + 1/r_2)$.

Eden od krivinskih polmerov –vzdolž stene kozarca - je velik in 1/r zanemarimo, za drugega – pravokotno na steno - pa uporabimo enačbo za krivinski polmer krivulje:

$$\frac{1}{r}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Izhodišče koordinatnega sistema smo postavili ob steno kozarca v presečišče premice v smeri nemotene površine kapljevine in stene kozarca. Os x kaže proti sredini kozarca. Pri danem x je tlak v kapljevini tik pod površino enak p_0 – ρgy, razlika tlakov nad in pod površino pa je enaka ρgy ali γ/r:

$$\frac{\gamma y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\rho g y.$$

Drugi odvod y'' zapišemo kot y''=y'dy'/dy, ločimo spremenljivki y in y' in integriramo

$$\int_{-ctg\theta}^{0}\frac{y'dy'}{(1+y'^2)^{3/2}}=\int_{h}^{0}\frac{\rho g}{\gamma}ydy.$$

Tik ob steni je dvig kapljevine enak h, odvod y'=dy/dx pa je enak negativni vrednosti kotangensa mejnega kota. Daleč od stene je površina kapljevine ravna (y'=0), dvig kapljevine y pa je enak nič. Dvig kapljevine ob steni je enak

$$h=\sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}(1-\sin\theta)}.$$

V primeru vode in stekla je dvig 3.4 mm.

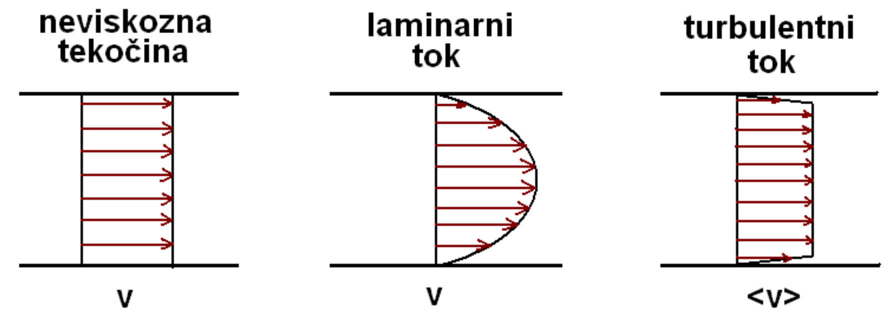
DINAMIKA NEVISKOZNE TEKOČINE.

Tok tekočine opišemo na ta način, da povemo , kako sta hitrost tekočine $\vec{v}(\vec{r},t)$ in gostota tekočine $\rho(\vec{r},t)$ odvisni od kraja in časa. Če je tok stacionaren se hitrost in gostota tekočine ne spreminjata s časom.

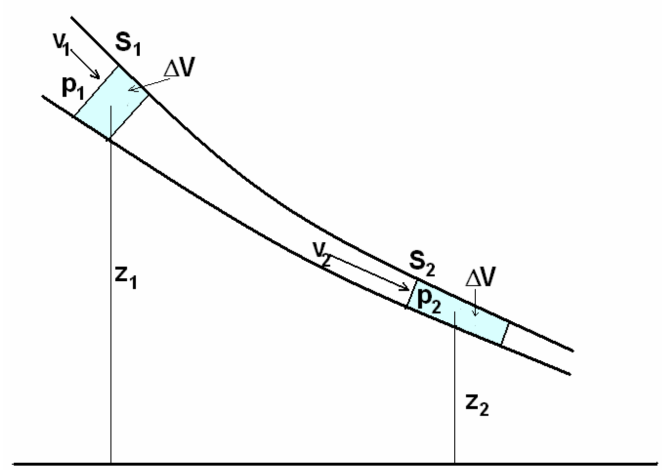
Tok delov tekočine bomo ponazorili s tokovnicami. Tokovnica predstavlja tir, po katerem se giblje majhen del tekočine. Ozek snop tokovnic sestavlja tokovno nit, širok snop tokovnic pa tokovno cev. Volumski tok skozi tokovno nit je enak Φ_V = dV/dt = vS. Pri tem je v hitrost tekočine, S pa presek tokovne niti. Masni tok Φ_m skozi tokovno nit je enak Φ_m = dm/dt = ρΦ_V = ρvS. Če je tok tekočine stacionaren je vzdolž tokovne niti masni tok konstanten. Pri tem se v splošnem spreminjajo gostota tekočine, njena hitrost in presek tokovne niti, njihov produkt, ρvS, pa ostaja konstanten. To je posledica zakona o ohranitvi mase.

Tokovna nit je ozka, zato smo predpostavili, da je hitrost tekočine po celem preseku niti enaka. Tokovna cev je širša, zato ne moremo več predpostaviti, da je hitrost tekočine po celem preseku konstantna. V tem primeru je volumski tok enak $\Phi_V=\int vdS.$ Povprečna hitrost tekočine v tokovni cevi je enaka $\bar{v}=\Phi_V/S.$ Tu je S presek tokovne cevi. Ker se lahko po preseku cevi spreminja tudi gostota, je masni tok enak $\Phi_m=\int \rho vdS.$ Zaradi zakona o ohranitvi mase je pri stacionarnem toku vzdolž tokovne cevi masni tok konstanten. To je kontinuitetna enačba za primer, ko ni izvorov in ponorov toka.

Pri gibanju realne viskozne tekočine po cevi ločimo turbulentni in laminarni tok. Pri laminarnem toku se vsak del tekočine giblje po dobro definirani poti, tokovnici. Pri turbulentnem toku se pojavljajo vrtinci in pot dela tekočine po cevi ni več dobro definirana. Tokovnice se premikajo in prepletajo. Laminarni tok se pojavlja pri počasnem toku viskozne tekočine. Tik ob steni je hitrost tekočine enaka nič. Proti sredini cevi hitrost tekočine narašča. Profil hitrosti je paraboličen. Drugače je pri turbulentnem toku. Tudi tu je tik ob steni hitrost tekočine enaka nič. Ob steni je tanka laminarna mejna plast, kamor vrtinci ne sežejo. Po večjem delu cevi se pojavljajo vrtinci. O profilu hitrosti tu ne moremo govoriti. Lahko pa govorimo o profilu povprečne hitrosti. Ta je po večjem delu cevi približno konstantna, ob stenah cevi pa skozi laminarno mejno plast pade na nič.



Namesto realne tekočine se najprej lotimo neviskozne tekočine. Predpostavimo, da je tekočina nestisljiva in brez trenja drsi ob stenah cevi. Noben od teh pogojev ne velja za realno tekočino, je pa to boljši približek za turbulentni, kot za laminarni tok. Obravnavajmo stacionarni tok neviskozne tekočine po cevi. Pri tem toku je hitrost po celem preseku cevi konstantna in od časa neodvisna. Vzemimo dve poljubni mesti (1) in (2) vzdolž toka tekočine.



Na mestu (1) je tlak p_1, hitrost tekočine v_1, presek cevi S_1 in višina nad izbranim nivojem z_1. Na mestu (2) je tlak p_2, hitrost tekočine v_2, presek cevi S_2 in višina nad izbranim nivojem z_2. Obravnavajmo stolpec tekočine, ki je bil ob času t med mestoma (1) in (2). Ob času t+dt se zgornja meja premakne za v_1dt, spodnja pa za v_2dt. Ker je tekočina nestisljiva velja $S_1v_1dt = S_2v_2dt = \Delta V$. Izrek o kinetični energiji za obravnavano tekočino pove:

$p_1 \Delta V - p_2\, \Delta V = \rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2)/2 + \rho \Delta V g(z_2 - z_1),$
ali če delimo z ΔV in preuredimo
$p_1 + \rho v_1^2/2 + \rho g z_1 = p_2 + \rho v_2^2/2 + \rho g z_2.$
Ker sta mesti (1) in (2) izbrani poljubno velja ta enakost za katerikoli dve mesti. To pomeni, da je vzdolž toka vsota tlaka, gostote kinetične energije in gostote potencialne energije konstantna. Dobili smo Bernoullijevo enačbo
$p + \rho v^2/2 + \rho g z = konst.$

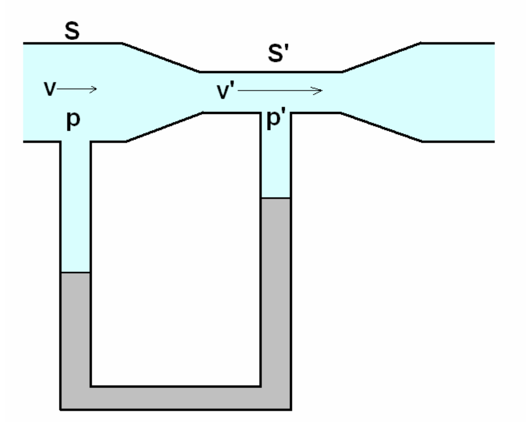
Bernoullijeva enačba velja pri stacionarnem toku neviskozne tekočine. Pri toku realne tekočine se vsota tlaka, gostote kinetične energije in gostote potencialne energije vzdolž toka manjša. Upoštevati je namreč treba delo sile cevi. Ker pogoji za veljavnost Bernoullijeve enačbe v splošnem niso izpolnjeni, jo bomo uporabili predvsem za ocene.

Ocenimo, s kolikšno hitrostjo izteka kapljevina skozi odprtino na dnu posode, če je višina kapljevine v posodi enaka h.

Tok kapljevine ni stacionaren, a če je presek posode S_0 mnogo večji od preseka odprtine S, lahko rečemo da je tok približno stacionaren in uporabimo Bernoullijevo enačbo. Mesto (1) naj predstavlja gladina kapljevine v posodi, mesto (2) pa naj bo tik za izhodom kapljevine iz odprtine. Višina mesta (2) naj bo enaka nič. Hitrost kapljevine na mestu (1) zanemarimo, na mestu (2) pa naj bo enaka v. Tlak je na obeh mestih enak zračnemu tlaku p_0. Zapišimo Bernoullijevo enačbo:
$p_0 + \rho g h = p_0 + \rho v^2/2.$
Hitrost kapljevine po izhodu iz posode je enaka $v = \sqrt{2gh}.$ To je ravno hitrost prostega pada z višine h. Če curek usmerimo navzgor bi moral doseči višino gladine. Poskus pokaže da curek te višine ne doseže, a razlika ni prevelika.

Kot drugi primer ocenimo, v kolikšnem času bi z natego izpraznili posodo, v kateri je kapljevina s prostornino V. V posodo potopimo s kapljevino napolnjeno cev s presekom S. Zgornji konec cevi je na dnu posode, spodnji konec cevi pa je nižje. Ko je posoda polna naj bo višinska razlika med spodnjim koncem cevi in gladino kapljevine enaka h_1. Višinska razlika med dnom posode in spodnjim koncem cevi pa naj bo h_2. Uporabimo Bernoullijevo enačbo. Mesto (1) naj bo na gladini kapljevine v posodi, mesto (2) pa tik po izhodu kapljevine iz cevi. Enako kot v prejšnjem primeru izračunamo hitrost tekočine po izstopu iz cevi. Enaka je $v = \sqrt{2gh}.$ pri tem je h višinska razlika med gladino kapljevine in spodnjim koncem cevi. Ko se gladina niža se hitrost manjša. Pri naši oceni bomo računali s konstantno hitrostjo, ki ustreza povprečni višinski razliki
$\overline{h} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) : v = \sqrt{2g\overline{h}}$. Prostorninski tok je tedaj enak
$\Phi_V = vS$, čas iztekanja t pa je približno enak
$$t = \frac{V}{\Phi_V} = \frac{V}{S\sqrt{2g\overline{h}}}.$$

Venturijevo cev uporabljamo za merjenje hitrosti tekočine. To je cev, ki se s preseka S zoži na presek S' in potem zopet razširi na presek S. V širšem delu cevi je hitrost tekočine enaka v, v ožjem pa v'. Tlak v širšem delu cevi označimo s p, v ožjem delu cevi pa s p'. Predpostavimo, da je tekočina nestisljiva. V tem primeru je prostorninski tok povsod enak: $\Phi_V = vS = v'S'$.



Zapišimo Bernoullijevo enačbo za primer, ko je cev vodoravna:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p'+\frac{\rho v'^2}{2}.$$

Razlika tlakov p-p' je enaka

$$p-p'=\frac{\rho}{2}(v'^2-v^2)=\frac{\rho v^2}{2}\left(\left(\frac{S}{S'}\right)^2-1\right).$$

Za merjenje razlike tlakov uporabimo manometer s cevko v obliko črke U, v kateri je kapljevina (ponavadi Hg) z gostoto ρ'. Višinska razlika gladin kapljevine v manometru Δh je enaka

$$\Delta h=(p-p')/(\rho'-\rho)g=\frac{\rho v^2}{2g(\rho'-\rho)}\left(\left(\frac{S}{S'}\right)^2-1\right)..$$

Z merjenjem razlike tlakov izmerimo hitrost tekočine. Merilnik ni linearen. Manj je občutljiv pri majhnih hitrostih, bolj pa pri velikih.

S pomočjo Bernoullijeve enačbe lahko razložimo tudi silo na letalsko krilo. Krilo je oblikovano tako, da je hitrost zraka, ki ga obteka, na zgornji strani večja kot na spodnji strani. Zaradi tega je, da je nad krilom manjši tlak, kot pod krilom. Posledica tega je sila, ki deluje navzgor, ko se letalo giblje. To silo imenujemo dinamični vzgon.

Če v tok tekočine postavimo oviro, ob njej tlak naraste. Vzemimo tokovno nit, ki ima smer proti oviri in uporabimo Bernoullijevo enačbo. Daleč od ovire je hitrost tekočine enaka v, ob oviri pa nič. Daleč od ovire je tlak p_0, ob oviri pa p. Če predpostavimo, da teče tekočina vodoravno velja

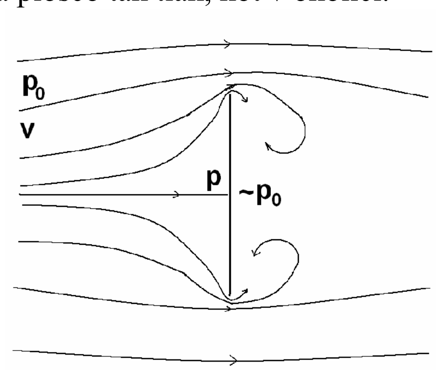
$$p=p_0+\frac{\rho v^2}{2}.$$

Tlak ob oviri je za $\rho v^2/2$ večji od tlaka v okolici. To razliko tlakov imenujemo zastojni tlak. Zastojni tlak izmerimo s Prandtlovo cevjo. To je cev, ki ima eno odprtino obrnjeno v smer iz katere teče tekočina, drugo pa pri strani. Cev, na začetku katere je tlak povečan za zastojni tlak in cev, na začetku katere tlak ni povečan, sta priključeni na kraka manometra v obliki črke U. Manometer meri zastojni tlak. Prandtlovo cev lahko uporabimo tudi za merjenje hitrosti pri gibanju v tekočini. Če se Prandtlova cev giblje po mirujoči tekočini s hitrostjo v, kaže manometer razliko tlakov $\rho v^2/2$.

Kot zgled ocenimo silo, s katero moramo vleči kljuko na vratih, da jih odpremo, če piha proti vratom veter s hitrostjo v = 10 m/s. Vrata maj bodo visoka a = 2m in široka

b = 1m, pravokotna razdalja od kljuke do osi pa naj bo r = 0.9 m. Gostota zraka je enaka $\rho = 1.26\ kg/m^3$.
Os x usmerimo pravokotno od osi proti prostemu koncu vrat. Na ozek trak s širino dx, ki leži v razdalji med x in x+dx od osi, deluje veter s silo
$dF = (\rho v^2/2)adx$.
Tej sili ustreza navor
$dM = xdF = (\rho v^2/2)axdx$.
Z integracijo po x od nič do b dobimo navor
$M = (\rho v^2/2)(ab^2/2)$,
sila F, s katero moramo vleči za kljuko, pa je enaka
$F = M/r = (\rho v^2/2)(ab^2/2r) = 70\ N$.

Zastojni tlak uporabimo pri računanju upora. Vzemimo, da teče tekočina s hitrostjo v pravokotni smeri proti ravni plošči s ploščino S. Pred ploščo tlak naraste. Tlak najbrž ne naraste povsod enako, a mi bomo predpostavili, da pred celo ploščo tlak naraste za zastojni tlak. Za ploščo se pojavijo vrtinci in tam se tlak dosti ne spreminja. Predpostavili bomo, da je za ploščo tak tlak, kot v okolici.



Sila, ki pri tem deluje na ploščo je približno enaka
$F \approx (\rho v^2/2)S$. Enačbi dodamo koeficient upora c_u, ki ga moramo določiti eksperimentalno:

$$F = c_u \frac{\rho v^2}{2} S.$$

Zapisali smo kvadratni zakon upora, ki velja, ko tekočina obliva telo ali pa, ko se telo giblje po tekočini. Pri tem je v relativna hitrost telesa glede na tekočino, S prečni presek telesa, koeficient upora c_u pa je odvisen od oblike in orientacije telesa ter ga je treba določiti eksperimentalno. Za ploščo, ki se giblje pravokotno glede na tekočino, je c_u = 1.1, za kroglo pa 0.4. Telo s hidrodinamično obliko ima koeficient upora 0.04, avtomobili pa ponavadi med 0.3 in 0.4.

Kot zgled izračunajmo hitrost, s katero pada v vodi kamen v obliki krogle s polmerom 1 cm. Gostota kamna ρ naj bo $\rho = 3\ kg/dm^3$.
Na kamen delujejo teža, vzgon in upor. Upor je odvisen od hitrosti in hitrost kamna narašča toliko časa dokler niso vse tri sile v ravnovesju:

$$\rho \frac{4\pi r^3}{3} g = \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3} g + c_u \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \pi r^2.$$

Z ρ_0 smo označili gostoto vode. Iz te enačbe izračunamo hitrost:

$$v_0 = \sqrt{\frac{8rg(\rho - \rho_0)}{3c_u\rho_0}} = 1.2\, m/s.$$

Ocenimo še, koliko časa traja pospeševanje kamna in, kolikšno pot pri tem napravi. Predpostavimo, da je začetna hitrost kamna nič. Začetni pospešek kamna a je enak $a = g(\rho - \rho_0)/\rho = 6.5$ m/s^2. Čas pospeševanja Δt bomo ocenili tako, da bomo izračunali, v kolikšnem času bi kamen dosegel končno hitrost $v_0 = 1.2$ m/s, če bi bil pospešek vseskozi enak a:

$\Delta t = v_0/a = 0.18$ s.

V resnici traja pospeševanje kamna nekaj Δt. Pot s , ki jo naredi kamen med pospeševanjem, bomo ocenili tako, da bomo čas pospeševanja pomnožili s hitrostjo v_0:

$s = v_0\Delta t = 0.22$ m.

Zdaj, ko smo napravili oceno, se lahko lotimo še bolj zahtevnega računa. Zapišimo drugi Newtonov zakon za kamen:

$$\rho\frac{4\pi r^3}{3}a = \rho\frac{4\pi r^3}{3}g - \rho_0\frac{4\pi r^3}{3}g - c_u\frac{\rho_0 v^2}{2}\pi r^2 = c_u\frac{\rho_0(v_0^2 - v^2)}{2}\pi r^2.$$

Pospešek je enak:

$$a = \frac{3c_u\rho_0}{8\rho r}(v_0^2 - v^2).$$

Zapišimo a = dv/dt, ločimo spremenljivki pa dobimo

$$\frac{dv}{v_0 - v} + \frac{dv}{v_0 + v} = dt/\tau.$$

Tu je $\tau = \dfrac{4\rho r}{3c_u\rho_0 v_0} = 0.083\,\text{s}.$

Rešitev gornje enačbe je

$$v = v_0\frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}.$$

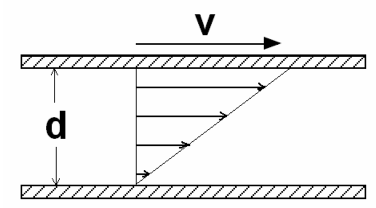
Hitrost kamna se približuje končni hitrosti v_0 eksponentno z značilnim časom τ. Ta je približno enak polovici ocenjenega časa Δt kar pomeni, da smo čas pospeševanja kar dobro ocenili.

Na enak način lahko ocenimo hitrost padanja padalca, lista papirja...

VISKOZNOST

Dajmo med dve stekleni plošči kapljo medu in poskusimo premikati plošči drugo proti drugi. Pokaže se, da je za enakomerno premikanje plošč potrebna sila. Sila linearno narašča z naraščajočo hitrostjo. Podobno opazimo, ko se v cevi vrti valj, prostor med valjem in cevjo pa je izpolnjen z oljem. Za enakomerno vrtenje valja je potreben navor. Z naraščajočo kotno hitrostjo navor linearno narašča.

Sila in navor sta v teh primerih posledica viskoznosti. Plast kapljevine, ki je v stiku s trdno steno, glede na steno miruje. V primeru dveh vzporednih plošč, med katerima je kapljevina, se plast kapljevine, ki je v stiku s premikajočo se ploščo, giblje s hitrostjo plošče, plast kapljevine, ki je v stiku z mirujočo ploščo pa miruje. Vmes pride do trenja med plastmi kapljevine, katerih hitrost linearno narašča v smeri od mirujoče proti premikajoči se plošči.



Vse skupaj seveda velja, če je plast kapljevine tanka. Sila, ki je potrebna za premikanje ene plošče proti drugi je odvisna od velikosti površine plošče S, ki je v siku s kapljevino, in strižne hitrosti v/d. Tu je v hitrost ene plošče proti drugi, d pa debelina kapljevinske plasti. Velja torej

$F = S\eta v/d$.

Koeficient η imenujemo viskoznost. Viskoznost je odvisna od snovi in temperature. Naslednja tabela podaja viskoznost nekaterih kapljevin pri 20 ^{0}C.

kapljevina	**η [Ns/m^2]**
etilni alkohol	0.248×10^{-3}
aceton	0.326×10^{-3}
metilni alkohol	0.59×10^{-3}
benzen	0.64×10^{-3}
voda	1.0030×10^{-3}
nitrobenzen	2.0×10^{-3}
živo srebro	17.0×10^{-3}
žveplena kislina	30×10^{-3}
olivno olje	81×10^{-3}
ricinusovo olje	0.985
glicerin	1.485
staljeni polimeri	10^3
bitumen	10^7

Viskoznost opazimo tudi pri plinih. Pri 20 ^{0}C je viskoznost vode 10^{-3} Ns/m^2, glicerina 1.485 Ns/m^2, strojnih olj nekaj desetin Ns/m^2, zraka pa 1.7 10^{-5} Ns/m^2. Ker se viskoznost strojnih olj močno spreminja s temperaturo uporabljamo pri različnih temperaturah različne mešanice.

Če v smeri, v kateri se spreminja hitrost, vpeljemo koordinato z, lahko strižno hitrost v/d zapišemo tudi ko dv/dz, izraz za silo pa

$F = S\eta dv/dz$.

Kot zgled obravnavajmo preprost ležaj, pri katerem se v cevi dolžine l in polmera r vrti valjasta os, med cevjo on osjo pa je tanka plast olja debeline d, d<<r. Naj se vrti os s

kotno hitrostjo ω. Hitrost na obodu osi, ki je tudi hitrost oljne plasti tik ob osi je enaka ωr. Navor, ki je za to potreben je

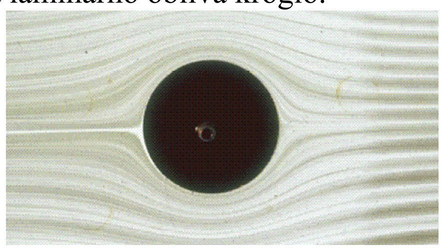
$$M = S\eta \frac{\omega r}{d} r = \frac{2\pi l \eta \omega r^3}{d}.$$

Navor je sorazmeren viskoznosti in kotni hitrosti. Z merjenjem navora lahko izmerimo viskoznost. Moč, ki se troši v takem ležaju je enaka

$$P = M\omega = \frac{2\pi l \eta \omega^2 r^3}{d}.$$

Moč narašča s kvadratom kotne hitrosti.

Ocenimo silo, ki deluje na kroglico, ki se giblje v viskozni tekočini. Predpostavimo, da tekočina laminarno obliva kroglo.



Uporabimo enačbo $F=S\eta v/d$. Za S vzamemo površino kroglice, v je hitrost kroglice glede na okoljno tekočino, d pa razdalja, v kateri hitrost tekočine glede na hitrost tekočine ob kroglici znatno pade. Ta razdalja je približno enaka polmeru kroglice r. Pri teh predpostavkah je ocena za silo upora, s katero viskozna tekočina deluje na kroglico enaka $F = 4\pi\eta r v$. Precej bolj zapleten račun da Stokesov zakon

$F = 6\pi r \eta v.$

Vidimo, da je naša ocena kar dober približek za silo upora.

Ocenimo še, s kolikšno silo deluje viskozna tekočina na nit dolžine l in polmera r (r<<l), ki jo obliva v prečni smeri s hitrostjo v. Za S vzamemo plašč valja 2πrl, za d pa polmer niti r in dobimo

$F \approx 2\pi l \eta v.$

Sila je sorazmerna dolžini niti, ni pa odvisna od njenega polmera.

V splošnem bomo silo upora na predmet, ki se giblje v viskozni tekočini, ocenili kot $F \approx l\eta v$, pri čemer bomo za l izbrali značilno prečno dimenzijo predmeta, ponavadi večjo.

Kot zgled izračunajmo hitrost padanja kroglice s polmerom r=1mm in z gostoto ρ=7.6 kg/dm^3 v viskozni tekočini z viskoznostjo η=0.2 Ns/m^2 in gostoto ρ_0=0.8 kg/dm^3. Ko kroglico spustimo, začne njena hitrost naraščati, dokler ne doseže vrednosti v_0, pri kateri so teža, vzgon in upor v ravnovesju:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_0.$$

Hitrost v_0 je enaka

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0) r^2 g}{9\eta} = 7.6\, cm/s.$$

Ocenimo lahko še značilni čas τ, s katerim se hitrost kroglice približuje hitrosti v_0. Začetni pospešek kroglice a je enak $a = g(\rho - \rho_0)/\rho$. Značilni čas τ je enak v_0/a,

$$\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta} = 8.4\,ms.$$

Kroglica doseže končno hitrost v_0 v nekaj značilnih časih τ. V tem času prepotuje pot, ki je enaka nekajkrat $v_0\tau = 0.64$ mm. Značilni čas τ in ustrezna pot sta običajno zelo kratka. Z merjenjem hitrosti padanja kroglice v tekočini merimo viskoznost.

Pri računu upora v viskozni tekočini smo dobili linearni zakon upora, v neviskozni pa kvadratni zakon upora. Vprašanje je, kdaj velja eden, kdaj drugi. Odgovor nam da primerjava njunih velikosti. Linearni upor ocenimo kot $F_l \approx l\eta v$, kvadratnega pa kot $F_k \approx \rho v^2 l^2$. Razmerje kvadratnega in linearnega upora,

$$\frac{F_k}{F_l} \approx \frac{\rho v l}{\eta} = \mathrm{Re}\,,$$

je število, ki ga imenujemo Reynoldsovo število. Poskusi kažejo, da za Re<1 velja linearni zakon upora, za Re>1000 pa kvadratni zakon upora.

Viskoznost vpliva tudi na tok tekočine po cevi. Vzemimo cev krožnega preseka z dolžino l in polmerom R . Po cevi naj laminarno in stacionarno teče tekočina z viskoznostjo η. Med koncema cevi naj bo tlačna razlika Δp. Oglejmo si valj tekočine s polmerom r. V smeri gibanja deluje nanj sila $\Delta p \pi r^2$, ki je posledica tlačne razlike. V nasprotni smeri deluje viskozna sila, ki prijemlje na površju valja in je enaka $\eta 2\pi r l(-dv/dr)$. V oklepaju smo zapisali znak -, ker je $dv/dr<0$. Ker je gibanje tekočine stacionarno, sta ti dve sili enaki. Iz tega sledi

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r.$$

Enačbo pomnožimo z dr in integriramo po radiju od r do R. Pri tem se hitrost spremeni od v do nič. Kot rezultat dobimo

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$

Profil hitrosti je paraboličen, največja pa je hitrost tekočine na sredi cevi, kjer je enaka $\Delta p R^2/4\eta l$. Prostorninski tok je enak

$$\Phi_V = \int v dS = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}.$$

Povprečna hitrost $\bar{v} = \Phi_V / \pi R^2$ je enaka $\Delta p R^2/8\eta l$, kar je ravno polovica največje hitrosti.

Z merjenjem prostorninskega toka skozi tanko cev pri znani tlačni razliki Δp lahko izmerimo viskoznost tekočine.

Kot smo že omenili je tok po ceveh lahko laminaren ali turbulenten. Kriterij, ki pove, s kakšnim tokom imamo opravka, je zopet Reynoldsovo število. V primeru cevi krožnega preseka je definirano kot $\mathrm{Re} = \rho\bar{v}(2R)/\eta$. Ko je Re < 2000 je tok laminaren, pri Re > 3000 pa turbulenten. Vmes je tok nestabilen. Nekaj časa je laminaren, potem postane turbulenten pa spet laminaren…