ELEKTRIČNO POLJE

V učbenikih je poglavje o elektriki predstavljeno na dva načina. Nekateri učbeniki začnejo z električnim tokom, drugi z električnimi naboji. V obeh primerih je nekaj nedoslednosti in poglavje razumemo šele po obravnavi obeh delov. Razlika med obravnavama bi bila pomembna, če ne bi imeli predznanja. V našem primeru ni tako, zato je vseeno, kako začnemo. Začeli bomo z električnimi naboji.

Električni naboji

Električno so nabiti gradniki snovi. Atom je sestavljen iz električno nabitega jedra in električno nabitega elektronskega oblaka. Sila, ki veže atome v molekule pa tudi atome in molekule v snov je električna sila.

Makroskopski predmeti ponavadi niso električno nabiti, nabijemo pa jih pogosto s trenjem. Če s krpo podrgnemo polivinilasto palico se ta električno nabije. To opazimo tako, da palica privlači majhne predmete (papirčke, prah, lase...). Ko po trgovini vozimo nakupovalni voziček, pogosto čutimo iskre. Pri trenju podplatov ob tla se električno nabijemo in, ko je naboj dovolj velik preskoči iskra na voziček. Pri trenju oblakov ob zrak, se ti nabijejo. Ko je naboj dovolj velik pride do preboja, ki ga vidimo kot strelo.

Če se z nabito polivinilno palico dotaknemo izoliranega prevodnega predmeta, recimo v staniol oblečene krogle, ki visi na vrvi, preide nekaj naboja na predmet. Ko se s palico ponovno približamo predmetu opazimo odbojno silo. Če se prej omenjeni krogli približamo s stekleno palico, ki smo jo podrgnili s krpo, opazimo privlačno silo. Električni naboji so torej dveh vrst. Imenovali jih bomo pozitivni in negativni nagoji. Istoimenski naboji se med seboj odbijajo, raznoimenski pa privlačijo.

Preden nadaljujemo povejmo, kaj se pravzaprav zgodi pri trenju. Pri trenju dveh različnih izolatorjev preide nekaj elektronov z enega na drugega. Pri tem se izolatorja nabijeta. Pri drgnjenju polivinilaste palice s krpo preidejo elektroni v nasprotni smeri, kot pri drgnjenju steklene palice s krpo.

Dogovoriti se moramo še, kateri električni naboji so pozitivni, kateri pa negativni. Električni naboj elektrona je negativen. Električni naboji, ki privlačijo elektrone, so pozitivni, tisti, ki odbijajo elektrone pa negativni.

Omenili smo že izolatorje in prevodnike. Izolatorji so snovi, po katerih se električni naboji ne morejo premikati. Po prevodnikih se električni naboji prosto gibljejo. Zavedati se moramo, da je to le idealizacija. V resnici ni idealnih izolatorjev pa tudi gibanje električnih nabojev po prevodnikih (kovine, elektriliti) ni povsem prosto. S tem se bomo podrobneje seznanili v naslednjih poglavjih.

Sila med dvema električnima nabojema ima podobno obliko kot gravitacija:

$$F \propto \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Tu sta e_1 in e_2 električna naboja, r pa razdalja med njima. To preverimo tako, da merimo silo med dvema nabitima kroglama v odvisnosti od razdalje med njima in da z uporabo simetrije (električno nabite krogle se dotaknemo z enako kroglo) zmanjšamo električni naboj na krogli na polovico. Električna sila je torej sila dolgega dosega.

Električnega naboja še nismo definirali in ga ta trenutek še ne moremo. V resnici je električni naboj povezan z električnim tokom. Skozi presek žice, po kateri teče električni tok I, steče v času dt električni naboj de, $de = Idt$. Tudi enota za električni naboj je povezana z enoto za električni tok: [e] = [I][t] = As = C (coulomb). Izraz za silo med točkastima električnima nabojema zapišemo v obliki

$$F = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Zvezo imenujemo Coulombov zakon. V njej je ε_0 električna (prej influenčna) konstanta enaka $\varepsilon_0 = 8.85418782\ 10^{-12} C^2/Nm^2$.

V resnici je električna konstanta ε_0 povezana z magnetno konstanto $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ Vs/Am in hitrostjo svetlobe v vakuumu $c_0 = 2.99792458\ 10^8$ m/s: $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c_0^2$. Izraža se ponavadi v enotah As/Vm. Tu je volt (V) enota za električno napetost. Velja $VA = W$.

Coulombov zakon lahko zapišemo tudi v vektorski obliki. Sila naboja e_i, katerega lega je podana s krajevnim vektorjem $\vec{r}_i$ na naboj e, katerega lego podaja krajevni vektor $\vec{r}$, je enaka

$$\vec{F} = \frac{ee_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (1)$$

V primeru, ko je nabojev več, je sila na izbran naboj e enaka vektorski vsoti sil, ki jih povzročajo naboji iz okolice

$$\vec{F} = \sum_i \frac{ee_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (2)$$

Omeniti je treba, da Coulombov zakon ne velja samo v makroskopskem svetu. Velja tudi znotraj atoma.

Električni naboji, ki jih lahko opazujemo in merimo, so mnogokratniki osnovnega naboja $e_0 = 1.60217733\ 10^{-19}$ C. Električni naboj elektrona je $-e_0$, protona e_0, nevtron pa nima električnega naboja. Ker je v atomu enako število protonov in elektronov, je atom električno nevtralen. Zato je v splošnem električno nevtralna tudi snov. Manjši električni naboj od osnovnega in sicer tretjino oziroma dve tretjini osnovnega naboja imajo gradniki protona in nevtrona, kvarki.

Podobno, kot za maso in energijo, velja tudi za električni naboj ohranitveni zakon. Zakon o ohranitvi električnega naboja velja na makroskopskem in mikroskopskem nivoju. Pri tvorbi parov povzroči gama žarek nastanek para elektron ($e=-e_0$) in pozitron ($e=e_0$). Skupen električni naboj je bil pred tvorbo para enak nič, po tvorbi para pa je tudi enak nič. Prost nevtron razpade na proton ($e=e_0$), elektron ($e=-e_0$) in nevtrino ($e=0$). Tudi tu je pred in po razpadu skupni električni naboj enak nič.

Električno polje

Električni naboji spremene lastnosti prostora. Prostor postane električno polje. Če v ta prostor postavimo električni naboj, deluje nanj električna sila.

Električno polje lahko opišemo na več načinov. Lahko povemo, kje si izvori polja (električni naboji) in kolikšni so. Ta opis je prikladen v primeru, ko imamo opravka z električnim poljem majhnega števila nabojev. V primerih, ko imamo opravka z večjim številom nabojev, s porazdelitvijo nabojev, ali elektromagnetnim valovanjem, je primerneje opisati električno polje z električno poljsko jakostjo. Tretji opis – z električnim potencialom – bomo obravnavali pozneje.

Električna poljska jakost $\vec{E}$ je podana kot sila z nabojem:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e}.$$

Smer električne poljske jakosti se ujema s silo na pozitivni naboj, enota pa je N/C ali V/m. Sila na naboj e, ki ga postavimo v električno polje, je enaka

$$\vec{F} = e\vec{E}.$$

Če poznamo krajevno odvisnost električne poljske jakosti, lahko v vsaki točki električnega polja izračunamo silo na naboj, ki ga tja postavimo. Električno polje torej poznamo.

Oglejmo si najprej električno polje točkastega naboja. Vzemimo, da leži pozitiven točkasti naboj e' v koorinatnem izhodišču. Ko na mesto, podano s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ postavimo električni naboj e, deluje nanj sila

$$\vec{F} = \frac{ee'\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Električna poljska jakost na tem mestu je enaka

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = \frac{e'\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Električna poljska jakost kaže v radialni smeri. Usmerjena je stran od naboja e', če je naboj pozitiven. Če je naboj e' negativen, je usmerjena električna poljska jakost proti njemu v radialni smeri. Velikost električne poljske jakosti pada s kvadratom oddaljenosti od naboja.

Sila naboja e_i, katerega lega je določena s krajevnim vektorjem $\vec{r}_i$ na naboj e, katerega lega je določena skrajevnim vektorjem $\vec{r}$, je podana z enačbo (1). Električna poljska jakost na mestu, ki ga določa krajevni vektor $\vec{r}$, $\vec{E}(\vec{r})$,je enaka

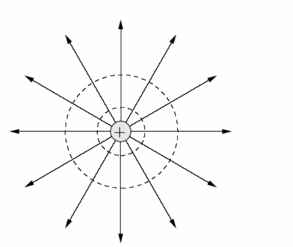
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}.$$

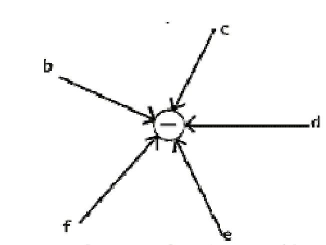
V primeru, ko imamo opravka z več naboji, je električna poljska jakost na mestu, ki ga določa krajevni vektor $\vec{r}$ (enačba (2)) enaka

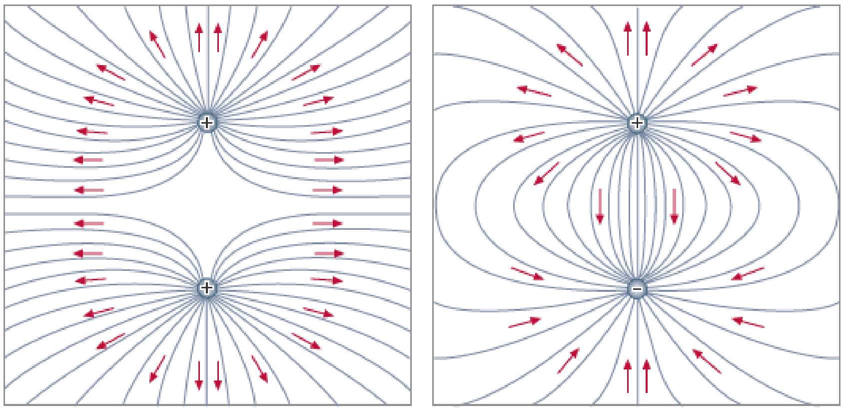
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}.$$

Električno polje ponazorimo s silnicami. Silnica je črta, ki jo dobimo, ko sledimo smer sile na pozitivni naboj ali smer električne poljske jakosti. Smer silnice se ujema s smerjo električne poljske jakosti. V vsaki točki je električna poljska jakost tangentna na silnico in kaže v smeri silnice.

Omenimo nekaj značilnih primerov.





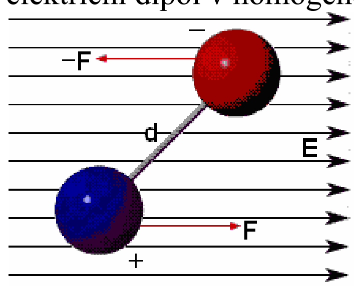


V okolici enakomerno nabite dolge ravne žice kažejo silnice v radialni smeri. Usmerjene so stran od žice, ko je naboj pozitiven in proti žici, ko je naboj negativen.

V okolici homogeno nabite velike ravne plošče so silnice pravokotne na ploščo. Ko je plošča pozitivna so usmerjene stran od plošče, ko je negativna pa k plošči.

Električne silnice izvirajo iz pozitivnih električnih nabojev in ponirajo v negativnih električnih nabojih

Za zgled si oglejmo električni dipol v homogenem električnem polju.



Električni dipol sestavljata pozitivni naboj e in enako velik negativni naboj –e v razdalji d. Opišemo ga z električnim dipolnim momentom $\vec{p}_e$. Dipolni moment je vektor z velikostjo *ed* usmerjen od negativnega proti pozitivnemu naboju. Sila na pozitivni naboj je v homogenem električnem polju nasprotno enaka sili na negativni naboj. Skupna sila je torej nič. Navor pa v splošnem ni enak nič. Enak je

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}.$$

V stabilni ravnovesni legi je dipolni moment orientiran v smeri magnetnih silnic.Ko zasukamo dipol za kot ϕ iz ravnovesne lege je velikost navora $p_e E\sin\phi$. Pri tem opravimo delo

$$A = \int_0^{\phi} M d\phi = -p_e E\cos\phi + p_e E\,.$$

To delo dipol lahko vrne, zato definiramo energijo električnega dipola v homogenem električnem polju kot

$$W = -\vec{p}_e \vec{E}.$$

Ničlo energije smo izbrali pri pravokotni orientaciji ($\phi = 90^0$).

GAUSSOV ZAKON

Zadnjič smo pokazali, kako izračunamo električno poljsko jakost v primeru večjega števila nabojev. V tem primeru velja

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r}-\vec{r}_i|^3}.$$

V primeru zvezne porazdelitve nabojev enačbo prepišemo takole:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')de}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}.$$

Tu je $\vec{r}\,'$ krajevni vektor naboja de.

Izračunajmo električno poljsko jakost v okolici dolge ravne žice. Naboj na enoto dolžine μ naj bo po vsej žici konstanten. Zanima nas električna poljska jakost v oddaljenosti r od žice. Izhodišče koordinatnega sistema naj bo v točki na žici, ki je najbliže točki, v kateri računamo električno poljsko jakost. Vzdolž žice naj kaže os x, pravokotno na žico pa os y. Točka, v kateri računamo električno poljsko jakost, naj leži na x-y ravnini. V tem koordinatnem sistemu je $\vec{r} = (0,r)$, $\vec{r}\,' = (x,0)$ naboj de pa $de = \mu dx$. Imenovalec integranda je enak $|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = \left(x^2+r^2\right)^{3/2}$. Če je žica zelo dolga integriramo po x od -∞ do ∞. Projekcija električne poljske jakosti na os x je enaka nič. To lahko uganemo tudi iz simetrije. Porazdelitev električnega naboja levo od izhodišča je enaka porazdelitvi električnega naboja desno od izhodišča. Zaradi tega lahko kaže električna poljska jakost le v smeri osi y. Če ne bi bilo tako, bi lahko žico zasukali okrog osi y za 180^0. pri tem se porazdelitev električnega naboja ne bi spremenila, smer električne poljske jakosti pa bi se spremenila. To ne more biti res. Električna poljska jakost kaže v smeri osi y, enaka pa je

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\mu dx}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Električna poljska jakost pada obratno sorazmerno z oddaljenostjo od žice.

Kot drugi primer izračunajmo električno polje v okolici razsežne homogeno nabite ravne plošče. Naboj na enoto ploskve označimo s σ. Os z naj bo pravokotna na ploščo, osi x in y pa ležita v ravnini plošče. Krajevna vektorja sta enaka $\vec{r} = (0,0,z)$, $\vec{r}\,' = (x,y,0)$. Naboj de je enak de = σdS.

Na osnovi simetrije hitro ugotovimo, da kaže električna poljska jakost v smeri osi z. Ploščo lahko namreč zasukamo okrog osi z za poljuben kot pa se porazdelitev naboja ne spremeni. Če bi bila električna poljska jakost nagnjena proti osi z, bi se njena smer pri tem spremenila. To se ne sklada s tem, da je porazdelitev električnega naboja enaka kot pred zasukom.

Električna poljska jakost je enaka

$$E = E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{z\sigma \, dS}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

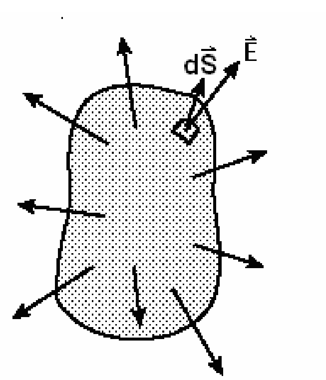
Z r^2 smo označili $x^2 + y^2$. Ker je integrand le funkcija r lahko ravnino sestavimo iz tankih kolobarjev s polmeroma r in r+dr ter s ploščino dS = 2πrdr in dobimo

$$E = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{2\pi\, rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Na vsaki strani plošče dobimo homogeno električno polje. Električna poljska jakost na eni strani plošče je enako velika in nasprotno usmerjena, kot na drugi strani polšče. To seveda velja le za neskončno ploščo. Pri plošči končnih dimenzij je električno polje homogeno le, ko je oddaljenost od plošče dosti manjša od najmanjše oddaljenosti od roba plošče.

Za vajo izračunajte električno poljsko jakost na osi tankega obroča s polmerom r, po katerem je enakomerno porazdeljen naboj e. Ugotovili boste, da ima električna poljska jakost smer osi obroča, njena velikost pa je enaka $E = \frac{ez}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$. Tu je z oddaljenost od sredine obroča. Na sredi obroča je E = 0.

Do enakih rezultatov bi v prvih dveh primerih prišli z uporabo Gaussovega zakona.
Vzemimo, da leži pozitiven točkast naboj e v središču krogle s polmerom r. Izračunajmo, kolikšen je integral električne poljske jakosti po površju krogle $\oint \vec{E}d\vec{S}$. Krožec na integralu pove, da integriramo po zaključeni ploskvi. Vektor $d\vec{S}$ naj kaže ven iz krogle. Za ilustracijo je namesto krogle narisana zaključena ploskev poljubne oblike.



Električna poljska jakost ima radialno smer in je v vsaki točki krogle vzporedna z vektorjem $d\vec{S}$. Poleg tega je velikost električne poljske jakosti povsod na krogli enaka. Zato velja

$$\oint \vec{E}d\vec{S}. = \oint EdS = E\oint dS = E4\pi r^2.$$

Upoštevajmo še, da je E = $e/4\pi\varepsilon_0 r^2$ pa dobimo

$$\oint \vec{E}d\vec{S}. = e/\varepsilon_0.$$

Če namesto krogle vzamemo poljubno zaključeno ploskev okrog naboja, pridemo do enakega rezultata (*). Ko je naboj izven zaključene ploskve, je integral nič. Na osnovi tega ugotovimo, da je integral električne poljske jakosti po zaključeni ploskvi enak naboju, ki je zajet znotraj ploskve deljenemu z električno konstanto ε_0. Natančneje rečeno, z električno konstanto je treba deliti razliko med pozitivnim in negativnim električnim nabojem, ki je zajet znotraj ploskve.

Vpeljimo vektor gostote električnega polja $\vec{D}$,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},$$

z enoto C/m^2. Z njim zapišemo Gaussov zakon na naslednji način

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = e.$$

Definirajmo še električni pretok Φ_e skozi poljubno ravno ali ukrivljeno ploskev kot integral po ploskvi

$$\Phi_e = \int \vec{D} d\vec{S}.$$

Gaussov zakon torej pove, da je električni pretok skozi zaključeno ploskev enak zajetemu naboju.

Pravega razloga, zakaj smo vpeljali vektor gostote električnega polja, še ne vidimo. Spoznali ga bomo, ko bomo obravnavali snov v električnem polju.

Izračunajmo z Gaussovim zakonom električni poljsko jakost v okolici dolge homogeno nabite ravne žice. Naboj na enoto dolžine naj bo μ. Za zaključeno ploskev izberimo valj s polmerom r in višino h. Žica naj poteka po osi valja. Električni pretok skozi osnovni ploskvi valja je nič. Električni pretok skozi plašč valja je $D2\pi rh$. V vsaki točki plašča valja sta vektorja $d\vec{S}$ in $\vec{D}$ vzporedna, velikost gostote električnega polja D pa je po plašču konstantna. Znotraj valja je zajet naboj μh. Iz tega sledi

$$D = \frac{\mu}{2\pi r} \quad \text{in} \quad E = \frac{\mu}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

V primeru homogeno nabite ravne plošče vzemimo za zaključeno ploskev valj višine h z velikostjo osnovne ploskve S. Os valja naj bo pravokotna na ploščo. Polovica valja naj bo na eni strani, polovica pa na drugi strani plošče. Mi namreč vnaprej ne vemo, da je električno polje homogeno. Na osnovi simetrije ugotovimo le, da je v oddaljenosti h/2 od plošče električna poljska jakost na obeh straneh plošče po velikosti enaka, po smeri pa nasprotna. Zato vzamemo osnovni ploskvi valja enako oddaljeni od plošče.

Električni pretok skozi plašč valja je nič, skozi osnovni ploskvi pa 2DS. Električni naboj znotraj valja je enak $e = \sigma S$. Iz tega sledi $D = \sigma/2$ in $E = \sigma/2\varepsilon_0$.

V obeh primerih smo dobili enak rezultat, kot z daljšim računom.

(*) Za zaključek izračunajmo električni pretok skozi poljubno oblikovano zaključeno ploskev okrog točkastega naboja e. Produkt $\vec{D}d\vec{S}$ je enak DdS', pri čemer je dS' projekcija ploskve dS na ravnino, ki je pravokotna na krajevni vektor od naboja do ploskve. Izhodišče koordinanega sistema postavimo v naboj. Oddaljenost od naboja do ploskve dS naj bo r. Velikost gostote električnega polja D je enaka $D = e/4\pi r^2$. Produkt $\vec{D}d\vec{S}$ je torej enak $(e/4\pi)(dS'/r^2)$.

Podobno, kot smo v ravnini z lokom in polmerom definirali kot, $d\phi = dl/r$, lahko v prostoru definiramo prostorski kot, $d\Omega = dS'/r^2$. Tako, kot je lok dl pravokoten na r, mora biti tudi ploskvica dS' pravokotna na r. Poln kot izračunamo z integracijo po krogu s polmerom r, poln prostorski kot pa z integracijo po krogli s polmerom r:

$$\Omega = \oint \frac{dS'}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$$

V našem primeru je

$$\vec{D}d\vec{S} = \frac{e}{4\pi}d\Omega.$$

Električni pretok skozi zaključeno ploskev je enak

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = \frac{e}{4\pi}\int d\Omega = e.$$

Če je naboj zunaj ploskve, dobimo pri istem dΩ dva enako velika prispevka nasprotnega znaka, ki se med seboj uničita in je zato

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = 0.$$

Gostota električnega polja je - enako kot električna poljska jakost - vektorska vsota prispevkov posameznih točkastih nabojev e_i: $\vec{D} = \sum_i \vec{D}_i$. Zato tudi integral $\oint \vec{D}d\vec{S}$ po poljubni zaključeni ploskvi zapišemo kot vsoto integralov

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = \sum_i \oint \vec{D}_i d\vec{S}.$$

Člen vsote je nič, če je naboj izven zaključene ploskve, ali enak naboju e_i, če je naboj znotraj zaključene ploskve. Vsota je torej enaka vsoti vseh točkastih nabojev , ki so zajeti znotraj zaključene ploskve, ali z drugimi besedami celotnemu električnemu naboju, ki je zajet znotraj zaključene ploskve.

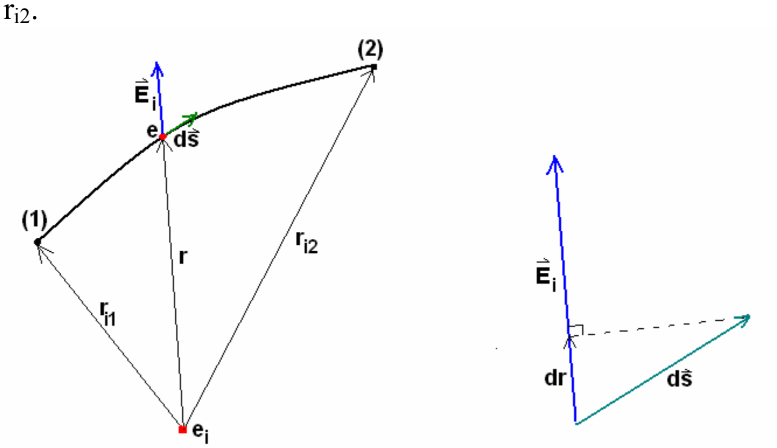
ELEKTRIČNI POTENCIAL

Pri premiku električnega naboja e v električnem polju iz točke (1) v točko (2) opravi električna sila delo

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} e\vec{E}d\vec{s}.$$

Delo je največje, ko se naboj premakne v smeri silnice. Pri premiku pravokotno na silnice je delo enako nič.

Najprej izračunajmo delo sile enega samega točkastega naboja e_i na naboj e. Podoben račun smo naredili, ko smo obravnavali delo gravitacijske sile. Ko je naboj e v točki (1) naj bo oddaljenost med nabojema r_{i1}, ko je v točki (2) pa naj bo oddaljenost med nabojema r_{i2}.



Pri majhnem premiku $d\vec{s}$ je delo električne sile dA enako $dA = \vec{E}_i d\vec{s} = E_i dr.$ Tu je E_i velikost električne poljske jakosti, dr pa projekcija vektorja $d\vec{s}$ na smer električne poljske jakosti. Ker ima električna poljska jakost smer zveznice med nabojema, predstavlja dr spremembo razdalje r med nabojema. Vemo tudi, da je $E_i = e_i/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Delo električne sile je torej enako

$$A = \int_{r_{i1}}^{r_{i2}} \frac{ee_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{ee_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i1}} - \frac{ee_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i2}}. \quad (1)$$

Kot vidimo, je delo električne sile odvisno samo od začetne oddaljenosti med nabojema r_{i1} in končne oddaljenosti med nabojema r_{i2}, ni pa odvisno od poti. Električna sila je torej konservativna sila, električna potencialna energija W_{ep} nabojev e in e_i pa je pri oddaljenosti r_i med njima enaka

$$W_{ep} = \frac{ee_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}.$$

Podobno kot pri gravitacijski potencialni energiji smo tudi tu izbrali ničlo pri neskončni oddaljenosti med nabojema. Gravitacijska potencialna energija je pri taki izbiri ničle vedno negativna. Električna potencialna energija je lahko pozitivna ali negativna. Sistem dveh istiomenskih nabojev opravlja delo, ko se razdalja med njima povečuje. Zato je pri končni oddaljenosti med njima električna potencialna energija pozitivna. Če hočemo povečati razdaljo med raznoimenskima nabojema, moramo vložiti delo. Zato je električna potencialna energija dveh raznoimenskih nabojev negativna.

V primeru, ko povzroča električno polje več točkastih nabojev, osnovne ugotovitve ostanejo. Električna sila na naboj e je vektorska vsota sil nabojev e_i. Delo električne sile je vsota del sil posameznih nabojev. Delo sile vsakega točkastega naboja pa je enako negativni vrednosti spremembe električne potencialne energije (enačba 1). Zato je tudi v tem primeru delo električne sile enako negativni vrednosti spremembe električne potencialne energije W_{ep},

$$W_{ep} = \sum_i \frac{ee_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}.$$

Tu je r_i razdalja med nabojem e in nabojem e_i.

Električna potencialna energija sistema točkastih nabojev je enaka vsoti čenov $e_i e_k/4\pi\varepsilon_0 r_{ik}$ sešteti po vseh parih. Tu je r_{ik} razdalja med nabojema e_i in e_k.
Električna potencialna energija naboja e v električnem polju nabojev ei je sorazmerna naboju e. Razmerje W_{ep}/e je odvisno samo od lege naboja e v električnem polju, od njegove velikosti pa ni odvisno. To razmerje je povezano z električnim poljem. Imenujemo ga električni potencial in označimo z U:

$U = W_{ep}/e.$

Enota za elektični potencial je J/C ali V (volt)

V električnem polju točkastih nabojev e_i, katerih lego glede na izbrano izhodišče podajajo krajevni vektorji $\vec{r}_i$, je na mestu, ki ga določa krajevni vektor $\vec{r}$, električni potencial enak

$$U(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

V primeru zvezne porazdelitve nabojev vsoto nadomesti integral

$$U(\vec{r}) = \int \frac{de}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Vektor $\vec{r}'$ je krajevni vektor naboja *de*.

Delo električne sile pri premiku iz točke (1) v točko (2) je v električnem polju, ki ga opišemo z električno poljsko jakostjo, enako

$$A = \int_{(1)}^{(2)} e\vec{E}d\vec{s} = e\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{s} = W_{ep1} - W_{ep2} = e(U_1 - U_2).$$

Tu je U_1 električni potencial v točki (1), U_2 pa električni potencial v točki (2). Zveza med električno poljsko jakostjo in električnim potencialom je torej naslednja

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{s} = (U_1 - U_2).$$

Razliko električnih potencialov $U_1 - U_2$ imenujemo električna napetost med točkama (1) in (2). Enota za električno napetost je volt.

Integral električne poljske jakosti po zaključeni poti je enak nič:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = 0.$$

Vrnili smo se namreč v začetno točko, zato je spremembe električnega potenciala nič.

Če poznamo krajevno odvisnost električne poljske jakosti in električni potencial v eni točki električnega polja lahko izračunamo električni potencial v kateri koli točki električnega polja. Vprašanje je, ali je možna tudi obratna pot: iz električnega potenciala izračunati električno poljsko jakost. Odgovor je da. Zapišimo zvezo med električno poljsko jakostjo in električnim potencialom v diferencialni obliki:

$$\vec{E}d\vec{s} = -dU.$$

Pri enako velikih a različno usmerjenih $d\vec{s}$ potencial najbolj naraste, ko sta $d\vec{s}$ in $\vec{E}$ nasproti usmerjena. Tedaj je sprememba potenciala dU enaka Eds, velikost električne poljske jakosti E pa je enaka dU/ds. Ko upoštevamo še smer električne poljske jakosti lahko zapišemo

$E = -(dU/ds)_{\text{v smeri najmočnejšega naraščanja}}$.

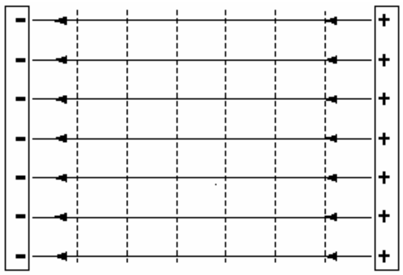
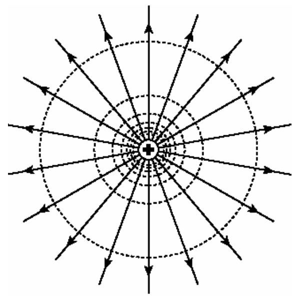
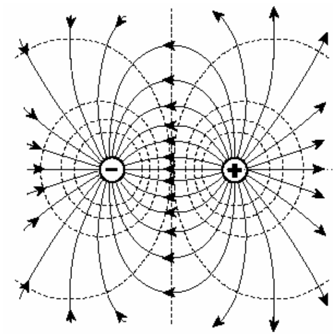
Enačba je uporabna v primerih, v katerih lahko uganemo smer, v kateri potencial najmočneje narašča. V splošnem (in z malo več znanja matematike) velja

$$\vec{E} = -gradU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Gradient smo zapisali v kartezičnih koordinatah.

Električno polje lahko opišemo torej na tri ekvivalentne načine: z velikostjo in lego izvorov polja, z električno poljsko jakostjo in z električnim potencialom. Če poznamo lego in velikost nabojev znamo izračunati električno poljsko jakost in električni potencial. Pravkar smo videli, kako iz električne poljske jakosti izračunamo električni potencial in obratno. S pomočjo Gaussovega zakona izračunamo lego in velikost električnih nabojev. Opis električnega polja z električnim potencialom, ki je skalar, je pogosto ugodnejši od opisa z električno poljsko jakostjo, ki je vektor.

Za ponazoritev električnega polja uporabljamo poleg silnic tudi ekvipotencialne ploskve. To so ploskve konstantnega potenciala, ki so pravokotne na silnice. Pri premikanju električnega naboja po ekvipotencialni ploskvi ne opravljamo dela. Ekvipotencialne ploskve okrog točkastega naboja so koncentrične krogle. Okrog dolge homogeno nabite ravne žice so ekvipotencialne ploskve koncentrični valji. V okolici homogeno nabite velike ravne plošče so ekvipotencialne ploskve ravnine vzporedne s ploščo.

Kot zgled si oglejmo električni potencial na osi tankega obroča s polmerom R, po katerem je enakomerno porazdeljen pozitiven električni naboj e.

Točka, ki je vzdolž osi oddaljena od središča obroča za z, je od vseh delov obroča oddaljena za $\sqrt{z^2+R^2}$, zato je električni potencial v tej točki enak

$$U = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Električna poljska jakost ima smer osi, enaka pa je

$$E = -\frac{dU}{dz} = \frac{ez}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}.$$

Oglejmo si še električni potencial v okolici električnega dipola. Naj leži pozitivni naboj na osi z v oddaljenosti d/2 od izhodišča. Negativni naboj naj leži na osi z v oddaljenosti –d/2 od izhodišča. Električni potencial na mestu, ki ga določa krajevni vektor $\vec{r} = (x, y, z)$, je

$$U = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-d/2)^2}} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z+d/2)^2}}.$$

Naj bo r dolžina vektorja $\vec{r}$. Omejimo se na primer, ko je r>>d. Zanima nas torej električni potencial daleč od dipola. V tem primeru pod korenoma člen $(d/2)^2$ zanemarimo in dobimo

$$U \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2-zd}} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+zd}} \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}(1+\frac{zd}{2r^2}) - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}(1-\frac{zd}{2r^2}) = \frac{ezd}{4\pi\varepsilon_o r^3}.$$

Električni dipolni moment $\vec{p}_e$ definiramo kot vektor velikosti *ed*, ki ima smer od negativnega proti pozitivnemu naboju. Daleč od dipola je električni potencial enak

$$U = \frac{p_e z}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}_e\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Zadnji izraz velja splošno, pri poljubni orientaciji električnega dipola.

(*) Z uporabo gradienta izračunajmo električno poljsko jakost daleč od dipola. Upoštevajmo, da veljajo naslednje zveze:

$$grad(\vec{p}_e\vec{r}) = \vec{p}_e$$

$$grad(r) = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$grad(F(r)) = \frac{dF(r)}{dr}grad(r)$$

$$grad(FG) = FgradG + GgradF.$$

Pri tem dobimo

$$\vec{E} = -gradU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{p}_e\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_e\right].$$

Električna poljska jakost pada s tretjo potenco oddaljenosti od dipola, potencial pa s kvadratom oddaljenosti od dipola. Obe potenci sta za eno višji, kot v primeru točkastega naboja.

Za zgled izračunajmo električno poljsko jakost in električni potencial v okolici nabite prevodne krogle. Polmer krogle naj bo R, na površini krogle pa naj bo enakomerno porazdeljen naboj e.

Znotraj krogle ni električnega polja, zunaj krogle pa je električna poljska jakost $E = e/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Za računanje električnega potenciala uporabimo zvezo

$$U(r_2) = U(r_1) - \int_{r_1}^{r_2} Edr.$$

Vzemimo, da je $U(\infty)=0$ in prepišimo zadnjo zvezo v obliki

$$U(\infty) = 0 = U(r) - \int_{r}^{\infty} Edr = U(r) - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Električni potencial v okolici krogle je enak $U(r) = e/4\pi\varepsilon_0 r$, električna napetost U med kroglo in oddaljenimi predmeti pa $U = e/4\pi\varepsilon_0 R$.

Kot drugi zgled vzemimo homogeno nabito kroglo s polmerom R. Električni naboj na krogli naj bo e. Znotraj krogle ($r<R$) dobimo po Gaussovem zakonu $D4\pi r^2 = \rho_e 4\pi r^3/3 = er^3/R^3$.

Iz tega dobimo $E(r<R) = er/4\pi\varepsilon_0 R^3$. Električna poljska jakost, ki je v sredini krogle nič, linearno narašča z r in doseže na površju vrednost $E(r=R) = e/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Zunaj krogle električna poljska jakost pada s kvadratom oddaljenosti od središča krogle kot $E(r>R) = e/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Če zopet predpostavimo, da je $U(\infty)$ enak 0, je zunaj krogle električni potencial enak kot pri prevodni krogli: $U(r>R) = e/4\pi\varepsilon_0 r$, znotraj krogle pa dobimo

$$U(r<R) = \int_{r}^{\infty} Edr = \int_{r}^{R} E(r<R)dr + \int_{R}^{\infty} E(r>R)dr = \frac{e(R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Napetost U med sredino krogle in oddaljenimi predmeti je $U = 3e/8\pi\varepsilon_0 R$.

Izračunajno še hitrost elektronov v, ki jih v katodni cevi osciloskopa pospešimo z napetostjo U = 2 kV. Ko prileti elektron od negativne katode do pozitivne anode, mu pade električna potencialna energija za $e_0 U$. Za toliko se mu poveča kinetična energija.

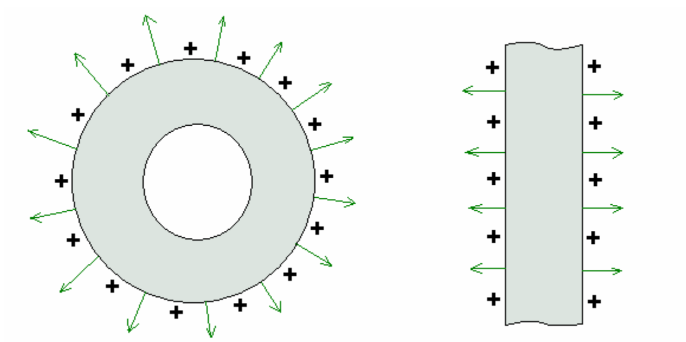
Nadalje upoštevajmo, da je kinetična energija elektronov ob katodi zanemarljiva pa dobimo:
$mv^2/2 = e_0U$.
Z upoštevanjem podatkov za osnovni naboj e_0 in maso elektrona ($m = 9\ 10^{-31}$ kg) dobimo $v = 2.7\ 10^7$ m/s.

PREVODNIKI V ELEKTRIČNEM POLJU, KONDENZATOR

Prevodniki v statičnem električnem polju

Vzemimo, da na izoliran predmet iz prevodne snovi nanesemo nekaj električnega naboja. Zaradi odbojnih sil med istoimenskimi naboji se nanešen naboj porazdeli po površju predmeta. Porazdeli se na ta način, da je znotraj predmeta električna poljska jakost enaka nič. Od nič različna električna poljska jakost namreč povzroči gibanje električnih nabojev. O tem bomo natančneje govorili, ko bomo obravnavali električni tok. V elektrostatiki električni naboj miruje, zato mora biti sila nanj enaka nič.

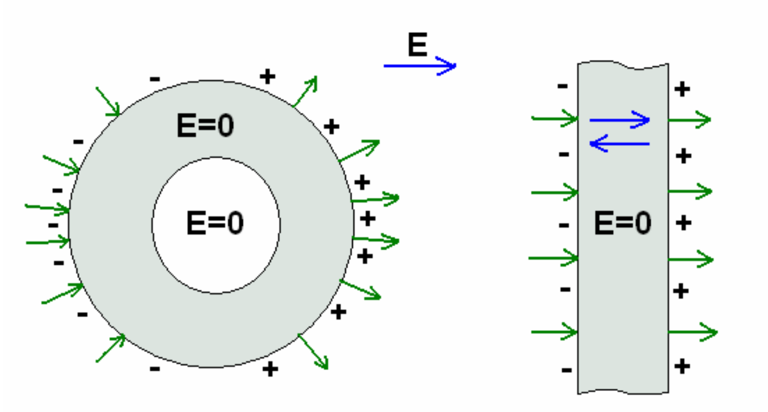
Če ima predmet obliko krogle, se električni naboj enakomerno porazdeli po krogli. Na veliki enakomerno debeli prevodni plošči se električni naboj enakomerno porazdeli po obeh straneh tako, da med njima ni električnega polja. To velja za večji del plošče, edino na robovih je porazdelitev naboja drugačna. V splošnem se električni naboj neenakmerno porazdeli po predmetu. Več ga je na robovih in vogalih, manj pa na ravnih mestih.



Silnice so pravokotne na površino prevodnega predmeta. Nagnjene silnice pomenijo, da je projekcija električne poljske jakosti na površje prevodnika različna od nič. Posledica tega so površinski tokovi, ki jih v elektrostatiki seveda ni. Z Gaussovim izrekom lahko poiščemo zvezo med površinsko gostoto naboja σ in električno poljsko jakostjo tik nad površjem prevodnika. Zaključena ploskev naj ima obliko ploske škatle, katere ena ploskev velikosti S je znotraj prevodnika, druga enako velika ploskev pa tik nad površino. Električni pretok je samo skozi zunanjo ploskev in sicer je enak DS. Električni naboj znotraj škatle je enak σS. Po Gaussovem izreku velja
$D = \sigma$, oziroma $E = \sigma/\varepsilon_0$.

Če je znotraj prevodnika votlina, v njej ni električnega polja. Tudi če naredimo kletko iz kovinske mreže, je v njej električno polje zanemarljivo. Edino v bližini mreže in sicer na mestih, katerih oddaljenost od mreže je reda velikosti razdalje med žicami, je električno polje močnejše.

Ko damo prevoden predmet v električno polje pride v njem do prerazporeditve električnega naboja. Pojav imenujemo influenca. Električni naboj se nabere na površju predmeta. Del površja nosi pozitiven električni naboj, del pa negativnega. Skupni električni naboj je nič. Električna poljska jakost naboja na površju prevodnika je ravno nasprotna zunanji električni poljski jakosti tako, da znotraj prevodnika ni električnega polja. Tudi, če je znotraj prevodnika votlina, v njej ni električnega polja.



Vzemimo, da damo v električno polje z jakostjo E prevodno ploščo. Silnice so pravokotne na površje plošče. Na eni strani se nabere električni naboj s površinsko gostoto σ, na drugi strani pa električni naboj s površinsko gostoto $-\sigma$. V vmesnem prostoru povzroča ta naboj električno polje z jakostjo $E' = 2(\sigma/2\varepsilon_0) = \sigma/\varepsilon_0$. Ta električna poljska jakost je po velikosti enaka, po smeri pa nasprotna zunanji električni poljski jakosti E. Velja torej $E' = E = \sigma/\varepsilon_0$. Površinska gostota električnega naboja je enaka
$\sigma = \varepsilon_0 E$.

Ker znotraj prevodnika ni električnega polja, je tudi električni potencial po celem prevodniku enak, površje prevodnika pa predstavlja ekvipotencialno ploskev v električnem polju

Kondenzator

Kondenzator sestavljata dve kovinski elektrodi, ki ju ponavadi nabijemo z nabojema e in –e. Med elektrodama je električno polje. Napetost med elektrodama U je sorazmerna naboju e in jo zapišemo v naslednji obliki
$U = e/C$.
Tu je C kapaciteta kondenzatorja. Enota za kapaciteto je As/V ali F (farad). V praksi je farad velika enota, zato se ponavadi uporabljajo deli farada mF, µF, nF in pF. Obravnavali bomo ploščati, valjasti in krogelni kondenzator.

Ploščati kondenzator sestavljata dve vzporedni plošči s ploščino S, med katerima je razdalja d. Da bo račun lažji predpostavimo, da je razdalja med ploščama dosti manjša od dimenzije plošč. V tem primeru je v večini prostora med ploščama homogeno električno polje, silnice pa potekajo pravokotno z ene plošče na drugo. Električni naboj se porazdeli po notranjih površinah plošč. Električna poljska jakost E med ploščama kondenzatorja je enaka
$E = \sigma/\varepsilon_0 = e/S\varepsilon_0$.

Zunaj kondenzatorja ni električnega polja. Napetost med ploščama lahko izračunamo z inegracijo električne poljske jakosti po poljubni poti od prve do druge plošče. Električni potencial je namreč na vsaki od plošč konstanten. Izbrali bomo najpreprostejšo pot po eni od silnic, ki potekajo pravokotno z ene plošče na drugo. V tem primeru je

$$U = \int \vec{E}d\vec{s} = Ed = \frac{ed}{\varepsilon_0 S}.$$

Kapaciteta ploščatega kondenzatorja je enaka

$$C = \varepsilon_0 S/d. \qquad (1)$$

Ob robovih kondenzatorja je situacija drugačna. Silnice se krivijo in sežejo tudi ven iz kondenzatorja in tudi razporeditev električnega naboja po ploščah je tam drugačna kot smo predpostavili. V primeru, ko je razdalja med ploščama dosti manjša od dimenzij plošč, lahko robove zanemarimo. Tedaj se kapaciteta kondenzatorja, ki jo izračunamo po enačbi (1), dobro ujema z izmerjeno vrednostjo. V primeru, ko je razdalja med ploščama večja uporabimo enačbo (1) za oceno kapacitete.

Valjast kondenzator sestavljata dve valjasti elektrodi – kovinska palica in cev – s skupno osjo. Naj bo dolžina kondenzatorja l, polmer notranje elektrode a, notranji polmer cevi pa b. Električni naboj se enakomerno porazdeli po površju palice in po notranjem površju cevi. Med tema dvema površjema je električno polje. Drugje pa ga ni. Izjema sta seveda področji na koncih kondenzatorja, kjer sežejo silnice tudi ven iz kondenzatorja. Podobno kot v prejšnjem primeru bomo predpostavili, da je kondenzator dosti daljši od b-a in robove zanemarili. Električna poljska jakost med elektrodama je enaka

$$E = e/2\pi\varepsilon_0 rl.$$

Napetost med elektrodama izračunamo z integracijo v radialni smeri

$$U = \int_a^b E dr = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Kapaciteta valjastega kondenzatorja je enaka

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

Kot zanimivost si oglejmo še krogelni kondenzator. Sestavljata ga dve koncentrični prevodni krogli. Notranja ima polmer a, zunanja pa notranji polmer b. Električno polje je med kroglama. Silnice imajo radialno smer. Električna poljska jakost je enaka

$$E = e/4\pi\varepsilon_0 r^2.$$

Napetost med elektrodama je

$$U = \int_a^b E dr = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Kapaciteta krogelnega kondenzatorja je enaka

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}.$$

Tudi če zunanje krogle ni (b=∞), ima krogla s polmerom a kapaciteto $4\pi\varepsilon_0 a$. Napetost U, ki nastopa v izrazu za kapaciteto ($e = CU$) je v tem primeru napetost med kroglo in oddaljenini predmeti.

Ploščatemu in valjastemu kondenzatorju lahko spreminjamo kapaciteto. Pri ploščatem kondenzatorju ponavadi premikamo eno ploščo proti drugi, pri čemer ostaja razdalja med ploščama konstantna. V tem primeru je S, ki nastopa v izrazu za kapaciteto, približno ploščina področja, na katerem se plošči prekrivata. Tako delujejo vrtljivi kondenzatorji.

Valjastemu kondenzatorju spreminjamo kapaciteto tako, da vzdolž osi premikamo eno elektrodo proti drugi. Dolžina l v izrazu za kapaciteto je v tem primeru dolžina področja, na katerem se elektrodi prekrivata.

V praksi so kondenzatorji pogosto narejeni tako, da sta kovinski foliji, med katerima je tanka plast izolatorja, zviti v rolo.

Ko kondenzator priključimo na vir napetosti, ta »prečrpa« nekaj elektronov z ene plošče na drugo. Plošča z manj elektroni je pozitivna, plošča z več elektroni pa negativna. Naboja plošč sta po velikosti enaka CU. Tu je C kapaciteta kondenzatorja, U pa napetost vira.

Ko na vir napetosti priključimo dva vzporedno vezana kondenzatorja s kapacitetama C_1 in C_2 je napetost med ploščama prvega kondenzatorja enaka napetosti med ploščama drugega kondenzatorja. Obe napetosti sta enaki napetosti vira U. Od priključkov vira do plošč kondenzatorjev vodijo kovinske žice in, kot smo že omenili, potencial se po prevodnikih v elektrostatiki ne spreminja. Naboj na ploščah prvega kondenzatorja je C_1U, na ploščah drugega kondenzatorja pa C_2U. Prečrpan naboj je torej
$e = C_1U + C_2U = CU$.
S C smo označili nadomestno kapaciteto vezja, ki je enaka $C = C_1 + C_2$.

Drugače je, ko na vir napetosti priključimo zaporedno vezana kondenzatorja s kapacitetama C_1 in C_2. Vir napetosti prečrpa naboj -e s prve plošče prvega kondenzatorja na drugo ploščo drugega kondenzatorja. V vmesnem delu pride do influence. Naboj se prerazporedi tako, da je na drugi plošči prvega kondenzatorja naboj -e, na prvi plošči drugega kondenzatorja pa naboj e. Edino v tem primeru znotraj prevodnih plošč kondenzatorjev ni električnega polja. Na vseh štirih ploščah je torej po velikosti enak naboj e. Kolikšen je e ugotovimo, ko upoštevamo, da je vsota napetosti med ploščami kondenzatorjev enaka napetosti vira U:
$U_1 + U_2 = U$.
Tu je $U_1 = e/C_1$ in $U_2 = e/C_2$. Naboj e je torej enak $e = CU$, pri čemer je nadomestna kapaciteta C enaka
$C = C_1C_2/(C_1 + C_2)$.
Velja tudi zveza $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$, ki jo lahko posplošimo na več zaporedno vezanih kondenzatorjev.

Napetosti med ploščami kondenzatorjev sta enaki
$U_1 = e/C_1 = (C/C_1)U = (C_2/(C_1+C_2))U \qquad U_2 = (C_1/(C_1+C_2))U$.
Med ploščama kondenzatorja z večjo kapaciteto je manjša napetost, kot med ploščama kondenzatorja z manjšo kapaciteto.

Med polnjenjem kondenzator prejema delo. Vzemimo časovni interval med časom t in časom t+dt v času polnjenja. V tem času je naboj na ploščah kondenzatorja e', napetost med ploščama pa $U' = e'/C$. V času dt preide z ene na drugo ploščo naboj de'. Za to je potrebno delo

$dA = U'de' = (e'/C)de'$.
V času, v katerem napetost med ploščama kondenzatorja naraste z nič na vrednost U, naboj na ploščah kondenzatorja pa z nič na vrednost e = CU, prejme kondenzator delo

$$A = \int_0^e \frac{e'}{C} de' = \frac{e^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Prejeto delo lahko kondenzator v celoti vrne. Nabit kondenzator ima torej energijo W_C:

$$W_C = \frac{e^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Kondenzatorje pogosto uporabljamo v električnih vezjih kot »začasno skladišče« energije.

Mimogrede omenimo, da pri polnjenju kondenzatorja z virom s stalno napetostjo U, opravi vir delo $A = 2W_C$. Polovica tega dela se spremeni v toploto. Če napetost vira, na katerega je priključen kondenzator, zvezno narašča, so lahko izgube zanemarljive. Podrobneje o tem pozneje.

Izraz za energijo nabitega kondenzatorja lahko v primeru ploščatega kondenzatorja izrazimo tudi z električno poljsko jakostjo:
$W_C = (\varepsilon_0 E^2/2)V$.
Tu je V prostornina kondenzatorja, ali drugače povedano, prostornina homogenega električnega polja. Enačbo lahko razumemo tudi tako, da električnemu polju pripišemo energijo W_e z gostoto w_e,
$w_e = W_e/V = \varepsilon_0 E^2/2 = ED/2$.

Preverimo, da ta razlaga velja tudi v primeru osamljene prevodne krogle s polmerom R, ki nosi naboj e. Kroglo si lahko predstavljamo kot kondenzator s kapaciteto $4\pi\varepsilon_0 R$, katerege energija je $W_C = e^2/2C = e^2/8\pi\varepsilon_0 R$.

Električna poljska jakost v oddaljenosti r (r>R) od središča krogle je enaka $E = e/4\pi\varepsilon_0 r^2$, gostota energije pa $w_e = e^2/32\pi^2\varepsilon_0 r^4$. Energija električnega polja je

$$W_e = \int w_e dV = \int_R^\infty \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Vidimo, da se energija električnega polja zares ujema z energijo kondenzatorja.

Med ploščama kondenzatorja deluje šibka privlačna sila. Najlaže jo izračunamo kot produkt električne poljske jakosti, ki jo na mestu prve plošče povzroča druga plošča ($E = e/2\varepsilon_0 S$) in naboja e na prvi plošči:
$F = eE = e^2/2\varepsilon_0 S = \varepsilon_0 SU^2/2d^2$.

V kondenzatorskem mikrofonu je ena elektroda fiksna kovinska plošča, druga elektroda, pa je prožna prevodna opna, ki se zaradi spremembe tlaka deformira. Pri tem se spremeni kapaciteta kondenzatorja in pri stalni napetosti med elektrodama tudi naboj na elektrodah. Električni tok na plošči kondenzatorja je torej povezan z nihanjem tlaka pri zvoku. Ploščati kondenzator lahko uporabimo tudi za merjenje majhnih premikov, pri katerih se spremeni razdalja med ploščama.

DIELEKTRIKI

Nabijmo ploščat kondenzator na napetost U in vir odključimo. Nato porinimo med plošči kondenzatorja stekleno ploščo. Napetost med ploščama kondenzatorja pade na vrednost U'. Ko vzamemo stekleno ploščo ven, napetost med ploščama kondenzatorja zraste na začetno vrednost U. Podoben pojav opazimo tudi, ko namesto stekla uporabimo druge izolatorje. Označimo faktor za katerega pade napetost z ε, $U' = U/\varepsilon$. V prvem približku je ε neodvisen od U, odvisen pa je od snovi. . Faktor ε imenujemo dielektričnost, snovi o katerih govorimo pa dielektriki.

Padec napetosti je povezan z zmanjšanjem električne poljske jakosti med ploščama kondenzatorja. Enako kot napetost se tudi električna poljska jakost zmanjša za faktor ε. Električna poljska jakost med ploščama kondenzatorjev je sestavljena iz

- zunanje električne poljske jakosti E_z, $E_z = e/\varepsilon_0 S$, ki jo povzročajo naboji na ploščah kondenzatorja in
- nasproti usmerjene notranje električne poljske jakosti E_n, ki jo povzroči snov (izolator) v električnem polju.

Velja torej

$E = E_z/\varepsilon = E_z - E_n$.

Notranja električna poljska jakost E_n je enaka

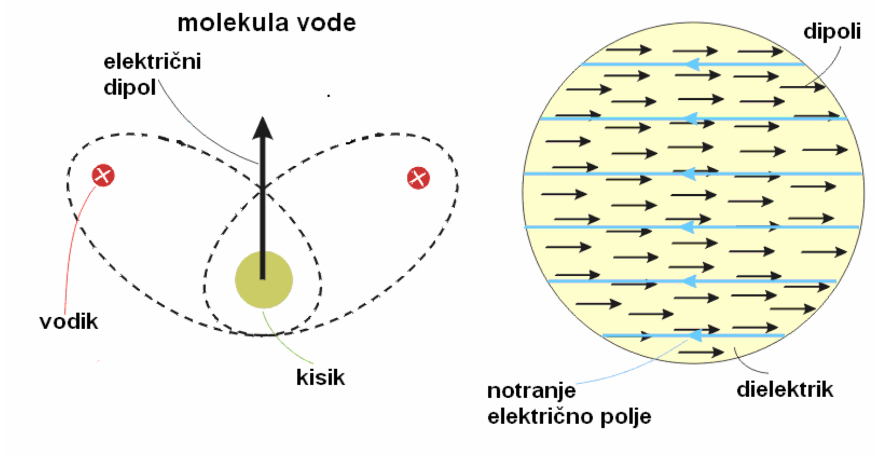
$$E_n = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_z = (\varepsilon - 1)E.$$

Notranja električna poljska jakost je sorazmerna zunanji.

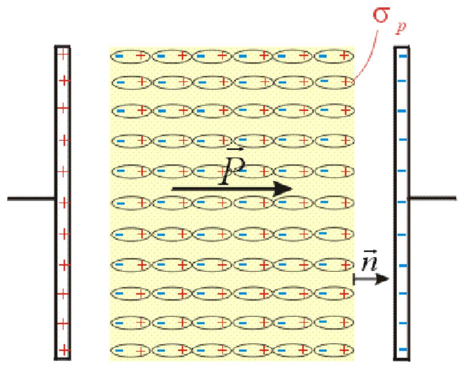
Za nadaljnje razumevanje pojava je potrebna mikroskopska slika. Snov sestoji iz električno nabitih gradnikov. Atom sestoji iz pozitivnega jedra in negativnega elektronskega oblaka. Podobno je z molekulami. Gradniki snovi niso na fiksnih mestih. Pod vplivom sil se lahko premaknejo. V prevodnikih imamo proste nosilce naboja, ki se lahko gibljejo po celem prevodniku. V izolatorjih prostih nosilcev naboja ni. Možni so samo majhni lokalni premiki. V električnem polju deluje sila na pozitivne delce v nasprotni smeri kot sila na negativne delce. Zato se v električnem polju snov polarizira. Inducirajo se električni dipoli. Električni dipolni moment induciranega dipola je sorazmeren zunanji električni poljski jakosti.

Če so v snovi že prisotni električni dipoli, kot na primer pri polarnih molekulah, se ti izven električnega polja neurejeni. V električnem polju se poskušajo urediti vzdolž zunanjega električnega polja. Ker je energija termičnega gibanja kT običajno dosti višja od energije $2p_eE$, ki je potrebna za zasuk električnega dipola v električnem polju, je urejenost dipolov le delna. Povprečna projekcija električnega dipola na smer zunanjega električnega polja je dosti manjša od velikosti električnega dipolnega momenta. Sorazmerna je zunanji električni poljski jakosti. V teh snoveh pod vplivom električnega polja nastanejo tudi inducirani dipoli.

Električni dipoli povzročajo v svoji okolici električno polje, katerega smer je nasprotna smeri ureditve dipolov. To električno polje smo prej imenovali notranje električno polje E_n.



Notranje električno polje lahko opišemo s pomočjo površinskega vezanega naboja e_p s površinsko gostoto σ_p, $\sigma_p = e_p/S$



Mislimo si, da se električno polje pozitivnih in negativnih nabojev znotraj dielektrika med sabo kompenzira. Ostane samo električno polje naboja na mejnih površinah, ki ga imenujemo površinski vezani naboj. V bližini pozitivne plošče kondenzatorja je negativni površinski vezani naboj $-e_p$, v bližini negativne plošče pa pozitivni vezan naboj e_p.
Notranje električno polje E_n je enako

$E_n = e_p/\varepsilon_0 S$,

površinska gostota vezanega naboja σ_p pa je enaka

$\sigma_p = e_p/S = \varepsilon_0((\varepsilon-1)/\varepsilon)E_z = \varepsilon_0(\varepsilon-1)E$.

Namesto opisa s površinskimi naboji uporabimo za opis električno polariziranih snovi električno polarizacijo $\vec{P}$. Električna polarizacija je makroskopski električni dipolni moment snovi $\vec{P}_e$ deljen s prostornino

$\vec{P} = \vec{P}_e / V$.

Enota za električno polarizacijo je As/m^2. V mikroskopski sliki, kjer je n število mikroskopskih električnih dipolov N deljeno s prostornino, $n = N/V$, in $\vec{p}_e$ električni dipolni moment mikroskopskega dipola, je polarizacija

$\vec{P} = N\vec{p}_e / V = n\vec{p}_e$.

Polarizacijo lahko povežemo s površinskimi naboji. Naj bo električni naboj mikroskopskega dipola e, razdalja med nabojema pa d. Debelina dielektrika naj bo l. Razmerje e_p/e predstavlja število dipolov N_1 v pravokotni ravnini. Razmerje l/d

predstavlja število električnih dipolov N_2 v vzdolžni smeri. Število električnih dipolov v dielektriku N je enako $N = N_1N_2$, makroskopski električni dipolni moment dielektrika pa $P_e = Np_e = N_1N_2ed = e_pl$.
Električna polarizacija P je enaka
$P = P_e/V = e_pl/lS = \sigma_p=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E$.
Notranja električna poljska jakost E_n ima nasprotno smer kot polarizacija. Enaka je
$E_n = \sigma_p/\varepsilon_0 = P/\varepsilon_0$.
Električna poljska jakost med ploščama kondenzatorja je enaka
$E = E_z - E_n = (e/\varepsilon_0S) - P/\varepsilon_0$.
Iz te zveze izračunajmo površinsko gostoto naboja e/S:
$e/S = \varepsilon_0E + P$.

Gaussov zakon v obliki $\oint \varepsilon_0\vec{E}d\vec{S} = e$ ne da več pravega naboja ampak razliko $e-e_p$. Če hočemo, da bo še vedno veljal ga moramo spremeniti. Na našem preprostem primeru z dielektrikom napolnjenega kondenzatorja vidimo, da bo veljal, če ga zapišemo v obliki
$\oint(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})d\vec{S} = \oint\vec{D}d\vec{S} = e.$
V dielektrikih definiramo gostoto električnega polja kot
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$

Električna polarizacija v dielektrikih je enaka
$\vec{P} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}.$
Konstanto χ, $\chi=\varepsilon-1$, imenujemo električna susceptibilnost.

Mimogrede omenimo, da velja zveza $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ le v izotropnih snoveh. V anizotropnih snoveh se v splošnem smer gostote električnega polja ne ujema s smerjo električne poljske jakosti, povezuje pa ju tenzor dielektričnosti. Tu bomo obravnavali le izotropne snovi.

V elektrotehniki imenujejo dielektičnost relativna dielektričnost in jo označijo z ε_r. Izraz dielektričnost in oznako ε uporabljajo za produkt $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$.

V dielektriku se spremeni električno polje okrog točkastega naboja. Zaradi električnih dipolov, ki so usmerjeni v smeri električnih silnic, električna poljska jakost v okolici dipola pade in sicer je enaka

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Spremeni se tudi gostota energije električnega polja. V dielektriku je enaka

$$w_e = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}.$$

Oglejmo si še enkrat ploščati kondenzator. Pri stalnem naboju pade napetost med ploščama na vrednost U/ε. Pri stalni napetosti naraste naboj na ploščah na vrednost $e\varepsilon$. Kapaciteta se torej poveča in je enaka
$C = \varepsilon C_0 = \varepsilon\varepsilon_0S/d$.

Povečanje kapacitete za faktor ε velja tudi za druge oblike kondenzatorjev a le, če je prostor med elektrodama zapolnjen z dielektrikom. Če je prostor le delno zapolnjen, si tak kondenzator lahko predstavljamo kot dva zaporedno vezana ali dva vzporedno vezana kondenzatorja. Če sega dielektrik od ene do druge elektrode v delu kondenzatorja, sta to dva vzporedno vezana kondenzatorja. Če dielektrik ne sega od ene do druge elektrode, sta to dva zaporedno vezana kondenzatorja.

Dielektričnost in prebojno električno poljsko jakost nekaterih snovi podaja naslednja tabela.

dielektrik	**dielektričnost**	**Prebojna jakost električnega polja [kV/cm]**
vakuum	1	-
zrak (1 bar)	1.00059	30
zrak (100 bar)	1.0549	-
bakelit	4.4 do 5.4	450
celofan	3.3 do 3.9	400 do 900
steklo	7.6 do 8	300 do 400
sljuda	5.4	5700 do 8400
mylar®folija	3.2	11000
papir	3.0	300
parafin	2.1	-
pleksi steklo	2.8	1500
polietilen	2.3	1800
polistiren	2.6	700 to 1000
porcelan	5.1 do 5.9	60 do 150
guma	2.8	-
teflon	2.1	1500 do 3000
etilni alkohol	24	-
voda	76.5 do 80	-
$SrTiO_3$	310	-

Oglejmo si električno polje na meji dveh dielektrikov z dielektričnostima ε_1 in ε_2. Najprej vzemimo, da poteka meja vzporedno s silnicami. V tem primeru si lahko zamislimo zaključeno pot, katere polovica poteka po prvem dielektriku, polovica pa po drugem dielektriku, obakrat tik ob meji. Dolžina poti na vsaki strani meje je s. Ker velja

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = E_1 s - E_2 s = 0,$$

sta električni poljski jakosti v obeh dielektrikih enaki, $E_1 = E_2$, gostoti pa različni: $D_1/\varepsilon_1 = D_2/\varepsilon_2$.

V drugem skrajnem primeru naj bo meja med dielektrikoma pravokotna na silnice. Kot zaključeno ploskev vzemimo plosko škatlo z eno ploskvijo velikosti S v prvem sredstvu in drugo enako veliko ploskvijo v drugem sredstvu. Zdaj velja

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = D_1 S - D_2 S = 0,$$

če so na meji le vezani naboji. V tem primeru se ohranja gostota električnega polja,

$D_1 = D_2$, električni poljski jakosti pa sta različni: $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$.

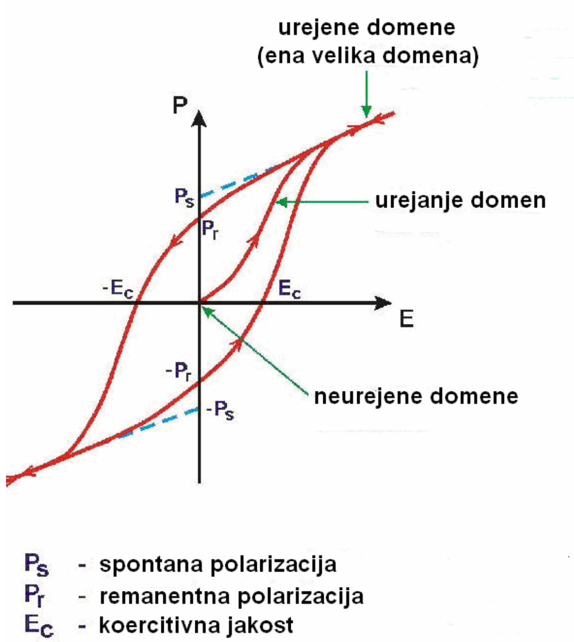
V splošnem primeru uporabimo izrek o električni napetosti po sklenjeni poti in Gaussov izrek pa dobimo

$E_{t1} = E_{t2}$

$D_{n1} = D_{n2}$.

Tangentna komponenta električne poljske jakosti E_t je enaka na obeh straneh meje. Prav tako je na obeh straneh enaka pravokotna komponenta gostote elektrčnega polja D_n.

Večje dielektričnosti kot dielektriki imajo feroelektriki in feroelektrične keramike. Izraz feroelektriki ni povezan z železom, ampak se uporablja zaradi podobnosti med feroelektriki in feromagnetnimi snovmi. V feroelektrikih zveza med električno polarizacijo in električno poljsko jakostjo ni tako preprosta kot v dielektrikih. V feroelektrikih izmerimo histerezno krivuljo.



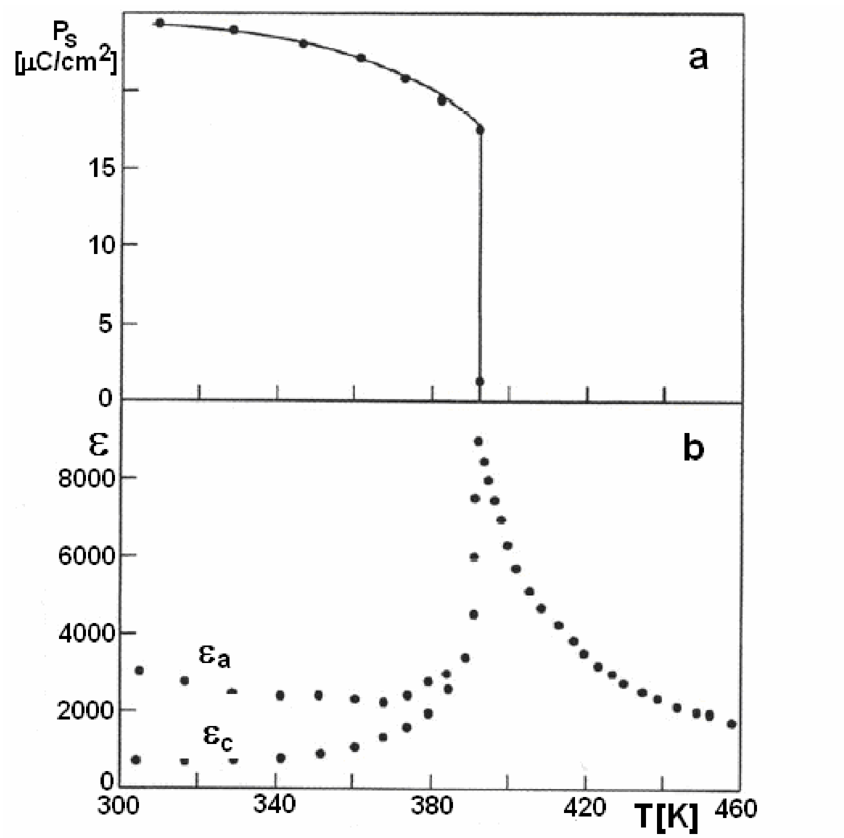
Razlika med dielektriki in feroelektriki je v tem, da sestoji feroelektrik iz področij mikrometrske velikosti –domen – , v katerih so orientirani vsi električni dipoli v isti smeri. Možnih orientacij domen je več. Med domenami so domenske stene. Električno polarizacijo znotraj domene imenujemo spontana polarizacija.

V električnem polju ne pride do zasukov električnih dipolov ampak do premika domenskih sten. Narastejo domene, v katerih imajo dipoli smer električne poljske jakosti. Hkrati se zmanjšajo domene, v katerih so dipoli nasprotno usmerjeni. Pri dovolj veliki električni poljski jakosti so vsi električni dipoli orientirani v njeni smeri. Ko električno poljsko jakost zmanjšamo na nič, makroskopska polarizacija ne pade na nič ampak na vrednost, ki jo imenujemo remanentna polarizacija. Polarizacija pade na nič šele, ko v nasprotni smeri uporabimo dovolj veliko električno poljsko jakost. Imenujemo jo koercitivna električna poljska jakost. Pojav je analogen namagnetenju železa.

Z naraščanjem temperature pride do faznega prehoda iz feroelektrične v paraelektrično fazo, v kateri ni spontane polarizacije. Naslednja tabela podaja temperature faznih prehodov in spontano polarizacijo v nekaterih feroelektrikih

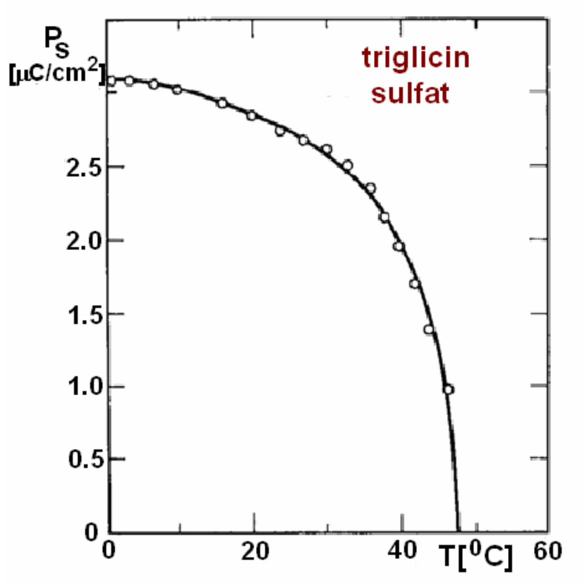
feroelektrik	**kemijska formula**	T_c**(K)**	P_s **(**$10^{-2}Cm^{-2}$**)**
barijev titanat	$BaTiO_3$	183,278,393	~20
svinčev titanat	$PbTiO_3$	763	~75
litijev niobat	$LiNbO_3$	1473	71
litijev tantalat	$LiTaO_3$	938	50
kalijev dihidrogen fosfat	KH_2PO_4	123	5
triglicin sulfat	$(NH_2CH_2COOH)_3.H_2SO_4$	322	2.8

Temperaturni potek spontane polarizacije in dielektrične konstante v barijevemu titanatu prikazuje naslednja slika. V feroelektrični fazi kristal ni izotropen, zato je dielektrična konstanta odvisna od smeri električne poljske jakosti.

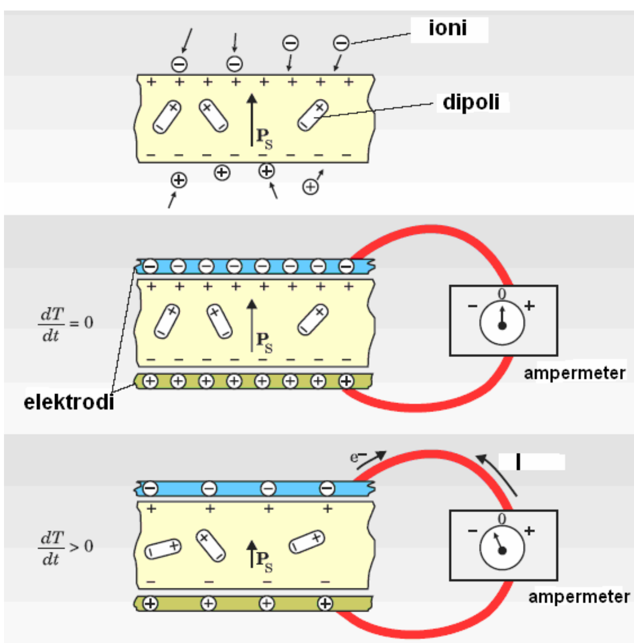


Temperaturna odvisnost spontane polarizacije (a) in dielektrične konstante (b) $BaTiO_3$

Feroelektriki so del širše skupine polarnih snovi, ki jih imenujemo piroelektriki. Za vse je značilna spontana polarizacija pod temperaturo faznega prehoda. V bližini temperature faznega prehoda se – kot prikazuje naslednja slika – spontana polarizacija močno spreminja.

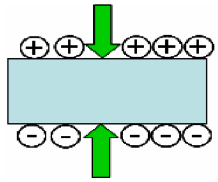


Spreminjanje spontane polarizacije uporabljamo za merjenje majhnih sprememb temperature in preko tega za detekcijo infrardečega sevanja. Merjenje shematsko prikazuje naslednja slika.



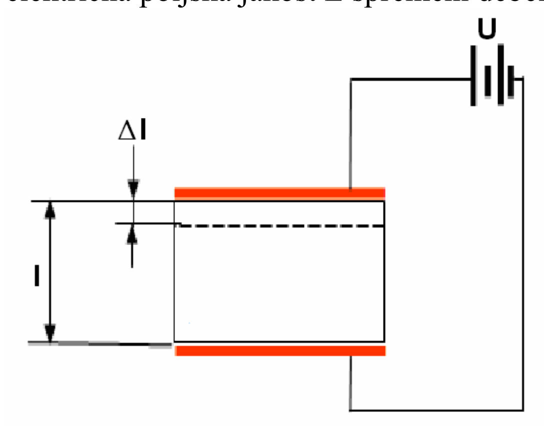
Makroskopska polarizacija piroelektrika je enaka spontani polarizaciji P_s.Vezan površinski električni naboj na mejah piroelektrika, katerega površinska gostota je enaka P_s, privlači nasprotni naboj. Če kovinski elektrodi na mejah piroelektrika povežemo, preide nekaj elektronov z ene elektrode na drugo tako, da je naboj na elektrodi enak vezanemu naboju. Pri spremembi temperature se spremeni P_s, s tem pa tudi naboj na elektrodah. Zato steče med elektrodama električni tok.

Širšo skupino snovi, ki zajema tudi piroelektrike, imenujemo piezoelektriki. V njih mehanska deformacija povzroči nastanek makroskopske polarizacije.



Električna polarizacija P je sorazmerna mehanski napetosti F/S in sicer velja
$P = d(F/S)$.
Piezoelektrična konstanta d je pri kremenu enaka 2.3 10^{-12} m/V, pri barijevemu titanatu približno 10^{-10} m/V, pri poliviniliden fluoridu pa približno 3.10^{-11} m/V.

Zunanja električna poljska jakost E spremeni debelino piezoelektrika.



V tem primeru velja, da je relativna sprememba debeline Δl/l sorazmerna električni poljski jakosti E:
$\Delta l/l = dE$.
Sorazmernostna konstanta je tudi v tem primeru piezoelektrična konstanta d.

Piezoelektrične kremenove kristale uporabljamo za stabilizacijo frekvence v električnih vezjih. S piezoelektriki lahko merimo majhne premike pa tudi povzročimo kontrolirane majhne premike na primer v tunelskem mikroskopu in mikroskopu na atomsko silo. Uporabljamo jih kot ultrazvočne pretvornike. V vsakdanjem življenju uporabljamo piezoelektrike v vžigalnikih in zvočnikih.

ELEKTRIČNI TOK

V elektrostatiki obravnavamo električne naboje v mirovanju. V tem primeru znotraj prevodnikov ni električnega polja. Ko med konca kovinskega vodnika priključimo vir napetosti se situacija spremeni. Elektroni se začno gibati v nasprotni smeri električne poljske jakosti. V elektrolitih in trdnih ionskih prevodnikih povzroči električno polje gibanje ionov: pozitivnih v smeri električne poljske jakosti, negativnih pa v nasprotni smeri. V ioniziranem plinu povzroči električno polje gibanje ionov in elektronov. V teh in številnih drugih primerih steče električni tok.

Električni tok je definiran kot pretočen električni naboj s časom

$$I = \frac{de}{dt}.$$

Tu je de električni naboj, ki v času dt steče skozi presek vodnika. Enota za električni tok je amper (A). Smer električnega toka je po dogovoru smer gibanja pozitivnih električnih nabojev. Elektroni se gibljejo v nasprotni smeri električnega toka.

V primeru, ko je električni tok nehomogen, je smiselno definirati gostoto električnega toka j,

$$j = \frac{dI}{dS},$$

z enoto A/m^2.

Ko se v nekem vozlišču električni tok združuje in cepi, je vsota tokov, ki pritekajo v vozlišče enaka vsoti tokov, ki odtekajo iz vozlišča. Ta izrek je posledica zakona o ohranitvi naboja, imenuje pa se prvi Kirchoffov izrek.

Oglejmo si podrobneje električni tok po kovinah. Ko med konca kovinskega vodnika priključimo vir stalne napetosti, steče po vodniku stalen, od časa neodvisen električni tok. Ko napetost dvakrat povečamo tudi tok dvakrat zraste. Ko napetost obrnemo, se smer toka obrne, velikost pa ostane enaka.

V mikroskopski sliki se po vodniku gibljejo električni naboji. V kovinah so to elektroni, v polprevodnikih elektroni in vrzeli, v ionskih prevodnikih pa ioni. Ker so v splošnem gibljivi nosilci naboja pozitivno ali negativno nabiti, bomo predpostavili, da je v vodniku število gibljivih nosilcev naboja na enoto prostornine enako n, njihov naboj e, hitrost pa v. Presek vodnika naj bo S. V času dt steče skozi presek vodnika električni naboj $de = enSvdt$, čemur ustreza električni tok $I = de/dt = enSv$. V resnici gibanje nosilcev naboja v smeri toka (pozitivni) ali nasprotni smeri (negativni) ni edino gibanje teh delcev zato je hitrost delcev, ki nastopa v izrazu za tok I pravzaprav povprečna hitrost $\langle v \rangle$ v smeri toka ali nasprotni smeri. Velja torej

$$I = ne \langle v \rangle S.$$

Gostota električnega toka je enaka

$$j = I/S = ne\langle v \rangle.$$

Zadnjo enačbo lahko zapišemo tudi v vektorski obliki

$$\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle.$$

Enačba velja za pozitivne in negativne gibljive nosilce naboja.

Vrnimo se k kovinam. Stalna napatost U med koncema vodnika pomeni, da je vzdolž vodnika stalna električna poljska jakost $E = U/l$. Z l smo označili dolžino vodnika. Predpostavili smo, da je presek vodnika stalen. Ker se električni tok s časom ne spreminja, je povprečna hitrost gibljivih nosilcev naboja stalna. Na nosilce naboja torej deluje v nasprotni smeri gibanja upor, ki je po velikosti enak sili eE. Ko podvojimo napetost U, se podvoji tudi sila. Meritev pokaže, da se pri tem podvoji električni tok, ta pa je sorazmeren povprečni hitrosti, ki se pri tem podvoji. Velja torej »linearni zakon upora«, pri katerem je povprečna hitrost sorazmerna sili. Zvezo med njima zapišemo tako:

$$\langle \vec{v} \rangle = \mu \vec{F}.$$

Sorazmernostno konstanto μ imenujemo gibljivost nosilca naboja (elektrona).

Tok I po vodniku je enak

$$I = ne\langle v \rangle S = ne\mu FS = ne^2\mu ES = ne^2\mu US/l.$$

Zvezo med električnim tokom in napetostjo zapišemo v obliki

$$I = U/R$$

in jo imenujemo Ohmov zakon. Vpeljali smo upor R, ki je enak

$$R = \frac{1}{ne^2\mu}\frac{l}{S} = \varsigma\frac{l}{S}.$$

Upor vodnika je torej sorazmeren dolžini in obratno sorazmeren preseku. Sorazmeren je tudi specifičnemu uporu ζ, ki je v mikroskopski sliki enak

$$\varsigma = \frac{1}{ne^2\mu}.$$

Enota za upor je V/A = Ω (ohm), za specifični upor pa Ωm. Namesto specifičnega upora včasih uporabljamo specifično prevodnost σ,

$\sigma = 1/\zeta = ne^2\mu$.

Z njo zapišemo enačbo za gostoto električnega toka

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Gibljivost μ je povezana s trki gibljivih nosilcev naboja, ki so posledica napak v kristalni strukturi in nihanj gradnikov snovi. Z naraščajočo temperaturo gibljivost pada, specifični upor pa raste. Če sprememba temperature ni prevelika, je relativna sprememba specifičnega upora $\Delta\zeta/\zeta$ sorazmerna spremembi temperature ΔT:

$\Delta\zeta/\zeta = \alpha\Delta T$.

Z α smo označili temperaturni koeficient specifičnega upora z enoto K^{-1}.

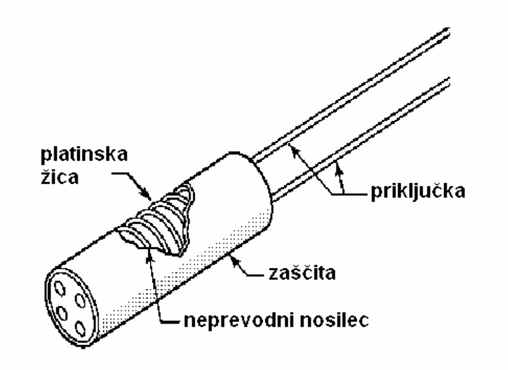
Nekaj značilnih vrednosti specifičnega upora pri 20 ^{0}C in temperaturnega koeficienta specifičnega upora podaja naslednja tabela.

snov	**ζ [Ωm]**	**α [10^{-3} K^{-1}]**
srebro	1,59 10^{-8}	4.1
baker	1,72 10^{-8}	4.3
zlato	2.44 10^{-8}	3.4
aluminij	2.82 10^{-8}	4.4
volfram	5.60 10^{-8}	4.5
platina	10.6 10^{-8}	3.9
manganin (0.84 Cu, 0.12 Mn, 0.04 Ni)	48.2 10^{-8}	0.002
grafit	3.5 10^{-5}	-0.5
silicij	6.4 10^{2}	-70
steklo	10^{10} - 10^{14}	
kremen	5 10^{16}	

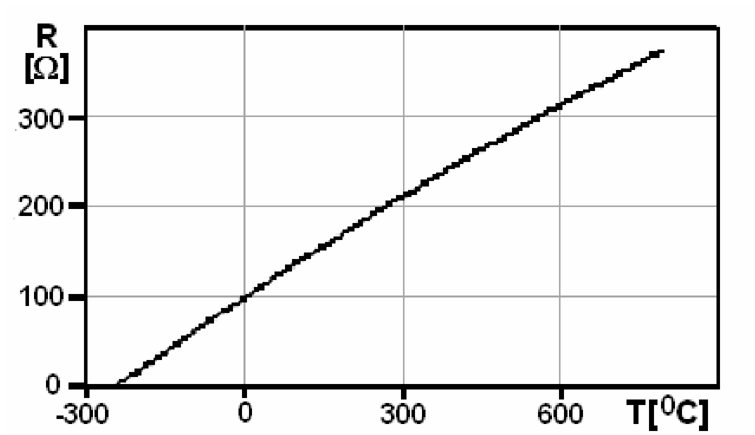
Temperaturni koeficient specifičnega upora silicija je velik in negativen. To je posledica naraščanja števila prevodniških elektronov z naraščajočo temperaturo.

Pri nizkih temperaturah preidejo nekatere snovi v superprevodno fazo, v kateri je specifični upor enak nič.

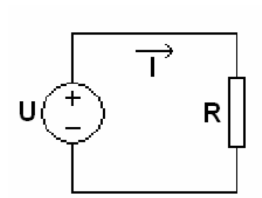
Spreminjanje upora s temperaturo uporabljamo za merjenje temperature. Za to uporabljamo polprevodniške upornike (termistorje), pri natančnih merjenjih pa platinske upornike. Konstrukcijo platinskega upornika kaže naslednja slika.



Na naslednji sliki je narisana temperaturna odvisnost upora platinskega upornika, ki ima pri 0 ^{0}C upor 100 Ω.



Upornik je elektronski element z določenim uporom R. Ko ga priključimo na vir napetosti steče skozenj tok I = U/R. Tu je U napetost vira. Zaenkrat bomo predpostavili, da vir nima notranjega upora. Električni tok teče od pozitivnega pola vira napetosti proti negativnemu



Predpostavili smo, da je upor žic majhen. V tem primeru se električni potencial po žicah zanemarljivo spreminja.

Pri prehodu skozi upornik pade elektronu električna potencialna energija za e_0U, njegova kinetična energija pa se ne spremeni. Energijo e_0U prejme upornik ob trkih. Pri tem se poveča notranja energija upornika. Makroskopsko gledano steče skozi upornik v času dt električni naboj $de = Idt$. Sprememba električne potencialne energije tega naboja dW_{ep} je enaka $dW_{ep} = Ude = UIdt$. Tolikšno je tudi delo dA, ki ga opravi vir napetosti in s tem poveča notranjo energijo upornika. Moč, ki se troši na uporniku je torej enaka
$P = dA/dt = UI$.
Ta formula velja splošno, ne samo za upornik. Pri uporniku lahko upoštevamo še Ohmov zakon pa dobimo

$P = UI = U^2/R = I^2R$.
Enačbo prepišimo drugače. Upoštevajmo, da je $I = jS = \sigma ES$ in $R = \zeta l/S = \sigma^{-1} l/S$ pa dobimo
$P = \sigma E^2 V = \zeta j^2 V$.
V prevodniku s prevodnostjo σ, v katerem je električno polje z jakostjo E, se troši električna moč na enoto prostornine $P/V = \sigma E^2 = \zeta j^2$.

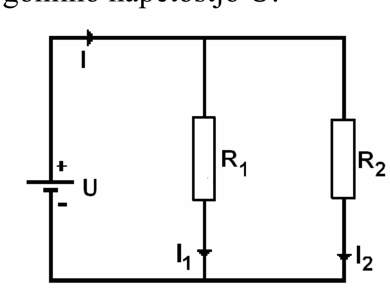
V praksi so uporniki narejeni tako, da prenesejo določene moči: 0.125 W, 0.25W, 0.5W... Z naraščanjem napetosti med koncema upornika ali toka skozi upornik kvadratično narašča moč. Pri žarnici je moč tolikšna, da je v ravnovesju, ko je električna moč enaka izsevanemu energijskemu toku, temperatura nitke okrog 2500 ^{0}C.

Oglejmo si še enkrat vezje z upornikom. Vezje predstavlja zaključen električni krog. Napetost na uporniku IR imenujemo padec napetosti, napetost vira U pa gonilno ali generatorsko napetost. Gonilna napetost vira je enaka padcu napetosti na uporniku. Podobno zvezo lahko zapišemo za vsak zaključen električni krog.
V zaključenem krogu je vsota padcev napetosti enaka vsoti gonilnih napetosti.
Zapisali smo drugi Kirchoffov izrek. Drugi Kirchoffov izrek lahko zapišemo tudi v obliki:
Vsota napetosti v zaključenem krogu je enaka nič.
Kot vemo je napetost sprememba potenciala in vsota sprememb potenciala je nič, ko se vrnemo v začetno točko. V tem primeru je napetost na uporniku –IR.

Prvi Kirchoffov izrek smo srečali pri definiciji električnega toka. Kirchoffova izreka uporabljamo pri računanju napetosti in tokov v električnih vezjih.

Pri uporabi Kirchoffovih izrekov moramo upoštevati naslednje. Ker pogosto ne vemo, v kateri smeri teče tok, si smeri tokov poljubno izberemo. Če smer napačno izberemo, dobimo negativen tok. Za vsak zaključen krog si izberemo smer poti, po kateri se vrnemo v začetno točko. Če gre naša pot skozi upornik v smeri toka (kot smo jo izbrali!) bo padec napetosti na njem pozitiven (IR), če gre v nasprotni smeri pa negativen (-IR). Če gre pot skozi generator od negativnega pola proti pozitivnemu bo gonilna napetost pozitivna, v nasprotnem primeru pa negativna.

Za ilustracijo obravnavajmo dva vzporedno vezana upornika z uporoma R_1 in R_2, ki ju priključimo na vir z gonilno napetostjo U.



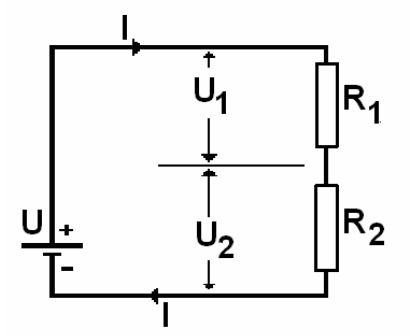
V vezju sta dve vozlišči. V prvem se tok I, ki teče iz vira napetosti cepi v dva tokova I_1 in I_2. Tok I_1 teče skozi upornik z uporom R_1, tok I_2 pa skozi upornik z uporom R_2. V drugem vozlišču se tokova I_1 in I_2 združita v tok I. Prvi Kirchoffov izrek pove, da je
$I_1 + I_2 = I$.

V vezju so trije zaključeni krogi. Poglejmo najprej krog, v katerem sta vir in upornik R_1. Če naredimo krog v smeri urinega kazalca je padec napetosti I_1R_1, gonilna napetost pa je U. Velja torej

$I_1R_1 = U.$
V isti smeri potujmo po krogu, v katerem sta vir in upornik R_2 pa dobimo
$I_2R_2 = U$
Enačb je dovolj. Kljub temu si oglejmo krog, v katerem sta upornika R_1 in R_2. V tem krogu ni virov. Če potujemo v smeri urinega kazalca, je vsota padcev napetosti I_2R_2-I_1R_1 in ta vsota je enaka nič. Tokovi so torej
$I_1 = U/R_1,\ I_2 = U/R_2,\ I = I_1 + I_2 = U(1/R_1+1/R_2).$

Pri tem se moramo zavedati, da smo zanemarili notranji upor vira in upor žic.

Oglejmo si še zaporedno vezavo dveh upornikov.



V vezju ni vozlišč. Skozi vse elemente teče enak tok I. Tudi zaključen krog je en sam. Drugi Kirchoffov pove:
$IR_1 + IR_2 = U.$
Tok, ki teče po vezju je torej
$I = U/(R_1 + R_2),$
padca napetosti pa sta
$U_1 = UR_1/(R_1 + R_2) \quad U_2 = UR_2/(R_1 + R_2).$
Ko računamo tok, se pri zaporedni vezavi seštevajo upori, pri vzporedni vezavi pa obratne vrednosti uporov.

Za zaključek naredimo naslednji zgled. Vzemimo vir z gonilno napetostjo U in notranjim uporom R_n. Vprašajmo se, kolikšen mora biti upor upornika, ki ga priključimo na ta vir, da se bo na njem trošila največja moč. Izračunajmo tudi največjo moč na uporniku.

Vezje si lahko predstavljamo kot zaporedno vezavo upornikov z uporoma R in R_n, ki je priključena na »idealni« vir z gonilno napetostjo U.

Uporabimo prej dobljene rezultate. Padec napetosti U_R na uporniku je enak
$U_R = UR/(R + R_n),$
moč ki se troši na njem pa
$P = U_R^2/R = U^2R/(R + R_n)^2.$
Moč je največja, ko je
$R = R_n$
in sicer je enaka
$P_{max} = U^2/4R_n.$
Enaka moč se troši tudi na generatorju, zato se ta (n. pr. baterija) greje.

(*) Omenili smo že, da sta v kovinah toplotna in elekltrična prevodnost povezani. Velja zveza $\lambda/\sigma T$ = konst. Do te zveze lahko pridemo v modelu elektronskega plina. Domnevamo namreč, da je prispevek prevodniških elektronov k toplotni prevodnosti

kovin dominanten. V kinetični energiji plinov smo ocenili toplotno prevodnost plina in sicer je enaka
$\lambda = nm\langle l\rangle\langle v\rangle c_v/3.$
V našem primeru je m masa, $\langle l\rangle$ povprečna prosta pot in $\langle v\rangle$ povprečna hitrost prevodniškega elektrona. Nadalje je n število prevodniških elektronov v enoti prostornine, c_v pa specifična toplota elektronskega plina.

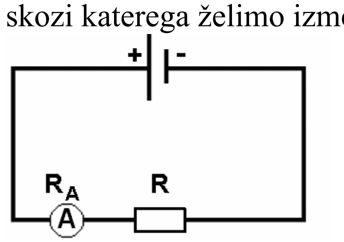
Ocenimo lahko tudi električno prevodnost elektronskega plina. Povprečno hitrost elektronov v nasprotni smeri električne poljske jakosti ocenimo kot spremembo hitrosti v tej smeri v času med dvema trkoma. Po velikosti je sprememba hitrosti enaka
$\Delta v = at = (e_0E/m)(\langle l\rangle/\langle v\rangle).$
Gostota električnega toka je približno enaka
$j \approx ne_0\Delta v = (ne_0^2\langle l\rangle/m\langle v\rangle)E = \sigma E.$
V modelu elektronskega plina je električna prevodnost enaka
$\sigma = ne_0^2\langle l\rangle/m\langle v\rangle.$
Razmerje toplotne in električne prevodnosti je enako
$\lambda/\sigma = m^2\langle v\rangle^2 c_v/e_0^2.$
V tem izrazu ocenimo
$m\langle v\rangle^2 \approx kT$ in
$mc_v \approx m(R/M) = R/N_A = k$
pa dobimo
$\lambda/\sigma T \approx (k/e_0)^2.$
Vidimo, da je razmerje $\lambda/\sigma T$ zares konstantno. Za številski faktor se pri oceni nismo menili, kljub temu pa pričakujemo, da je električna ali toplotna prevodnost, ki jo izračunamo po tej enačbi pravega reda velikosti. Ocenimo, kolikšna je toplotna prevodnost dobrih električnih prevodnikov s $\sigma = 5\ 10^7\ (\Omega m)^{-1}$ pri $T = 300\ K$. Po gornji enačbi dobimo $\lambda \approx 100\ W/mK$. Toplotna prevodnost dobrih električnih prevodnikov je zares nekaj sto W/mK.

MERJENJE I, U IN R, RC VEZJA

Ampermeter

Napravo za merjenje električnega toka imenujemo ampermeter. Tu se ne bomo zanimali za zgradbo naprave. Bolj nas bodo zanimale lastnosti in način uporabe.

Tok, ki ga želimo izmeriti, mora teči skozi ampermeter. Zato ga zvežemo zaporedno z elementom, skozi katerega želimo izmeriti tok.

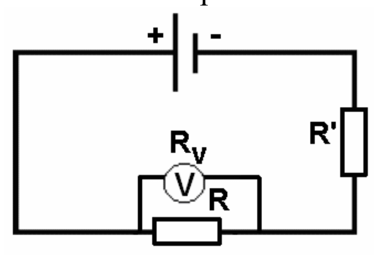


Ker običajno po meritvi ampermeter odključimo, se pri tem tok po vezju lahko le zanemarljivo spremeni. V vezju na sliki bo to res, če je upor ampermetra R_A mnogo manjši od upora zaporednega upornika.

Vsak ampermeter je narejen za merjenje tokov v določenem območju, recimo do 100 mA. Če želimo s tem ampermetrom meriti večje tokove, recimo do 1 A, moramo razliko tokov, ki je v našem primeru 900 mA, »speljati« mimo ampermetra. Vzporedno z ampermetrom moramo vezati upornik (ponavadi kos žice), katerega upor je v našem primeru enak $R_A/9$.

Voltmeter

Voltmeter je naprava za merjenje električne napetosti. Vežemo ga vzporedno z elementom, na katerem želimo izmeriti napetost.



Razmere v vezju se zanemarljivo spremene, ko ga odključimo, če je njegov upor R_V velik v primerjavi z uporom R.

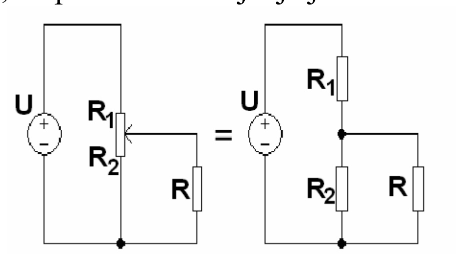
Voltmeter dobimo, če zaporedno z ampermetrom vežemo upornik z uporom R_V. V primeru, da z ampermetrom lahko merimo tokove do vrednosti I_0, lahko s tako narejenim voltmetrom merimo napetosti do vrednosti I_0R_V. Večji kot je R_V, večje napetosti lahko merimo.

Ohmmeter

Upor lahko merimo na več načinov. Lahko na primer izmerimo napetost na uporniku in tok skozenj ter izračunamo upor. V univerzalnem instrumentu, s katerim merimo električni tok, napetost in upor je en sam instrument – ampermeter. Neznani upornik z uporom R, notranji upornik z uporom R_n in ampermeter zaporedno zvežemo in priključimo na vir napetosti z gonilno napetostjo U. Ampermeter pokaže tok
$I = U/(R + R_n)$.
Večjemu uporu R ustreza manjši tok. Skala za merjenje upora je obratna od skale za merjenje toka in ni linearna. S takim merilnikom meritve niso posebej natančne, a pogosto to ni potrebno, saj tudi upori komercialnih upornikov niso natančni.

Potenciometer

Upor lahko zvezno spreminjamo s potenciometrom. Na ta način lahko natančno nastavimo željeni upor. Potenciometri se uporabljajo tudi za zvezno spreminjanje električne napetosti, na primer nastavljanje jakosti zvoka pri radiu.

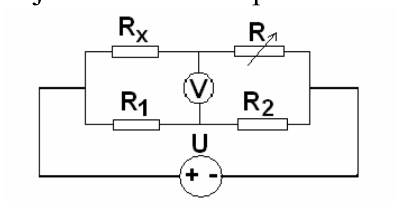


Potenciometer je upornik s tremi priključki: dvema fiksnima in drsnim. Pri premikanju drsnega priključka se spreminjata upora R_1 in R_2, njuna vsota $R_1 + R_2 = R_p$ pa je konstantna. Z vezavo potenciometra na sliki lahko zvezno spreminjamo napetost na bremenu R_L med napetostjo vira in nič.

Wheatstonov most

Za natančno merjenje upora uporabljamo Wheatstonov most. Še pogosteje ga uporabljamo za merjenje majhnih sprememb upora, ki so ponavadi povezane s spremembo drugih količin, na primer temperature, tlaka, mehanske deformacije...

Wheatstonov most je vezava štirih upornikov.



Na dva priključka priključimo vir napetosti, na druga dva pa merilni instrument. Ta je lahko občutljiv voltmeter ali občutljiv ampermeter. Merilni instrument kaže ničlo, ko velja

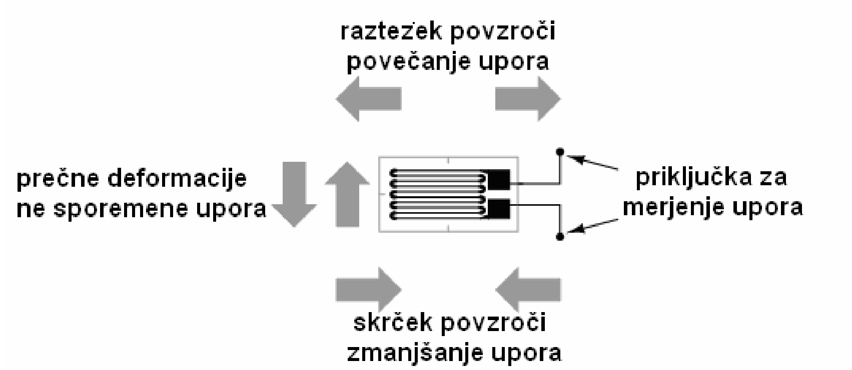
$R_x/R = R_1/R_2$.

Upor Rx je tedaj enak

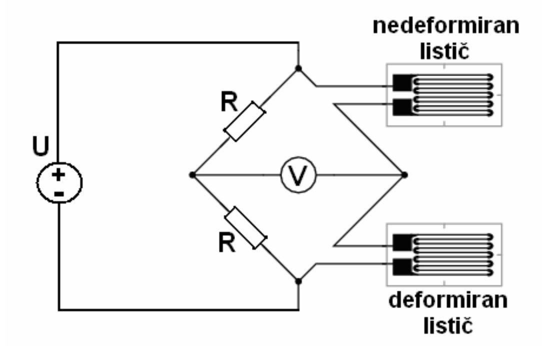
$R_x = (R_1/R_2)R$.

V Wheatstonovem mostu, ki ga uporabljamo za merjenje upora, je razmerje R_1/R_2 enako potenci števila 10 (0.01, 0.1, 1, 10, 100), spremenljivi upornik R pa je sestavljen iz zaporedno vezanih uporovnih dekad, katerih upor spreminjamo z vrtenjem preklopnikov. Orientacija gumba za vrtenje preklopnika pove, kolikšen je upor dekade.

Kot že omenjeno uporabljamo Wheatstonov most tudi za merjenje majhnih sprememb upora. Wheatstonov most je v ravnovesju in , ko se upor spremeni, pokaže voltmeter napetost, ki je sorazmerna spremembi upora. Kot primer si oglejmo uporabo merilnih lističev za merjenje raztezkov.



Listič prilepimo na telo, katerega raztezek ali skrček merimo. Pri deformaciji telesa se podaljša ali skrajša tanka kovinska plast na lističu. Zaradi tega se ji spremeni upor. Ker je sprememba upora majhna, jo merimo z Wheatstonovim mostom.

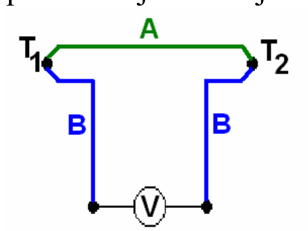


V eni veji vezja na sliki sta dva lističa. Eden se deformira, drugi pa ne. Zaradi spremembe upora deformiranega lističa most ni v ravnovesju in voltmeter kaže napetost, ki je sorazmerna deformaciji. Če poskrbimo, da imata lističa enako temperaturo, se znebimo napake zaradi temperaturne odvisnosti upora lističa.

Mimogrede omenimo, da podobne mostove s kondenzatorji ali tuljavami uporabljamo tudi za merjenje kapacitete in induktivnosti, oziroma njunuh sprememb.

Termoelement

Termoelement je preprosto vezje sestavljeno iz dveh prevodnikov.



Če sta temperaturi spojev različni, pokaže voltmeter, ki ga vežemo med priključka, napetost, ki je približno sorazmerna temperaturni razliki.

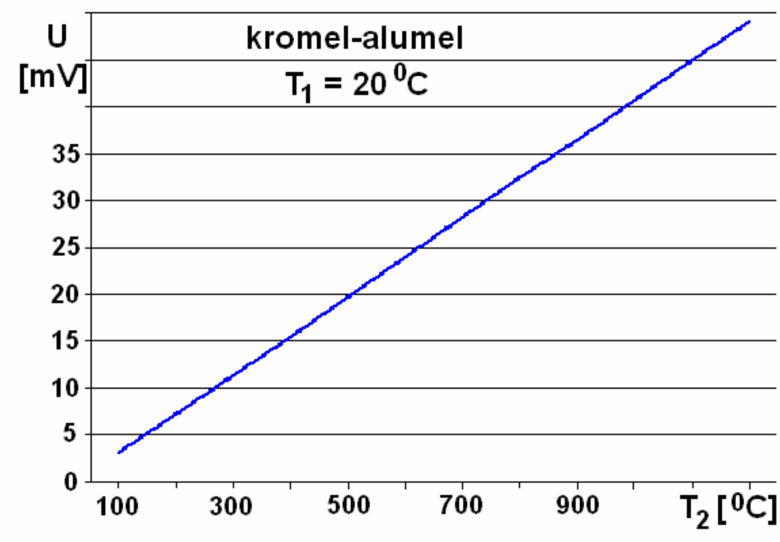
$U = k(T_1 - T_2)$.

Termoelemente uporabljamo za merjenje temperature. En spoj termoelementa ima stalno temperaturo, n. pr. $T_1 = 0\ ^0$C, drug spoj pa je na mestu, kjer merimo temperaturo (T_2). Izmerjena napetost pove, kolikšna je temperatura na mestu drugega spoja.

Nekaj kombinacij prevodnikov, ki jih uporabljamo za merjenje temperature podaja naslednja tabela.

prevodnika	**temperturno področje [^{0}C]**	**občutljivost pri 25 ^{0}C [μV/K]**
baker - konstantan	-270 - 400	41
kromel – konstantan (Cu-Ni)	-270 - 1000	61
Ni-Cr-Si – Ni-Si	-270 - 1200	39
železo – konstantan	-210 - 1200	52
kromel(Ni-Cr) – alumel (Ni-Al)	-270 - 1350	41
platina – Pt-Rh(10% ali 13%)	-50 - 1768	6
Pt-30%Rh – Pt-6%Rh	0 -1800	6

Na sliki je narisana napetost, ki jo izmerimo s termoelementom kromel-alumel v odvisnosti od temperature enega spoja (T_2). Temperatura drugega spoja je $T_1 = 20\ ^0C$.

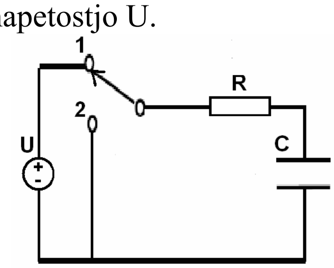


Pojav, ki ga izkoriščamo pri termoelementih se imenuje Seebeckov pojav. Seebeck je opazil tok v sklenjenem krogu žic iz bakra in bizmuta, ko sta bili temperaturi spojev različni. Pojav temelji na kontaktni napetosti, ki nastane na spoju dveh prevodnikov. Ta napetost, ki sicer ni merljiva, je odvisna od temperature. S termoelementom izmerimo razliko kontaktnih napetosti pri temperaturah spojev.

Če namesto voltmetra vežemo v vezje generator električnega toka, se en spoj greje drugi pa hladi. Pojav imenujemo Peltierov pojav in ga izkoriščamo v Peltierovih hladilnikih.

Polnjenje in praznjenje kondenzatorja

Nenabit kondenzator s kapaciteto C priključimo preko upornika z uporom R na vir napetosti z gonilno napetostjo U.



Na plošče kondenzatorja začne teči tok in kondenzator se polni, dokler napetost na njem ne postane enaka napetosti vira. Najprej ocenimo čas polnjenja. Začetni tok je enak U/R. Izračunajmo, v kolikšnem času τ bi bil kondenzator poln, če bi vseskozi tekel tok U/R: $(U/R)\,\tau = CU$.

Čas τ je enak $\tau = RC$. V resnici bo kondenzator poln v nekaj značilnih časih τ.

Naredimo še račun. Po drugem Kirchoffovem izreku je vsota padcev napetosti $U_R + U_C = IR + e/C$ enaka napetosti vira U. Upoštevajmo še, da velja $I = de/dt$ pa lahko zapišemo enačbo za časovni potek padca napetosti na kondenzatorju

$$RC\frac{dU_C}{dt}+U_C=U.$$

Rešitev enačbe je

$$U_C=U\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

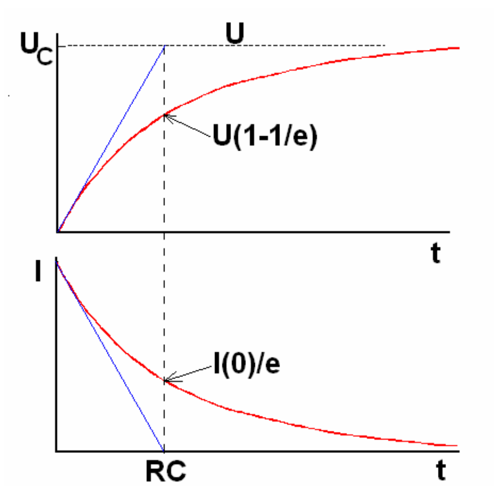
Napetost med ploščama kondenzatorja se eksponentno približuje napetosti vira z značilnim časom τ, τ=*RC*, ki je enak ocenjenemu značilnemu času. Padec napetosti na uporniku izračunamo iz zveze $U_R + U_C = U$:

$$U_R=U-U_C=Ue^{-\frac{t}{RC}}.$$

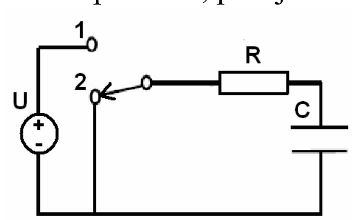
Tok izračunamo po Ohmovem zakonu

$$I=U_R/R=(U/R)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Naslednja slika kaže časovni potek napetosti med ploščama kondenzatorja in toka pri polnjenju kondenzatorja.



Ko kondenzator, nabit na napetost U, priključimo na upornik, se začne prazniti.



Začetni tok skozi upornik je U/R. S časom napetost na kondenzatorju pada, zato se tudi tok manjša. Čas praznjenja lahko ocenimo podobno, kot smo ocenili čas polnjenja. Vprašamo se, kdaj bi bil kondenzator prazen, če bi vseskozi tekel začetni tok. Dobimo enak čas, kot pri polnjenju: $\tau = RC$.

Pri računu moramo upoštevati, da igra kondenzator vlogo generatorja, zato je U_C=U_R, oziroma $e/C = IR$. Tok je sedaj enak $I = -de/dt$. Enačba za časovni potek napetosti na kondenzatorju je torej

$$RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

z rešitvijo

$$U_C = U_R = Ue^{-\frac{t}{RC}}, \qquad I = U_R / R = (U/R)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Pri polnjenju energija kondenzatorja narašča, pri praznjenju pa pada. Delo, ki ga prejme upornik pri praznjenju kondenzatorja je enako $CU^2/2$. Polnjenje ali praznjenje kondenzatorja uporabljajo v preprostih zakasnilnih vezjih.

Kot zgled si oglejmo naslednji primer. Kondenzator s kapaciteto C_1, ki je nabit na napetost U_0, preko upornika z uporom R priključimo na prazen kondenzator s kapaciteto C_2. Izračunajmo časovni potek napetosti in toka.

Po drugem Kirchoffovem izreku velja

$$\frac{e_1}{C_1} = IR + \frac{e_2}{C_2}.$$

Odvajajmo enačbo po času in upoštevajmo, da velja $I = de_2/dt = -de_1/dt$:

$$R\frac{dI}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)I = 0.$$

Začetna vrednost toka je $I(0) = U_0/R$. Časovni potek toka je torej

$$I = (U_0/R)e^{-\frac{t}{RC}} = (U_0/R)e^{-\frac{t}{\tau}},$$

pri čemer je $C = C_1C_2/(C_1+C_2)$ nadomestna kapaciteta zaporedno vezanih kondenzatorjev C_1 in C_2. Padec napetosti na uporniku U_R dobimo po Ohmovem zakonu $U_R = IR$.

Napetost med ploščama kondenzatorja C_2 je enaka

$$U_{C_2} = \frac{1}{C_2}\int_0^t Idt = \frac{C_1}{(C_1 + C_2)}U_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Po drugem Kirchoffovem izreku izračunamo napetost na kondenzatorju C_1:

$$U_{C_1} = \frac{C_1}{(C_1 + C_2)}U_o\left(1 + \frac{C_2}{C_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Ko se vzpostavi ravnovesje sta napetosti na obeh kondenzatorjih enaki in sicer sta neodvisno od upora R enaki $U_0C_1/(C_1+C_2)$. Do tega rezultata pridemo hitreje če upoštevamo, da se naboj C_1U_0 razporedi po obeh kondenzatorjih tako, da sta napetosti enaki: $e_1/C_1 = e_2/C_2$ in, da se naboj ohrani: $e_1+e_2 = C_1U_0$.

Upor R vpliva na čas, v katerem se vzpostavi ravnovesje. Z delom, ki ga prejme upornik, tudi pojasnimo spremembo energije kondenzatorjev. Ko se vzpostavi ravnovesje, je namreč skupna energija kondenzatorjev C_1 in C_2 manjša od energije kondenzatorja C_1 v začetku.

IZMENIČNA NAPETOST IN TOK

Pod izrazom izmenična napetost bomo razumeli električno napetost, ki sinusno niha:

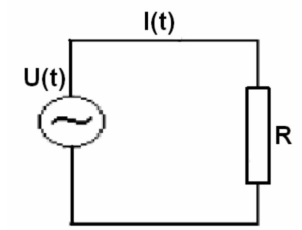
$U = U_0 sin(\omega t+\delta)$.

Tu je U_0 amplituda napetosti, ω krožna frekvenca ($\omega = 2\pi\nu = 2\pi/t_0$), δ pa faza. Faza je odvisna od tega, kdaj začnemo meriti čas. V praksi se uporabljajo tudi drugačne periodične napetosti, n. pr. pravokotne ali trikotne oblike, a vsako tako napetost se da zapisati kot Fourierovo vrsto s sinusi in kosinusi

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t),$$

zato zadošča, da obravnavamo samo najpreprostejši primer sinusne ali kosinusne napetosti.

Vzemimo najprej, da na vir izmenične napetosti z zanemarljivim notranjim uporom priključimo upornik z uporom R.



Napetost vira naj bo

$U = U_0 sin(\omega t)$

Če frekvenca vira ν ni previsoka, v vsakem trenutku velja Ohmov zakon. Tok skozi upornik je enak

$I = U/R = (U_0/R)sin(\omega t) = I_0 sin(\omega t)$.

Tok niha v fazi z napetostjo. Moč na uporniku je enaka

$P = U^2/R = U_0^2 sin^2(\omega t)/R$.

Moč niha s frekvenco 2ν med 0 in U_0^2/R. Pogosto nas nihanje moči ne zanima in ga niti ne opazimo, kot na primer pri žarnici. Tedaj nas bo zanimala povprečna moč $\overline{P}$,

$$\overline{P} = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} P dt .$$

V našem primeru je

$\overline{P} = U_0^2 / 2R$.

Vpeljimo še efektivni tok I_{ef} in efektivno napetost U_{ef}:

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} I^2 dt$$

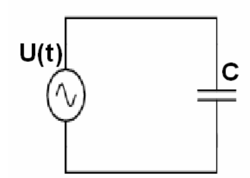
$$U_{ef}^2 = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} U^2 dt.$$

V primeru sinusne napetosti in toka velja $U_{ef} = U_0/\sqrt{2}$ in $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$. Povprečno moč na uporu zapišemo z efektivno napetostjo in tokom na naslednji način:

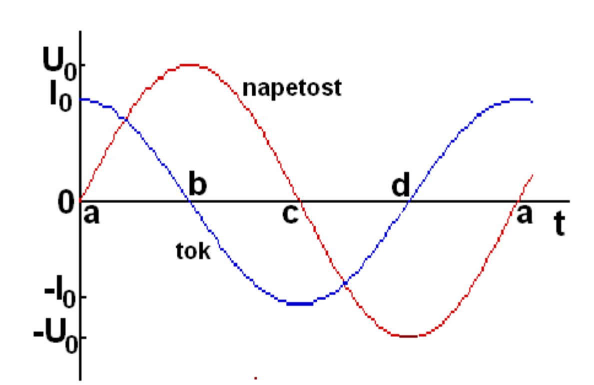
$\overline{P} = U_{ef} I_{ef} = U_{ef}^2 / R = I_{ef}^2 R$.

Zapis je podoben, kot v primeru enosmerne napetosti in toka.

Ko priključimo na vir izmenične napetosti kondenzator, se situacija spremeni.



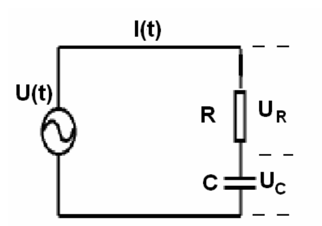
Padec napetosti na kondenzatorju e/C je enak napetosti vira $U_0\sin(\omega t)$:
$e/C = U_0 \sin(\omega t)$.
Tok na plošči kondenzatorja je enak odvodu naboja na ploščah kondenzatorja po času
$I = de/dt = U_0 \omega C \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$.



Na sliki točka a ustreza t=0. Tok prehiteva napetost za četrt nihaja. Amplitudi napetosti in toka sta sorazmerni:
$I_0 = U_0 \omega C$.
Razmerje $U_0/I_0=U_{ef}/I_{ef}$ v splošnem imenujemo impedanca in označimo s črko Z. V primeru upora je $U_0/I_0 = R$. Impedanco kondenzatorja v elektrotehniki imenujejo reaktanca kondenzatorja in označijo kot X_C. Enaka je
$X_C = 1/\omega C$.
Impedanca kondenzatorja je velika pri nizkih frekvencah in z naraščajočo frekvenco pada.

Oglejmo si še moč na kondenzatorju
$P = UI = U_0^2 \omega C \sin(\omega t)\cos(\omega t) = (U_0^2 \omega C/2)\sin(2\omega t)$.
Moč na kondenzatorju niha s frekvenco 2ν. Pozitivna je, ko se kondenzator polni. Ko se kondenzator prazni je moč negativna. Povprečna moč na idealnem kondenzatorju je enaka nič. Pri realnih kondenzatorjih moč ni nič, a o tem pozneje.

Ko na vir izmenične napetosti priključimo zaporedno vezana upornik in kondenzator,



lahko brez računanja obravnavamo mejne primere. Ko je R>>1/ωC, določa razmere v vezju upornik in je $I = (U_0/R)\sin(\omega t)$. V obratnem primeru, ko je R<<ωC, določa razmere v vezju kondenzator in je $I = U_0 \omega C \cos(\omega t) = U_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2)$. V splošnem pričakujemo zvezo $I = (U_0/Z)\sin(\omega t + \phi)$.

Zapišimo za ta primer drugi Kirchoffov izrek:

$IR + e/C = Rde/dt + e/C = U_0 sin(\omega t)$.

Zanimajo nas stacionarne razmere. Potem, ko smo vezje priključili na generator, počakamo nekaj značilnih časov $\tau = RC$, da prehodni pojav mine. V stacionarnih razmerah tok, napetosti in naboj nihajo s krožno frekvenco ω.

Oglejmo si podobno enačbo s kompleksnim nabojem $\tilde{e}$

$$R\frac{d\tilde{e}}{dt} + \frac{\tilde{e}}{C} = U_0 e^{i\omega t}.$$

Imaginarni del te enačbe je ravno enačba za naboj e. Odvajajmo enačbo po času, da dobimo enačbo za kompleksni električni tok $\tilde{I}$:

$$R\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{\tilde{I}}{C} = i\omega U_0 e^{i\omega t}.$$

Imaginarni del kompleksnega toka $\tilde{I}$ je tok I v vezju:

$I = Im(\tilde{I})$.

Rešitev enačbe za $\tilde{I}$ iščemo v obliki

$\tilde{I} = Ae^{i\omega t}$,

pri čemer je A v splošnem kompleksna konstanta. Vstavimo nastavek v enačbo in dobimo

$$A = \frac{U_0}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{i\phi} = \frac{U_0}{Z} e^{i\phi}.$$

Tu je Z , $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$, impedanca vezja, fazni kot ϕ pa je podan z enačbo

$tg(\phi) = 1/\omega RC$.

Električni tok $\tilde{I}$ je enak

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0}{Z} e^{i(\omega t + \phi)},$$

tok I pa

$I = Im(\tilde{I}) = (U_0/Z) sin(\omega t + \phi)$.

Padec napetosti na uporniku je enak

$U_R = IR = (U_0 R/Z) sin(\omega t + \phi)$,

padec napetosti na kondenzatorju pa je enak

$U_C = -(U_0 X_C/Z) cos(\omega t + \phi)$.

Moč se troši samo na uporniku. V povprečju je enaka

$$\overline{P} = I_0^2 R/2 = I_{ef}^2 R = U_0^2 R/2Z^2.$$

Do enakih rezultatov pridemo z metodo kompleksnih impedanc, ki pravzaprav izhaja iz prejšnjega računa. Uporniku pripišemo upor R, kondenzatorju pa kompleksno reaktanco $\tilde{X}_C$ = 1/iωC. Napetost napišemo v obliki $\tilde{U} = U_0 e^{i\omega t}$. Potem računamo kot z upori. Kompleksna impedanca vezja je

$\widetilde{Z} = R + \widetilde{X}_C = R + 1/i\omega C$. Kompleksni tok $\widetilde{I}$ po vezju je enak

$\widetilde{I} = \widetilde{U} / \widetilde{Z} = (U_0/Z)e^{i(\omega t+\phi)}$.

Tu je $tg(\phi) = 1/\omega RC$.

Primerjava s prej izračunanim časovnim potekom električnega toka pokaže, da se imaginarni del kompleksnega toka ujema s tokom po vezju. To je zato, ker se imaginarni del kompleksne napetosti ujema z napetostjo vira $U_0\sin(\omega t)$.

Izračunajmo še padca napetosti na uporniku in kondenzatorju. Padec napetosti na uporniku je enak

$\widetilde{U}_R = \widetilde{I} R = (U_0R/Z)\, e^{i(\omega t+\phi)}$.

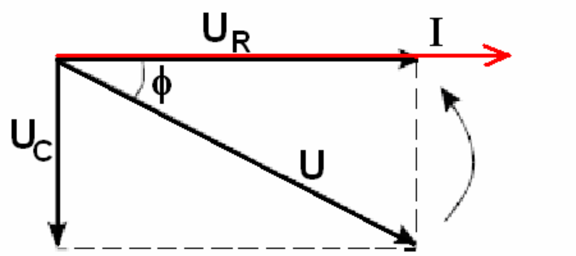
Padec napetosti na kondenzatorju je enak

$\widetilde{U}_C = \widetilde{I}\, \widetilde{X}_C = (U_0X_C/Z)\, e^{i(\omega t+\phi-\pi/2)}$.

Zopet se imaginarni del kompleksne napetosti $\widetilde{U}_R$ ujema s padcem napetosti na uporniku, imaginarni del kompleksne napetosti $\widetilde{U}_C$ pa s padcem napetosti na kondenzatorju. Če bi napetost vira nihala kot $U_0\cos(\omega t)$, bi bilo treba upoštevati realne dele kompleksnih tokov in napetosti.

Problema se lahko lotimo tudi s kazalčnimi diagrami. Napetosti in tokovi so sinusne funkcije časa. Če se »kazalec« vrti okrog začetka, je projekcija kazalca na poljubno os v ravnini vrtenja sinusna funkcija časa. Fazni kot predstavlja orientacija kazalca ob času nič. Tokove in napetosti si lahko predstavljamo kot vrteče se kazalce, ki se s kotno hitrostjo ω vrtijo okrog izhodišča koordinatnega sistema v nasprotni smeri urinega kazalca. Zaradi faznih razlik so kazalci med seboj zasukani.

Opazujmo kazalce v sistemu, ki se vrti skupaj z njimi in upoštevajmo , da sta na uporniku napetost in tok v fazi, na kondenzatorju pa tok v fazi prehiteva napetost za π/2.



Amplituda napetosti na uporniku U_R je enaka I R, amplituda napetosti na kondenzatorju U_C pa I/ωC. Tu je I amplituda toka. Kazalca napetosti U_R in U_C sta na diagramu med seboj zasukana za 90^0, kazalec napetosti U_R pa kaže v smeri kazalca toka. Kazalec amplitude napetosti vira U kaže v smeri vektorske vsote kazalcev napetosti U_R in U_C. Po velikosti je amplituda napetosti vira enaka

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = IZ.$$

Tok prehiteva napetost za kot ϕ med kazalcem napetosti vira in kazalcem toka. Kot ϕ je podan z enačbo

$tg(\phi) = U_C/U_R = 1/\omega RC$.

V preprostem vezju upornika in kondenzatorja bi tok lahko hitro izračunali tudi drugače, z nastavkom $I = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Pokaže pa se, da je v primeru bolj zapletenih vezij obravnava z metodo kompleksnih uporov ali s kazalčnimi diagrami primernejša.

Oglejmo si še izgube energije v realnem kondenzatorju z dielektrikom med elektrodama. V dielektrikih so izgube predvsem posledica dušenja vsiljenega nihanja električnih nabojev, ki ga povzroča zunanje električno polje. V feroelektrikih povzroča izgube tudi premikanje domenskih sten.

Dielektrik v izmeničnem električnem polju navadno opišemo s kompleksno dielektrično konstanto, ki jo bomo tu označili z $\tilde{\varepsilon}$,

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon e^{-i\delta}.$$

Tu je $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}$, δ pa je podan z enačbo $tg\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$.

Zaradi enostavnosti vzemimo dielektrik v ploščatem kondenzatorju z velikostjo plošč S in razdaljo med njima d. Na kondenzator priključimo vir izmenične napetosti $U = U_0\sin(\omega t)$. Računali bomo v kompleksnem z napetostjo $\tilde{U} = U_0 e^{i\omega t}$. Napetost, ki jo uporabimo, je imaginarni del kompleksne napetosti, zato so tudi ostale količine, na primer električni tok, enake imaginarnim delom izračunanih kompleksnih količin.

Električna poljska jakost med ploščama kondenzatorja je enaka

$$\tilde{E} = \frac{U_0}{d} e^{i\omega t} \quad ,$$

gostota električnega polja v dielektriku pa

$$\tilde{D} = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 \tilde{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{U_0}{d} e^{i(\omega t - \delta)}.$$

Naboj na ploščah kondenzatorja je enak $\tilde{e} = S\tilde{D}$, tok na plošče pa

$$\tilde{I} = \frac{d\tilde{e}}{dt} = i\omega\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\right)U_0 e^{i(\omega t - \delta)} = \omega C U_0 e^{i(\omega t - \delta + \pi/2)}.$$

S C smo označili kapaciteto kondenzatorja: $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Pravi tok I je enak imaginarnemu delu kompleksnega toka:

$$I = \omega C U_0 \sin(\omega t - \delta + \pi/2) = \omega C U_0 \cos(\omega t - \delta) = \omega C U_0 \cos\delta \cos(\omega t) + \omega C U_0 \sin\delta \sin(\omega t).$$

Prvi člen predstavlja tok, ki v fazi prehiteva napetost za π/2, kot pri idealnem kondenzatorju. Drugi člen v izrazu za tok je v fazi z napetostjo. Izraz za tok lahko napišemo tudi v obliki

$$I = \omega C_0 U_0(\varepsilon'\cos(\omega t) + \varepsilon''\sin(\omega t)).$$

Tu je C_0 kapaciteta praznega kondenzatorja brez dielektrika.

Povprečna moč, ki se troši v dielektriku in greje kondenzator je enaka

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\omega C_0 U_0^2 \varepsilon'' = \frac{1}{2}\omega C U_0^2 \sin\delta \approx \frac{1}{2}\omega C U_0^2 \delta.$$

Neidealen kondenzator lahko obravnavamo kot vzporedno vezavo kondenzatorja in upornika z uporom

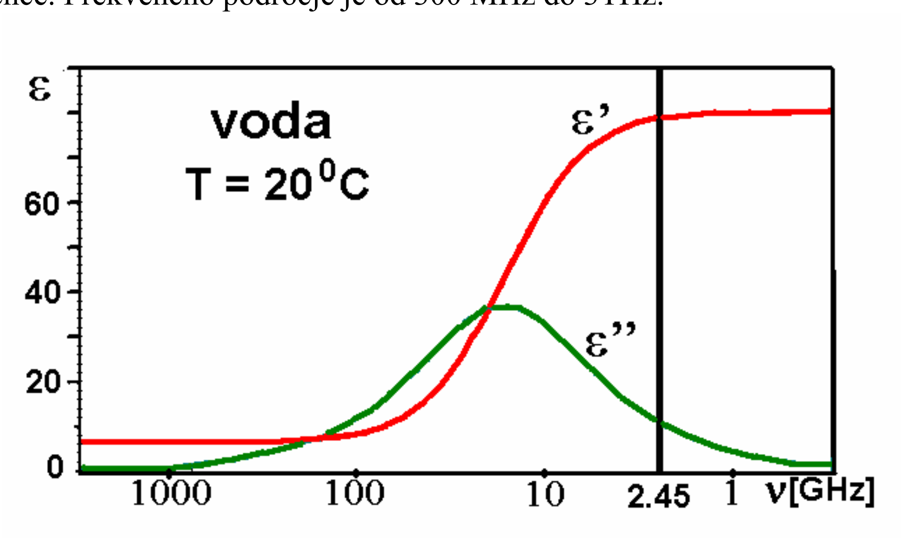
$R = 1/\omega C_0\varepsilon'' \approx 1/\omega C\delta$.

Oba dela kompleksne dielektrične konstante ε' in ε'' sta v splošnem odvisna od frekvence in temperature. Limita ε', ko gre frekvenca proti nič, je enaka dielektrični konstanti ε, o kateri smo govorili v elektrostatiki..

Dielektrična konstanta $\varepsilon \approx \varepsilon'$ in kot δ izmerjena pri frekvenci 1 MHz sta za nekaj značilnih dielektrikov podana v naslednji tabeli.

dielektrik	ε	$\delta\ [10^{-4}]$
steklo	4.8	36
pleksi steklo	2.76	140
polietilen	2.26	<2
polipropilen	2.25	<5
polistiren	2.56	<0.7
teflon	2.1	<2
polivinilklorid	2.88	160
SiO_2	3.8	2
Al_2O_3 (keramika)	10	5-20
$BaTiO_3$	~500	150

Kot zanimivost si oglejmo še sliko ε' in ε'' vode pri $T = 20\ ^0C$ v odvisnosti od frekvence. Frekvenčno področje je od 300 MHz do 3THz.



Z debelejšo črto je označena frekvenca, pri kateri deluje večina mikrovalovnih počic.

MAGNETNO POLJE

Prostor, v katerem delujejo magnetne sile in navori, imenujemo magnetno polje. V makroskopskem svetu opazimo magnetno polje v okolici trajnih magnetov in v okolici vodnikov, po katerih teče električni tok. V magnetnem polju deluje sila na gibajoče se naboje, vodnike po katerih teče električni tok in na feromagnetne snovi, na primer železo.

V okolici opazimo zemeljsko magnetno polje. Paličast trajni magnet, ki je prosto vrtljiv okrog navpične osi, se usmeri v smeri sever-jug. Pol, ki je usmerjen proti severu imenujemo severni pol. Proti jugu kaže južni pol. Če vzamemo dva paličasta trajna magneta in približamo severna pola, se magneta odbijata. Če približamo južna pola, se magneta prav tako odbijata. Severni in južni pol se privlačita. To kaže, da je paličast magnet magnetni dipol. Med magnetnim in električnim dipolom pa je bistvena razlika. Električni dipol lahko razdelimo na električna naboja, magnetnega pa ne moremo. Poljubno majhen kos magnetnega dipola je še vedno magnetni dipol. Celo elektron, proton in nevtron so magnetni dipoli. Magnetnih nabojev ni v makroskopskem svetu pa tudi v mikroskopskem svetu subatomskih delcev jih še niso našli.

Z magnetnim dipolom lahko preiščemo magnetno polje. Iz elektrostatike vemo, da se električni dipol orientira vzdolž električne silnice. Če sledimo orientacijo električnega dipola dobimo silnico. Podobno lahko s sledenjem orientacije majhnega magnetnega dipola –magnetnice- dobimo magnetno silnico.

Magnetno polje lahko preiščemo tudi s podolgastimi železnimi opilki, ki se orientirajo vzdolž magnetnih silnic.

Magnetne silnice v okolici paličastega trajnega magneta so po obliki podobne silnicam v okolici električnega dipola.

Magnetne silnice v okolici dolgega ravnega vodnika so koncentrični krogi s središčem v vodniku. Tu opazimo bistveno razliko med magnetnimi in električnimi silnicami. Električne silnice vedno izvirajo iz pozitivnega naboja in ponirajo v negativnem naboju. Magnetne silnice so zaključene.

V dolgi ravni tuljavi so silnice goste in vzporedne, izven tuljave pa po obliki spominjajo na silnice v okolici dipola.

Če zvijemo ravno tuljavo v krog, dobimo toroidno tuljavo. Znotraj toroidne tuljave so silnice krogi, zunaj toroidne tuljave je magnetno polje zanemarljivo.

Pri magnetnem polju električnega toka opazimo, da če obrnemo smer toka, se obrne tudi orientacija magnetnice (smer magnetnih silnic).

Električno polje opišemo z električno poljsko jakostjo, ki je enaka sili z nabojem. Magnetnega polja ne moremo opisati na ta način, saj magnetnih nabojev ni. Lahko pa za opis magnetnega polja uporabimo silo na električni naboj.

Silo na električni naboj v magnetnem polju opazimo, ko se naboj giblje. Če se naboj giblje vzdolž silnic, sile ni. Sila je največja, ko se naboj giblje pravokotno na silnice. Ko obrnemo smer magnetnih silnic, se smer sile obrne. Ko obrnemo smer gibanja naboja, se smer sile obrne. Če se pozitivni in negativni naboj gibljeta v isti smeri, sta magnetni sili nasprotni. Tir, po katerem se giblje električni naboj v magnetnem polju v ravnini, ki je pravokotna na silnice, je krog. Na osnovi teh opažanj lahko silo na električni naboj v magnetnem polju zapišemo takole:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}.$$

S to enačbo definiramo gostoto magnetnega polja $\vec{B}$ - količino s katero opišemo magnetno polje. Enota za gostoto magnetnega polja je Vs/m^2 ali tesla (T). Hkrati definiramo smer magnetnih silnic. Pri trajnem magnetu silnice izhajajo iz severnega pola in ponirajo v južnem polu.

V elektrotehniki imenujejo B gostota magnetnega pretoka.

Oglejmo si nekaj tipičnih velikosti gostote magnetnega polja. Pri nas je vodoravna komponenta zemeljskega magnetnega polja – tista ki je odgovorna za orientacijo igle kompasa proti severu – enaka 20 μT, celotna gostota zemeljskega magnetnega polja pa je 50 μT. V zračni tuljavi je gostota magnetnega polja nekaj mT, v elektromagnetih z železnim jedrom pa do približno 2T. V bližini trajnega magneta je B nekaj desetin T. Močnejša magnetna polja dobimo v superprevodnih magnetih in sicer do 20T. Tudi procesi v človeškem telesu povzročajo nastanek magnetnih polj, ki pa so zelo šibka, reda velikosti nT.

Gibanje nabitih delcev v magnetnem polju

Na električno nabit delec z nabojem e in maso m, ki prileti v magnetno polje z gostoto B pravokotno na silnice deluje magnetna sila, ki je pravokotna na magnetne silnice in hkrati pravokotna na smer hitrosti. Delec se giblje po krožnici, magnetna sila pa je centripetalna sila:

$mv^2/r = evB.$

Polmer krožnice je enak

$r = mv/eB,$

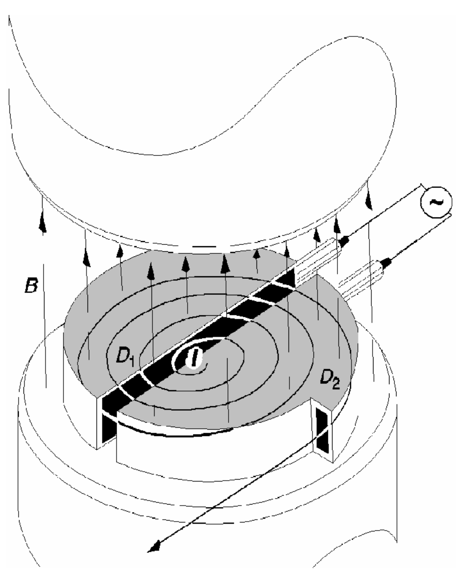
frekvenco kroženja pa imenujemo ciklotronska frekvenca in je enaka

$\nu = eB/2\pi m.$

Polmer kroženja narašča z naraščajočo hitrostjo delca v in pada z naraščajočo gostoto magnetnega polja B, frekvenca kroženja pa je sorazmerna B in neodvisna od hitrosti. Polmer kroženja in frekvenca sta odvisna od razmerja e/m.

Magnetna sila je pravokotna na smer hitrosti, zato je njeno delo enako nič. Magnetna sila torej ne spreminja kinetičneenergije delca. V primeru, ko delec prileti v magnetno polje poševno na silnice, se giblje po vijačnici. Hitrost v smeri magnetnih silnic je konstantna.

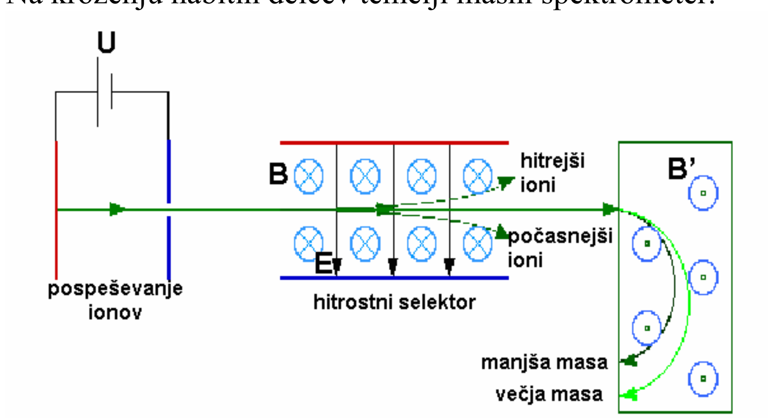
Ciklotron je pospeševalnik električno nabitih delcev, ki temelji na kroženju delcev v magnetnem polju. V magnetnem polju sta dve votli kovinski telesi v obliki črke D. Nanju je priključen generator izmenične napetosti s frekvenco enako ciklotronski frekvenci $eB/2\pi m$. V prostoru med telesoma je izmenično električno polje. Na sredi je izvor ionov (I). Električno polje pospešuje ione, ko so v prostoru med telesoma. Pri tem hitrost ionov in polmer kroženja naraščata, frekvenca pa ostaja konstantna. Največja energija, ki jo v ciklotronu dosežejo protoni je 10-20 MeV. Energija 1 eV je enaka $e_0 1V = 1.6\ 10^{-19}$ J. Energija protonov je navzgor omejena, ker se pri velikih energijah spremeni ciklotronska frekvenca. Treba je upoštevati popravek, ki ga da posebna teorija relativnosti.



Pospeševalnik, ki upošteva relativistične popravke imenujemo sinhrotron. V protonskem sinhrotronu v evropskem laboratoriju za fiziko delcev CERN blizu Geneve so dosegli energijo protonov 450 GeV. V pripravi je hadronski trkalnik za bistveno višje energije 10-14 TeV.

Nabiti delci, ki krožijo v sinhrotronu, sevajo elektromagnetno valovanje v področju od infrardeče svetlobe do rentgenskih žarkov. Imenujemo ga sinhrotronsko sevanje. Sinhrotron je močan izvor rentgenskih žarkov, ki jih uporabljajo med drugim za raziskave površin in lastnosti materialov. Nam najbližji je elektronski sinhrotron v Bazovici pri Trstu.

Na kroženju nabitih delcev temelji masni spektrometer.



V pečici dobimo ione, ki jih potem pospešimo v električnem polju z napetostjo U. Pri tem jim kinetična energija naraste za eU. Curek ionov leti skozi hitrostni selektor, v katerem sta prekrižani električno in magnetno polje. Skupna sila

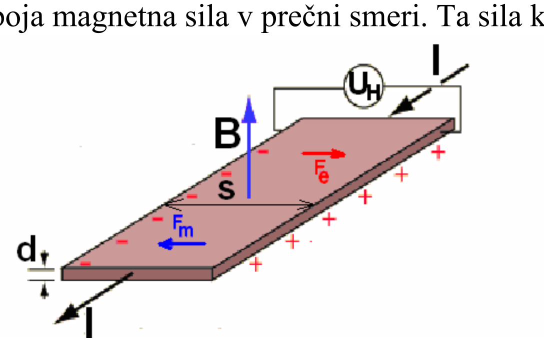
$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$,

ki jo imenujemo tudi Lorentzova sila, je nič za tiste ione, ki imajo hitrost v = E/B. Masa in naboj iona tu nista pomembna. Ti ioni skozi odprtino v zaslonki prilete v magnetno polje, v katerem potujejo po krožnici s polmerom

$r = (m/e)(v/B)$.

Razmerje v/B je za vse ione enako, zato z merjenjem polmera r ugotovimo, kateri atomi sestavljajo snovi v pečici. Detektor ionov je lovilna elektroda in merilnik električnega toka. Lega elektrode, pri kateri merilnik izmeri tok, pove, kateri ioni so prisotni, električni tok pa je sorazmeren številu ionov, ki na enoto časa zadenejo elektrodo, to pa je sorazmerno številu atomov danega elementa ali izotopa v snovi.

Ko po prevodniku v prečnem magnetnem polju teče električni tok, deluje na gibljive nosilce naboja magnetna sila v prečni smeri. Ta sila krivi tire nosilcev naboja.



Na mejnih ploskvah prevodnika se nabere električni naboj. Električna sila tega naboja je nasprotna magnetni sili. V stacionarnih razmerah sta sili po velikosti enaki:
$eE = e\langle v\rangle B.$
Tu je $\langle v\rangle$ povprečna hitrost nosilca naboja. Napetost U_H med ploskvama, na katerih je električni naboj, je enaka
$U_H = Es = \langle v\rangle Bs.$
Razdaljo med električno nabitima ploskvama smo označili z s. Upoštevajmo še, da je električni tok
$I = Sne\langle v\rangle,$
pri čemer je S presek prevodnika, n število gibljivih nosilcev naboja v enoti prostornine in e naboj nosilca pa dobimo
$U_H = (s/Sne)IB.$
Za ploščico na sliki je S = sd, napetost U_H pa je enaka
$U_H = (1/dne)IB.$
Pojav imenujemo Hallov pojav, napetost U_H pa Hallova napetost.

Hallov pojav uporabljamo za merjenje gostote magnetnega polja. Hallov merilnik priključimo na vir stalnega električnega toka in izmerimo Hallovo napetost. Tak merilnik je pred meritvijo treba umeriti. S Hallovimi merilniki lahko merimo gostote magnetnih polj od desetine mT do več T. Hallov pojav uporabljamo tudi za analogno množenje in druge meritve, ki jih lahko povežemo z merjenjem magnetnega polja n. pr. merjenje električnega toka, premikov, frekvence vrtenja...

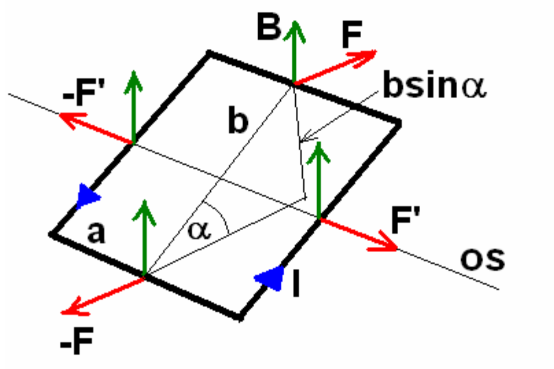
Z merjenjem Hallove napetosti lahko ugotovimo, ali imajo gibljivi nosilci naboja pozitiven ali negativen naboj in izmerimo njihovo število v enoti prostornine. Na negativne nosilce naboja deluje pri isti smeri toka magnetna sila v isti smeri, kot na pozitivne. Zato sta Hallovi napetosti nasprotnega znaka. Znak napetosti nam pove znak naboja. Število gibljivih nosilcev naboja na enoto prostornine je enako IB/deU_H.

SILA NA VODNIK, NAVOR NA ZANKO, MAGNETNI MOMENT

Na vodnik, po katerem teče električni tok, deluje magnetna sila, če vodnik ni vzporeden s silnicami. Za začetek vzemimo vodnik s presekom S, ki je prtavokoten na magnetne silnice. Po vodniku naj teče tok I, dolžina vodnika v magnetnem polju pa naj bo l. Na vsak gibljivi nosilec naboja v magnetnem polju deluje sila $F' = e\langle v\rangle B$, na vse gibljive nosilce naboja, ki so hkrati v magnetnem polju pa sila $F = Ne\langle v\rangle B$. Tu je število N enako N = nSl. Gibljivi nosilci so vezani na vodnik, zato silo F čuti vodnik kot celota. Izrazimo silo F z makroskopskimi količinami. Kot vemo je električni tok I enak $I = Sne\langle v\rangle$. Z upoštevanjem tega dobimo F = IlB. Pri poljubni orientaciji vodnika glede na magnetne silnice velja
$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}.$
Tu je $\vec{l}$ vektor, katerega velikost je enaka dolžini vodnika v magnetnem polju, smer pa se ujema s smerjo električnega polja. V primeru, da vodnik ni raven, ali pa se spreminja gostota magnetnega polja vzdolž vodnika, razdelimo vodnik na kratke odseke dolžine $d\vec{l}$ in za vsak odsek izračunamo silo po prejšnji zvezi. Celotna sila je v tem primeru enaka

$\vec{F} = I\int d\vec{l} \times \vec{B}.$

Na zanko v homogenem magnetnem polju deluje navor. Na sliki je pravokotna zanka s stranicama a in b, ki je vrtljiva okrog osi skozi središče. Pravokotnica na zanko oklepa z magnetnimi silnicami kot α. Po zanki teče električni tok I.



Na sliki opazimo dvojico sil F in –F. Razdalja med premicama, na katerih ležita sili je bsinα. Sili F' in –F' ne povzročata navora, saj ležita na isti premici. Navor je torej enak

$M = Fb\sin\alpha.$

Po velikosti je sila F enaka F = IaB. Navor je torej enak

$M = IB(ab)\sin\alpha = IBS\sin\alpha.$

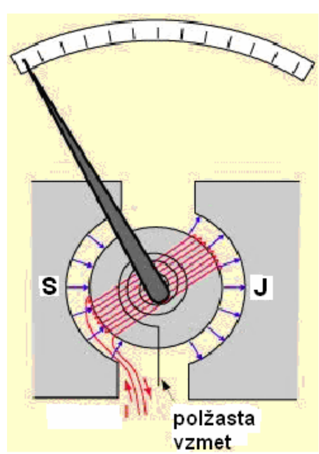
Izraz smo izpeljali le za pravokotno zanko, velja pa ravninsko zanko poljubne oblike. Ko so magnetne silnice pravokotne na ravnino zanke, je navor nič. Navor je največji, ko so magnetne silnice v ravnini zanke (α = π/2). V primeru ko imamo namesto zanke tuljavo z N ovoji je navor

$M = NIBS\sin\alpha.$

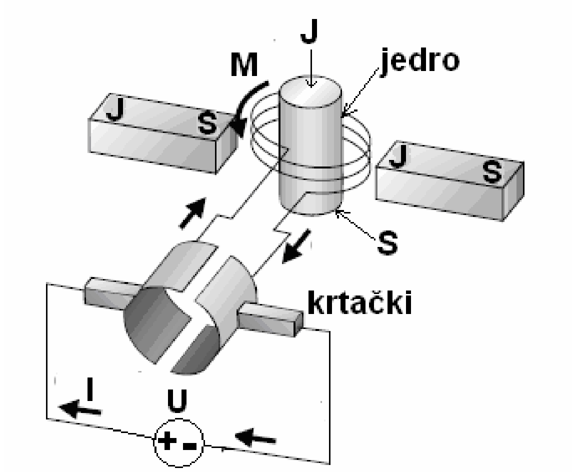
Navor na tuljavo uporabljamo v instrumentu na vrtljivo tuljavo. Med primerno oblikovanima poloma magneta je valj iz mehkega železa. Vmes dobimo radialno magnetno polje tako, da je magnetni navor na tuljavo pri poljubnem zasuku enak NIBS. Magnetni navor uravnoteži navor polžaste vzmeti Dϕ. Pri toku I skozi tuljavo se torej tuljava in z njo kazalec zasuka za kot

$\phi = (NBS/D)I$

Zasuk je sorazmeren toku skozi tuljavo. Ampermetre na tej osnovi še vedno pogosto uporabljamo.



Na osnovi magnetnega navora na tuljavo delujejo elektromotorji. Princip preprostega enosmernega elektromotorja kaže naslednja slika. Tok skozi tuljavo namagneti jedro. Trajna magneta delujeta na jedro z navorom. Navor jedro in tuljavo, ki je navita okrog jedra, zasuka.



Pri tem se spremeni smer toka skozi tuljavo tako, da se smer navora ne spremeni in motor se vrti. Če spremenimo smer toka, se spremeni smer navora in s tem tudi smer vrtenja motorja.

Navor na zanko lahko napišemo tudi v vektorski obliki. Definirajmo vektor $\vec{S}$, ki je po velikosti enak ploščini zanke, po smeri pa je pravokoten na zanko. Smer vektorja $\vec{S}$ naj bo podana s pravilom desnega (običajnega) vijaka ali s svedrskim pravilom. To je smer, v kateri se premakne desni vijak, če ga zasukamo v istem smislu, kot teče po zanki tok. S tako podanim vektorjem $\vec{S}$ zapišemo navor na zanko kot

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}.$$

Definirajmo magnetni dipolni moment ali krajše magnetni moment tuljave kot

$$\vec{p}_m = I\vec{S}.$$

Enota za magnetni moment je Am^2. Navor na magnetni moment je – podobno kot navor na električni dipolni moment – enak

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}.$$

Tudi energijo magnetnega momenta lahko zapišemo analogno kot energijo električnega dipolnega momenta:

$$W = -\vec{p}_m \vec{B}.$$

Magnetni moment tuljave z N ovoji je enak $\vec{p}_m = NI\vec{S}$.

Magnetnega momenta nimata samo zanka in tuljava. Imajo ga tudi deli atoma: elektron proton in nevtron pa tudi mnoga atomska jedra. Magnetni moment protona je $14\ 10^{-27}$ Am^2, nevtrona $9.7\ 10^{-27}$ Am^2, elektrona pa $9.3\ 10^{-24}$ Am^2. Na jedrske magnetne momente deluje v magnetnem polju navor, ki jih hoče orientirati v smeri magnetnih silnic. Zaradi vrtilne količine –spina – pride do precesije jeder okrog smeri magnetnega polja. To je sicer klasična slika, ki pa se dokaj dobro ujema s kvantno. Precesijska frekvenca je sorazmerna gostoti magnetnega polja. Precesijska frekvenca vodikovih jeder – protonov – v magnetnem polju z gostoto 1T je enaka 42.6 MHz. Z merjenjem precesijske frekvence jeder v magnetnem polju se ukvarja jedrska magnetna resonanca.

Mimogrede omenimo, da z jedrsko magnetno resonanco zelo natančno merimo gostoto magnetnega polja.

Kot zgled izračunajmo, s kakšno frekvenco zaniha železen paličast magnet z magnetnim momentom 2 Am^2, ki je vrtljiv okrog navpične osi, ko ga za majhen kot izmaknemo iz mirovne lege.Dolžina magneta naj bo l = 20 cm, presek S = 1 cm^2, gostota železa pa ρ = 7.6 kg/dm^3.

Magnet je v mirovni legi orientiran v smeri sever-jug. Ko magnet za kot ϕ izmaknemo iz mirovne lege deluje nanj magnetni navor

$M = -p_m B \sin\phi \approx -p_m B\phi.$

Tu je B = 2 10^{-5} T. Zapišimo enačbo za vrtenje:

$J\alpha = -p_m B\phi.$

Krožna frekvenca nihanja je enaka $\Omega = \sqrt{p_m B / J}$, pri čemer je vztrajnostni moment magneta enak $J = ml^2/12$.

Ko vstavimo podatke dobimo $\nu = \Omega/2\pi = 0.045\ s^{-1}$, oziroma $t_0 = 22$ s.

MAGNETNI PRETOK, MAGNETNA NAPETOST, RAČUNANJE B

Magnetni pretok

V elektrostatiki smo definirali električni pretok skozi ploskev kot

$\Phi_e = \int \vec{D} d\vec{S}.$

Ugotovili smo, da je električni pretok skozi zaključeno ploskev enak električnemu naboju, ki je zajet znotraj ploskve:

$\oint \vec{D} d\vec{S} = e.$

Podobno definiramo tudi magnetni pretok skozi ploskev:

$\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{S}.$

Enota za magnetni pretok je weber (Wb = Vs). Magnetni pretok skozi zaključeno ploskev je enak nič:

$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$

V naravi namreč ni magnetnih nabojev ali monopolov, v primeru dipolov pa je tudi električni pretok skozi zaključeno ploskev enak nič.

Magnetna napetost

Električno napetost U med začetkom in koncem poti smo definirali kot integral po poti

$U = \int \vec{E} d\vec{s}$.

Integral po sklenjeni poti

$\oint \vec{E} d\vec{s}$

je v statičnem električnem polju enak nič, saj se v tem primeru začetna in končna točka ujemata.

Na podoben način definiramo magnetno napetost. Poglejmo, kolikšen je v magnetnem polju integral

$$\int \vec{B}d\vec{s}.$$

Posebej nas zanima integral po sklenjeni poti

$$\oint \vec{B}d\vec{s}.$$

Lotimo se preprostega primera: magnetnega polja okrog dolgega ravnega vodnika, po katerem teče tok I. Silnice so v tem primeru koncentrični krogi. Za sklenjeno pot uporabimo silnico s polmerom r. Integral je z upoštevanjem valjaste simetrije enak

$$\oint \vec{B}d\vec{s} = B2\pi r.$$

Integral je različen od nič.

Meritve pokažejo, da je gostota magnetnega polja okrog žice sorazmerna I/r. Velja torej

$$\oint \vec{B}d\vec{s} = konst.I.$$

Integral je neodvisen od polmera silnice. Tudi če izberemo drugačno pot okrog vodnika, dobimo enak rezultat. Zveza, do katere smo prišli, velja splošno, ne samo v primeru dolgega ravnega vodnika. Imenuje se Amperov zakon. V vakuumu ga zapišemo v naslednji obliki:

$$\oint \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 I.$$

Vpeljali smo magnetno konstanto $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ Vs/Am. Tok, ki nastopa v enačbi, je vsota vseh tokov, ki prebadajo ravnino zanke, po kateri integriramo. Tokove, ki imajo smer, v katero bi se premaknil desni vijak, ko bi ga zasukali v smeri poti, štejemo pozitivno. Tokove, ki tečejo v nasprotni smeri, štejemo negativno. V splošnem zapišemo Amperov zakon v naslednji obliki:

$$\oint \vec{H}d\vec{s} = I.$$

Vpeljali smo jakost magnetnega polja H z enoto A/m. V vakuumu velja zveza

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Pravi razlog za uvedbo jakosti magnetnega polja bomo spoznali, ko bomo obravnavali snov v magnetnem polju.

Magnetno napetost U_m med začetkom in koncem poti v magnetnem polju imenujemo integral po poti

$$U_m = \int \vec{H}d\vec{s}.$$

Če je pot sklenjena je magnetna napetost enaka vsoti objetih tokov.

Z Amperovim zakonom izračunajmo jakost in gostoto magnetnega polja v okolici dolgega ravnega vodnika. Velja $H2\pi r = I$ in iz tega $H = I/2\pi r$ ter $B = \mu_0 I/2\pi r$.

Dva vzporedna vodnika se privlačita, če tečeta tokova v isti smeri in odbijata, če sta smeri tokov nasprotni. Izračunajmo, kolikšna sila deluje na meter dolgega ravnega vodnika, po katerem teče tok I = 1A, če je v oddaljenosti d = 1m od vodnika drug vzporeden raven vodnik, po katerem teče v isti smeri tok I = 1A. Gostota magnetnega polja B, ki jo na mestu prvega vodnika povzroča drugi vodnik je enaka

$$B = \mu_0 I/2\pi d.$$

Sila F na odsek prvega vodnika dolžine l je privlačna in enaka

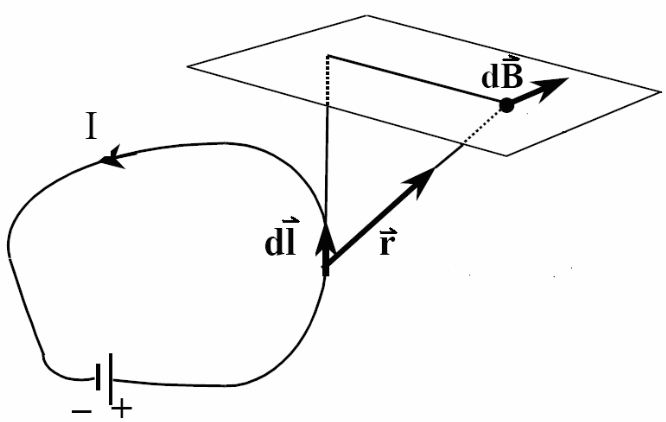
$$F = IlB = \mu_0 I^2 l/2\pi d.$$

Sila na enoto dolžine prvega vodnika je
$F/l = \mu_0 I^2/2\pi d = 2\ 10^{-7}\ N.$
Na ta način je definirana enota za električni tok ampere (A). Ko teče po dveh vzporednih vodnikih v razdalji 1m tok 1A, deluje na meter vodnika magnetna sila 2 10^{-7} N.

Gostoto magnetnega polja v toroidni tuljavi lahko izračunamo z Amperovim zakonom. Silnice so v tem primeru krogi, ki so sklenjeni znotraj tuljave. Za sklenjeno pot vzemimo silnico s polmerom r. Z upoštevanjem simetrije dobimo $H2\pi r = NI$. Tu je N število ovojev tuljave. Vsak ovoj namreč enkrat prebode ravnino zanke. Gostota magnetnega polja v toroidni tujavi pada z naraščajočim polmerom r. Enaka je
$B = \mu_0 NI/2\pi r$. Če poteka pot izven tuljave, je električni tok skozi zanko nič, zato tam ni magnetnega polja. Ko je toroid tanek, smemo privzeti, da je gostota magnetnega polja v toroidu konstantna in sicer taka, kot ustreza srednjemu polmeru.

Z Amperovim zakonom ocenimo še gostoto magnetnega polja v dolgi ravni tuljavi z N ovoji. Če je tuljava dolga, so silnice v tuljavi vzporedne z osjo tuljave. Jakost magnetnega polja je vzdolž tuljave konstantna, razen seveda na konceh. Zunaj tuljave je jakost magnetnega polja dosti manjša, kot v tuljavi. Zaključena pot, ki jo izberemo, poteka po silnici znotraj tuljave in po vzporedni črti izven tuljave. V naši oceni predpostavimo, da je znotraj tuljave jakost magnetnega polja H, izven tuljave pa vzamemo H = 0. Vrednosti integrala na koncih tuljave zanemarimo. Pri tem dobimo $Hl = NI$. Gostota magnetnega polja v dolgi ravni tuljavi z N ovoji je torej enaka
$B = \mu_0 NI/l.$
Enačba velja dobro, če je dolžina tuljave dosti večja od premera. Če ni tako, jo lahko uporabimo za oceno.

Amperov zakon uporabljamo za računanje jakosti magnetnega polja v preprostih primerih. V bolj zapletenih primerih uporabimo Biot-Savartov zakon.



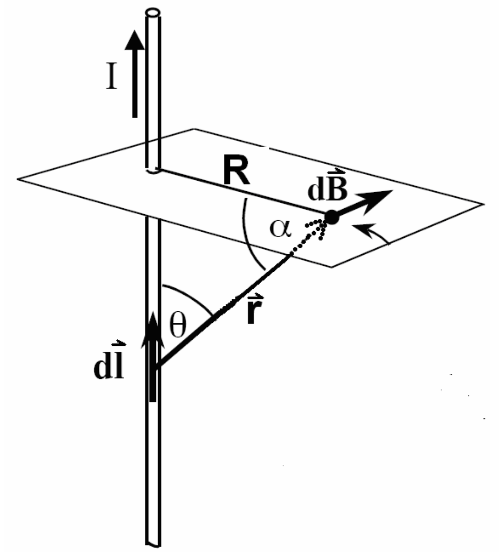
Del vodnika dolžine dl prispeva na mestu, ko ga določa krajevni vektor $\vec{r}$ k gostoti magnetnega polja prispevek $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Smer vektorja $d\vec{l}$ se ujema s smerjo električnega toka. Gostota magnetnega polja na tem mestu je torej enaka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Preverimo veljavnost Biot-Savartovega zakona na primeru, ki ga že poznamo in sicer izračunajmo gostoto magnetnega polja v okolici dolgega ravnega vodnika.



Vzdolž vodnika naj poteka koordinatna os x. Računali bomo gostoto magnetnega polja pri x=0 v oddaljenosti R od vodnika. Vzemimo del vodnika dolžine dl = dx med x in x+dx. Smer vektorja $d\vec{B}$ se pri poljubnem x ujema s smerjo rezultante. Velikost vektorja $d\vec{B}$ je enaka

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin(\theta) dx}{4\pi\, r^2} = \frac{\mu_0 I \cos(\alpha) dx}{4\pi\, r^2}.$$

Upoštevajmo še, da je $x = R\, tg(\alpha)$ in $r = R/cos(\alpha)$ pa dobimo

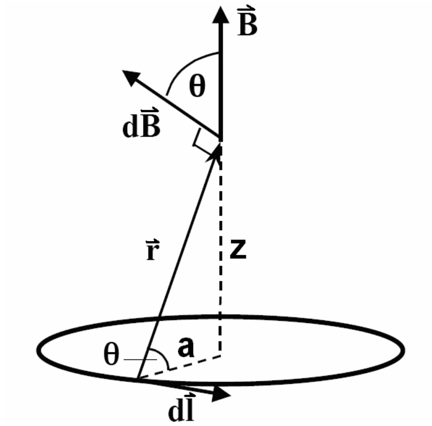
$$dB = \frac{\mu_0 I \cos(\alpha) d\alpha}{4\pi\, R}.$$

Gostoto magnetnega polja dobimo z integracijo tega izraza po α. Če je vodnik zalo dolg, sta integracijski meji –π/2 in π/2. Pri tem dobimo enak rezultat, kot z uporabo Amperovega zakona:

$B = \mu_0 I/2\pi R.$

Za kratek raven odsek vodnika računamo enako, le integracijski meji se spremenita.

Drug primer, ki ga bomo obravnavali je gostota magnetnega polja na osi krožne zanke s polmerom a, po kateri teče tok I



Iz simetrijskih razlogov ima gostota magnetnega polja smer osi zanke, vektorja $\vec{r}$ in $\vec{dl}$ sta med seboj pravokotna, smer vektorja $d\vec{B}$ pa je nagnjena proti smeri $\vec{B}$ za kot θ. Dolžina vektorja $\vec{r}$ in kot θ sta za vsa mesta na krožnici enaka. Prispevek dB k rezultanti B je enak:

$$dB = |d\vec{B}|\cos\theta = \frac{\mu_0 I \cos\theta}{4\pi r^2} dl.$$

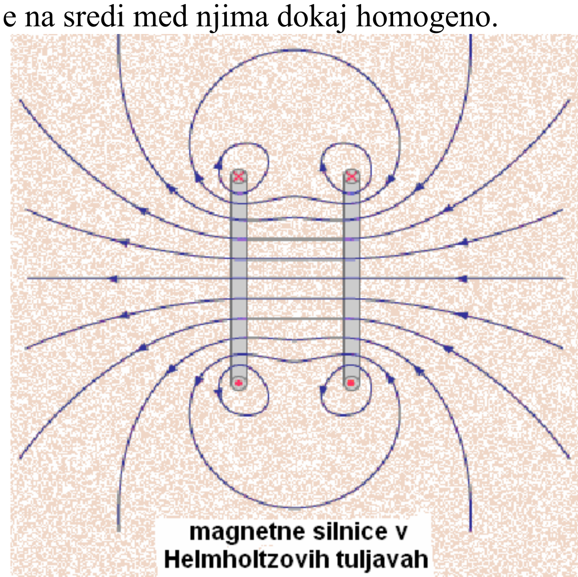
V tem izrazu je dl pomnožen s konstantnim ulomkom. Po integraciji dobimo

$$B = \frac{\mu_0 I a \cos\theta}{2r^2} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}.$$

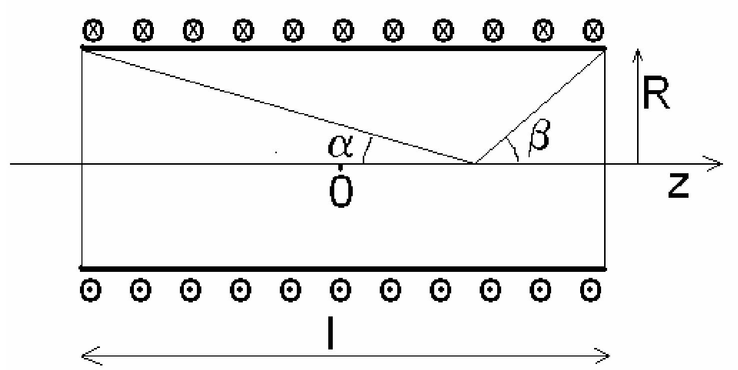
Upoštevali smo, da je $\cos\theta = a/r$ in $r^2 = a^2 + z^2$.

Enak izraz velja tudi za tanko tuljavo, le tok I je treba nadomestiti z NI, pri čemer je N število ovojev tuljave.

Dve enaki tanki tuljavi s polmerom a na skupni osi, med katerima je razdalja a, sestavljata Helmholtzovi tuljavi. Če teče enak tok I po obeh tuljavah v isti smeri, je magnetno polje na sredi med njima dokaj homogeno.



Izračunajmo še gostoto magnetnega polja na sredi tuljave s polmerom R in dolžino l. Tuljava naj ima N ovojev, po žici pa naj teče tok I.



Os z naj poteka po osi tuljave, sredi tuljave pa izberimo z = 0.

Problem bomo poenostavili. Namesto, da upoštevamo posamezne ovoje, si bomo mislili, da po površini valja s polmerom R teče homogen električni tok s površinsko gostoto i, i =dI/dz = NI/l. To lahko naredimo, če so ovoji tuljave na gosto in enakomerno naviti.

Po delu površine valja med z in z+dz teče električni tok idz. K gostoti magnetnega polja na sredi tuljave ta tok prispeva

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 dz}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I R^2 dz}{2l\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Vpeljimo novo spremenljivko ϕ,

$tg\phi = z/R,$

in jo vstavimo v gornjo enačbo:

$$dB = \frac{\mu_0 N I}{2l}\cos\phi d\phi .$$

Integriramo v mejah od $-\phi_m$ do ϕ_m, pri čemer je $tg\phi_m = l/2R$:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}\sin\phi_m = \frac{\mu_0 N I}{l}\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}} = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{l^2+4R^2}}.$$

V primeru, ko je l>>R , dobimo znan rezultat $B = \mu_0 NI/l$.

Na enak način lahko izračunamo B kjerkoli na osi tuljave, zunaj ali znotraj. Pri tem dobimo

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2l}(\cos\alpha + \cos\beta).$$

Kota α in β sta prikazana na sliki.

Za zaključek z Biot-Savartovim zakonom določimo magnetno polje gibajočega se električnega naboja

Oglejmo si, čemu je enak produkt Idl. Električni tok zapišemo v obliki: $I = jS = ne\langle v\rangle S = \rho_e\langle v\rangle S$. Pri tem je ρ_e gostota električnega naboja. Produkt Idl je torej enak $Idl = (\rho_e S dl)\langle v\rangle = de\langle v\rangle$.

Tu je de električni naboj znotraj dela žice dolžine dl, $\langle v\rangle$ pa povprečna hitrost gibanja tega naboja. Zvezo lahko zapišemo tudi v vektorski obliki:

$I d\vec{l} = de < \vec{v} >$.

Gostota magnetnega polja $d\vec{B}$, ki jo povzroča gibajoči naboj de na mestu, ki je od njega oddaljena za $\vec{r}$ je enaka

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 de(< \vec{v} > \times \vec{r})}{4\pi r^3}.$$

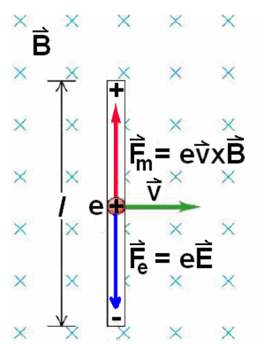
Iz tega sklepamo, da je za točkast naboj e, ki se giblje s hitrostjo $\vec{v}$ gostota magnetnega polja v razdalji $\vec{r}$ od naboja enaka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e(\vec{v} \times \vec{r})}{4\pi r^3}.$$

Enačbo lahko zapišemo tudi v obliki $\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 (\vec{v} \times \vec{E})$. Gibajoč naboj v svoji okolici povzroča električno in magnetno polje, ki sta med seboj pravokotni.

INDUKCIJA, MAXWELLOVE ENAČBE

Med koncema vodnika, ki ga premikamo v manetnem polju tako, da seka silnice, se inducira napetost.



Električni naboji se gibljejo skupaj z vodnikom s hitrostjo v. Na vsak naboj deluje magnetna sila F_m = evB vzdolž vodnika. Če konca vodnika nista sklenjena, se na njih nabere pozitiven in negativen električni naboj tako, da električna sila F_e = eE uravnoteži magnetno silo. Napetost med koncema vodnika je enaka

U_i = El = vBl,

pri čemer je l dolžina vodnika.

Če konca vodnika sklenemo preko upornika z uporom R izven magnetnega polja, steče pri premikanju vodnika po vezju električni tok I, ki je enak I = U_i/R = vBl/R. Napetost U_i imenujemo inducirana napetost. Inducirana napetost linearno narašča z naraščajočo hitrostjo v in zamenja znak, ko smer hitrosti obrnemo.

Preselimo se v opazovalni sistem, ki se giblje skupaj z vodnikom. V tem opazovalnem sistemu na naboje še vedno deluje sila evB, a ker v tem sistemu naboji mirujejo, je sila lahko le električna. Pri premikanju v magnetnem polju s hitrostjo $\vec{v}$ torej občutimo tudi električno polje z jakostjo

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Izberimo vzdolž vodnika vektor $\vec{l}$. Električna napetost U_i med točkama, ki ju določa vektor $\vec{l}$ je enaka

$$U_i = \vec{l}\,(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Napetost je največja, ko so vsi trije vektorji med seboj pravokotni in enaka nič, ko sta katerakoli dva vektorja vzporedna. V primeru, ko vodnik ni raven, ali pa se hitrost ali gostota magnetnega polja vzdolž vodnika spreminjata, je napetost med koncema vodnika enaka

$U_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$.

Vrnimo se k primeru, ko sta konca vodnika sklenjena izven magnetnega polja preko upornika z uporom R. Tedaj po vodniku teče električni tok I = vBl/R. Na vodnik, po katerem teče električni tok pa deluje sila

$F = IlB = v(Bl)^2/R$.

Smer sile je po velikosti sorazmerna hitrosti, po smeri pa nasprotna hitrosti.

Natančneje pojasni smer magnetne sile na inducirane tokove Lenzovo pravilo. Inducirani tok steče v taki smeri, da magnetna sila nanj nasprotuje vzroku zaradi katerega je nastala.

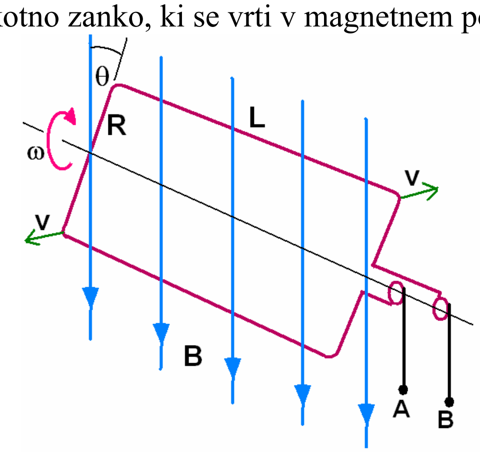
Magnetno silo na inducirane tokove uporabljamo pri magnetnem zaviranju.

Za zgled izračunajmo, s kolikšno hitrostjo pada med poloma magneta kvadraten okvir s stranico a, ki smo ga naredili iz žice s presekom S in specifičnim uporom ζ. Silnice magnetnega polja z gostoto B naj bodo vodoravne, pravokotnica na okvir pa naj bo vzporedna s silnicami. V magnetnem polju naj bo zgornja vodoravna stranica okvira, spodnja vodoravna stranica okvira naj bo izven magnetnega polja.

Napetost se inducira med koncema zgornje vodoravne stranice okvira. Enaka je $U_i = avB$. Tu je v hitrost padanja okvira. Napetost U_i požene po okviru tok $I = U_i/R$, pri čemer je $R = \zeta 4a/S$. Na zgornjo stranico okvira deluje v nasprotni smeri gibanja (navpično navzgor) sila F = IaB. V stacionarnih razmeraj je sila F enaka teži $F_g = 4aS\rho g$, iz česar sledi

$v = 16\rho g\zeta/B^2$.

Oglejmo si pravokotno zanko, ki se vrti v magnetnem polju s kotno hitrostji ω.



Os vrtenja naj bo pravokotna na magnetne silnice. Napetost se inducira samo na odsekih zanke dolžine L. Ko je zanka orientirana tako, da leže magnetne silnice v ravnini zanke ($\theta=0$), se na vsakem od obeh odsekov inducira napetost $U_i' = L(\omega R)B = \omega BS/2$. Tu je S ploščina zanke. Napetost Ui med koncema zanke je enaka

$U_i = 2U_i' = \omega BS$.

V trenutku, ko so magnetne silnice pravokotne na ravnino zanke ($\theta=\pi/2$), se deli zanke gibljejo v smeri magnetnih silnic in je inducirana napetost nič.

Ko se zanka zasuka za 180^0 se smer napetosti obrne. Če velja $\theta=\omega t$, ima inducirana napetost med koncema zanke A in B obliko

$U_i = \omega BS\cos(\omega t)$.

Ta enačba v resnici velja za ravninsko zanko poljubne oblike.

Če namesto zanke uporabimo tuljavo z N ovoji, se med koncema inducira izmenična napetost

$U_i = N\omega BS\cos(\omega t)= U_0\sin(\omega t)$.

Napetost med koncema zanke lahko izrazimo z magnetnim pretokom skozi zanko. Za pot po zanki izberimo pot od točke A do točke B. Magnetni pretok skozi zanko je v trenutku na sliki enak $\Phi_m= BS\sin\theta = BS\sin(\omega t)$. Če upoštevamo smer električne poljske jakosti od točke B proti točki A in njeno velikost $vB\cos\theta = \omega RB\cos(\omega t)$, je napetost med točama A in B enaka

$U_i = -\omega BS\cos(\omega t)$.

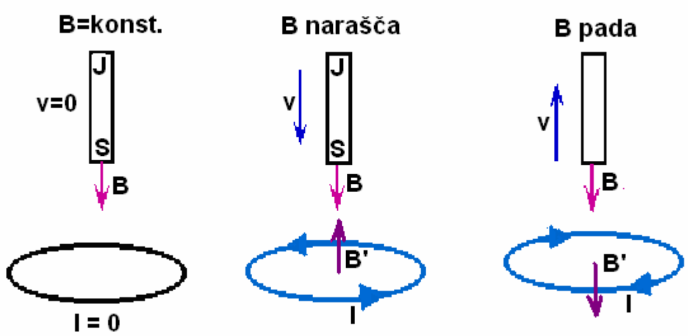
To pa je ravno enako negativni vrednosti časovnega odvoda $d\Phi_m/dt$:

$U_i = -d\Phi_m/dt$.

Indukcijo opazimo tudi, ko zanka miruje. Če ji tedaj približamo paličast magnet izmerimo inducirano napetost. Te napetosti ne moremo razložiti s silo na električne naboje, ki se gibljejo v magnetnem polju. Inducirana napetost je tudi v tem primeru enaka negativni vrednosti časovnega odvoda magnetnega polja. Zvezo

$U_i = -d\Phi_m/dt$

imenujemo indukcijski ali Faradayev zakon in velja splošno. Tudi Lenzovo pravilo lahko zapišemo v bolj splošni obliki. Inducirani tok steče v taki smeri, da nasprotuje spremembem, ki so povzročile njegov nastanek. Pravilo ilustrira naslednja slika.



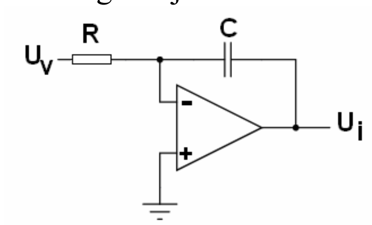
V primeru, ko trajni magnet miruje, je tok po ovoju nič. Ko se magnet približuje ovoju, narašča gostota magnetnega polja B na mestu ovoja. Pri tem se v ovoju inducira tok. Gostota magnetnega polja induciranega toka B' ima nasprotno smer kot B. Ko se trajni magnet oddaljuje od ovoja se B na mestu ovoja zmanjšuje.Pri tem se v ovoju inducira tok v taki smeri, da ima B' isto smer kot B.

Magnetni pretok skozi tuljavo z N ovoji je enak $\Phi_m = N\vec{B}\vec{S}$. Pri spreminjanju magnetnega pretoka se med koncema tuljave inducira napetost, ki je po Faradayevem zakonu enaka $-d\Phi_m/dt$. Na osnovi indukcije delujejo generatorji izmenične električne napetosti v elektrarnah, avtomobilih, na kolesih... V dinamu kolesa se vrti trajni magnet. V mirujočih tuljavah, skozi katere se zaradi vrtenja magneta spreminja magnetni pretok, se inducira izmenična napetost, ki požene tok skozi žarnico.

Z merjenjem sunka inducirane napetosti $\int U_i dt$ izmerimo spremembo magnetnega pretoka $\Delta\Phi_m = \Delta(N\vec{B}\vec{S})$ skozi tuljavo. Velja namreč

$$\Delta\Phi_m = -\int U_i dt.$$

Sunek napetosti izmerimo z integratorjem.



Izhodna napetost integratorja U_i je enaka integralu vhodne napetosti U_v po času pomnoženem z (-1/RC).

V statičnem električnem polju smo zapisali zvezo

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = 0.$$

V spremenljivem magnetnem polju smo dobili zvezo

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Slednja zveza velja v splošnem.

V časovno spremenljivem električnem in magnetnem polju je treba spremeniti tudi Amperov zakon. Kot primer si oglejmo ploščat kondenzator, na katerega je priključen vir časovno odvisne električne napetosti U(t). Pri tem teče po žicah na plošči kondenzatorja tok I(t) = de/dt = SdD/dt. Integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti okrog žice je skladno z Amperovim zakonom enak I(t). Med ploščama kondenzatorja ni električnega toka, okrog kondenzatorja pa so zaključene magnetne silnice, na katerih se jakost magnetnega polja ne razlikuje od jakosti magnetnega polja na sosednjih silnicah, ki objemajo električni tok I. Tam lahko zapišemo

$$\oint \vec{H}d\vec{s} = S\frac{dD}{dt} = \frac{d\Phi_e}{dt}.$$

Vpeljali smo premikalni tok

$I_p = d\Phi_e/dt$,

ki je enak časovnemu odvodu električnega pretoka skozi zanko. V splošnem velja

$$\oint \vec{H}d\vec{s} = I + \frac{d\Phi_e}{dt}.$$

Zdaj lahko zapišemo osnovne enačbe elektrodinamike, Maxwellove enačbe:

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = e = \int \rho_e dV$$
$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$$
$$\oint \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$
$$\oint \vec{H}d\vec{s} = I + \frac{d\Phi_e}{dt} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

V prvi enačbi je na desni integral gostote električnega naboja po prostornini, ki jo zajema zaključena ploskev. V zadnjih dveh enačbah nastopa na desni integral po ploskvi, ki jo objema zaključena pot. Časovna odvoda $\vec{B}$ in $\vec{D}$ na danem mestu smo zapisali kot parcialna odvoda. Enačbe smo zapisali v integralski obliki. Z več znanja matematike jih boste pozneje prepisali v bolj prikladni diferencialni obliki.

Statično električno polje je brezvrtinčno, statično magnetno polje pa brezizvorno. Spremenljivo magnetno polje povzroči nastanek vrtincev (sklenjenih silnic) v električnem polju.

LASTNA INDUKCIJA, TULJAVA, NIHAJNI KROG

Vzemimo dolgo ravno tuljavo preseka S in dolžine l z N ovoji, po kateri teče tok I. V tuljavi je gostota magnetnega polja $B = \mu_0 NI/l$. Magnetni pretok skozi tuljavo je enak
$\Phi_m = NBS = (\mu_0 N^2 S/l)I = LI.$
Vpeljali smo induktivnost tuljave L, ki je v splošnem enaka $L = \Phi_m/I$. Za dolgo ravno tuljavo je induktivnost enaka
$L = \mu_0 N^2 S/l.$
Ocenimo lahko induktivnost toroidne tuljave s srednjim polmerom r, presekom S in N ovoji. Če tuljava ni debela je dovolj dober približek
$L = \mu_0 N^2 S/2\pi r.$
Sami lahko izračunate induktivnost toroidne tuljave s srednjim polmerom r in N ovoji. Presek tuljave naj bo kvadratne oblike s stranico a. Rezultat je
$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{2r + a}{2r - a} \right).$$
Enota za induktivnost je Vs/A = H (henry).

Ko se tok skozi tuljavo spreminja, se spreminja tudi magnetni pretok skozi tuljavo. Zato se med koncema tuljave inducira napetost
$U_i = -d\Phi_m/dt = -LdI/dt.$
V električnem vezju je padec napetosti na tuljavi U_L enak
$U_L = -U_i = LdI/dt.$

Pri naraščanju toka skozi tuljavo prejema tuljava delo. Moč na tuljavi je enaka
$P = U_L I = LIdI/dt.$
Ko tok zraste od nič na vrednost I prejme tuljava delo
$$A = \int Pdt = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

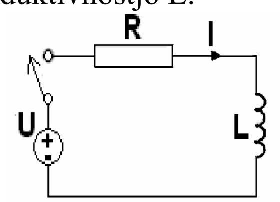
To delo tuljava v celoti vrne, zato je enako energiji tuljave W_L:
$W_L = LI^2/2$.

Za dolgo tuljavo izrazimo energijo tuljave z gostoto magnetnega polja ($I=Bl/\mu_0 N$):
$W_L = (B^2/2\mu_0)(Sl) = (BH/2)(Sl)$.
Tu je Sl = V prostornina tuljave oziroma prostora, v katerem je magnetno polje z gostoto B in jakostjo H. Podobno kot električnemu polju, tudi magnetnemu polju pripišemo energijo z gostoto w_m:
$w_m = B^2/2\mu_0 = \mu_0 H^2/2 = BH/2$.
Prva dva izraza veljata v vakuumu, zadnji pa tudi v snovi.

Izračunajmo energijo magnetnega polja v 1 dm^3, če je gostota magnetnega polja 10 T. Take gostote magnetnega polja dosežejo v superprevodnih magnetih. Velja:
$W_m = w_m V = (B^2/2\mu_0)V = 40$ kJ.

Tuljava in upornik

Priključimo na vir napetosti z gonilno napetostjo U zaporedno vezana upornik z uporom R in tuljavo z induktivnostjo L.

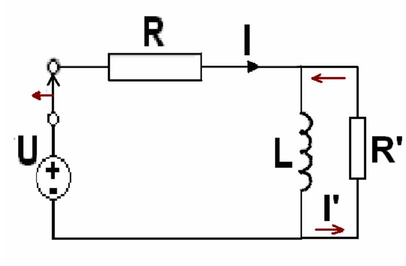


Ko priključimo vezje na vir napetosti, tok ne naraste hipoma. V začetku je tok enak nič. Padec napetosti na uporu je nič, na tuljavi pa U. Izračunamo lahko, kako hitro v začetku narašča tok. Iz zveze LdI/dt = U dobimo I = (U/L)t. Ko tok narašča se padec napetosti na uporniku povečuje, padec napetosti na tuljavi pa zmanjšuje, zato tudi tok počasneje narašča. Čez nekaj časa se tok umiri. Tedaj je padec napetosti na tuljavi enak nič (če smemo zanemariti upor žic), padec napetosti na uporniku pa U. Tok po vezju je tedaj U/R. Ocenimo lahko, po kolikšnem času se razmere v vezju umirijo. Značilni čas τ bomo ocenili kot čas, v katerem bi tok po vezju narastel na končno vrednost U/R, če bi ves čas naraščal enako hitro kot v začetku:
$(U/L)\tau = U/R$.
Iz tega dobimo $\tau = L/R$. Razmere v vezju se umirijo v nekaj značilnih časih τ.

Naredimo še račun. Po drugem Kirchoffovem izreku je vsota padca napetosti na uporniku UR = IR in padca napetosti na tuljavi UL = LdI/dt enaka gonilni napetosti vira:
$LdI/dt + IR = U$.
Splošna rešitev enačbe je
$I = U/R + Ae^{-t/\tau}$,
pri čemer je začilni čas τ enak kot v oceni, $\tau = L/R$, konstanta A pa je poljubna in jo določimo iz začetnih pogojev. V našem primeru tok ob času nič I(0) enak nič, zato je A = -U/R, časovni potek toka pa je enak
$I = U/R(1 - e^{-t/\tau})$.
V času τ naraste tok približno na 2/3 končne vrednosti, v času 5τ pa na 99.3%

Tuk skozi tuljavo se ne spremeni hipoma. S hitrimi spremembami toka so povezane visoke napetosti. Ko v prej opisanem vezju prekinemo tok, opazimo v sikalu iskro. V elektronskih vezjih za enosmerne tokove zaščitimo elemente tako, da vežemo vzporedno s tuljavo diodo, skozi katero tuljava požene tok ko vir napetosti odključimo. Visoko napetost, ki nastane ob prekinitvi toka skozi tuljavo izkoriščamo v avtomobilih za vžig zmesi bencina in zraka.

Obravnavajmo podoben primer kot prej, le da vzporedno s tuljavo vežemo upornik z uporom R'. Ko priključimo vir napetosti in se razmere v vezju umirijo, teče skozi upornik z uporom R in tuljavo tok I=U/R. Skozi upornik z uporom R' ni toka, saj je vezan vzporedno s tuljavo in je padec napetosti na njem enak nič.



Ko odključimo vir napetosti, požene tuljava tok I'=U/R skozi upornik z uporom R'. V tem trenutku je padec napetosti na tem uporniku enak U' = IR' = U(R'/R). Če je R'>>R, je tudi U'>>U.

Ko odključimo vir napetosti, deluje tuljava v vezju kot generator z gonilno napetostjo –LdI/dt. Po drugem Kirchoffovem izreku je ta enaka I'R':

-LdI'/dt = I'R'.

Pri začetnem pogoju I'(0) = U/R je rešitev enačbe

$I' = (U/R)e^{-t/\tau}$,

pri čemer je τ = L/R'.

Izmenična napetost

Ko priključimo tuljavo na vir izmenične napetosti

$U = U_0 sin(\omega t)$,

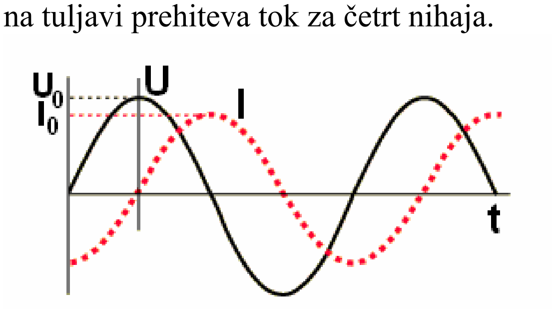
je padec napetosti na tuljavi enak U:

$LdI/dt = U_0 sin(\omega t)$.

Rešitev enačbe je

$I = -(U_0/\omega L)cos(\omega t)$.

Padec napetosti na tuljavi prehiteva tok za četrt nihaja.



Reaktanca tuljave je enaka

$X_L = U_0/I_0 = \omega L$.

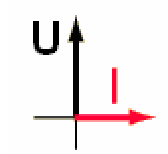
Reaktanca tuljave narašča z naraščajočo frekvenco.

Pri računanju s kompleksnimi impedancami pripišemo tuljavi reaktanco

$\widetilde{X}_L = i\omega L$

in računamo enako, kot smo opisali na primeru upornika in kondenzatorja.

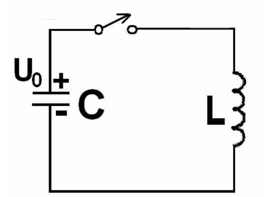
Na kazalčnem diagramu napetost na tuljavi prehiteva tok za 90^0,



amplitudi pa povezuje zveza $U_0 = I_0X_L = I_0\omega L$.

Nihajni krog

Nihajni krog je kombinacija kondenzatorja in tuljave. Vzemimo, da nabit kondenzator priključimo na tuljavo.



Tok po vezju narašča, napetost na kondenzatorju pa pada. Ko je napetost na kondenzatorju nič teče skozi ovoje tuljave največji tok. Nato tok še vedno teče v isti smeri. Kondenzator se polni z nasprotnim nabojem na elektrodah kot v začetku, dokler ni v nekem trenutku tok nič, napetost na kondenzatorju pa enaka kot v začetku, le obrnjena je. Nato se zgodba ponovi v nasprotni smeri.

Lotimo se nihanja tudi računsko. Kondenzator ima vlogo generatorja, zato velja e/C = LdI/dt in I = -de/dt. Drugi Kirchoffov izrek odvajamo po času in dobimo

$Ld^2I/dt^2 + I/C = 0.$

Dobili smo enačbo nedušenega harmonskega nihanja s krožno frekvenco

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Električni tok v vezju niha kot

$I(t) = I_0 sin(\omega t + \delta),$

padec napetosti na tuljavi, ki je enak napetosti na kondenzatorju pa kot

$U(t) = LdI(t)/dt = \omega LI_0 cos(\omega t + \delta) = U_0 cos(\omega t + \delta).$

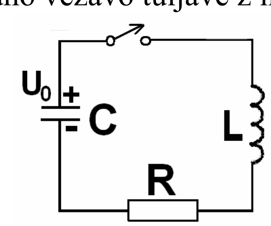
Tu sta I_0 ali U_0 in δ konstanti, ki ju določimo iz začetnih pogojev.

V našem primeru je U_0 začetna napetost nabitega kondenzatorja, faza δ pa je enaka nič. Napetost niha kot $U = U_0 cos(\omega t)$, tok pa kot $I = (U_0/\omega L) sin(\omega t)$.

V nedušenem nihajnem krogu se energija ohranja:

$W = LI^2/2 + CU^2/2 = LI_0^2/2 = CU_0^2/2 = konst.$

V realnem nihajnem krogu je treba upoštevati upor žic in izgube v dielektriku, lahko pa vanj tudi vežemo upornik. Oglejmo si primer, ko nabit kondenzator s kapaciteto C priključimo na zaporedno vezavo tuljave z induktivnostjo L in upornika z uporom R.

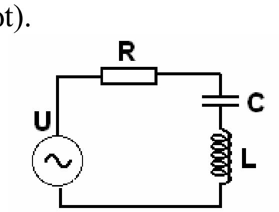


V tem primeru velja $e/C = LdI/dt + IR$. Z odvajanjem po času ($I = -de/dt$) dobimo enačbo
$Ld^2I/dt^2 + RdI/dt + I/C = 0.$
Enačbo delimo z L in preimenujemo člene:
$d^2I/dt^2 + 2\beta dI/dt + \omega_0^2 I = 0.$
Dobili smo enačbo dušenega nihanja, v kateri je $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ krožna frekvenca nedušenega nihajnega kroga, faktor dušenja β pa je enak $\beta = R/2L$. V primeru podkritičnega dušenja ($\beta<\omega_0$) je splošna rešitev enačbe
$I = I_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta)$,
pri čemer sta I_0 in δ poljubni konstanti, ki ju določimo iz začetnih pogojev, krožna frekvenca ω pa je enaka $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Razmerje
$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$
imenujemo kvaliteta (dobrota) nihajnega kroga. Manj ko je krog dušen, večja je njegova kvaliteta.

Kot vsakemu nihalu lahko tudi nihajnemu krogu vsiljujemo nihanje. Ponavadi vsiljujemo nihanje s frekvenco, ki je enaka lastni frekvenci nihajnega kroga. Vsiljujemo ga na ta način, da preko tuljave navijemo manjšo tuljavo, ki jo priključimo na vir izmenične napetosti. Lahko povežemo vir napetosti z nihajnim krogom preko kondenzatorja, ali pa namesto enega kondenzatorja vzamemo dva zaporedno vezana kondenzatorja in na enega priključimo vir napetosti itd. V podrobnosti se ne bomo spuščali, omenimo le, da je treba prilagoditi impedanco nihajnega kroga izhodni impedanci generatorja napetosti, ki je pogosto 50 Ω.

Na hitro obravnavajmo primer, ko magnetni pretok skozi tuljavo niha kot $\Phi_m=\Phi_0\cos(\omega t)$. V praksi tako nihanje povzročajo radijski valovi, magnetizacija atomskih jeder, ki precedira v magnetnem polju itd. Napetost, ki se pri tem inducira v tuljavi je enaka $U = -d\Phi_m/dt = \Phi_0\omega\sin(\omega t)$. Na tuljavo naj bosta zaporedno vezana kondenzator s kapaciteto C in upornik z uporom R. Upor R je lahko tudi upor tuljave. Vezje lahko obravnavamo kot zaporedno vezavo upornika, tuljave in kondenzatorja, ki so priključeni na vir izmenične napetosti z napetostjo
$U = \Phi_0\omega\sin(\omega t) = U_0\sin(\omega t)$.



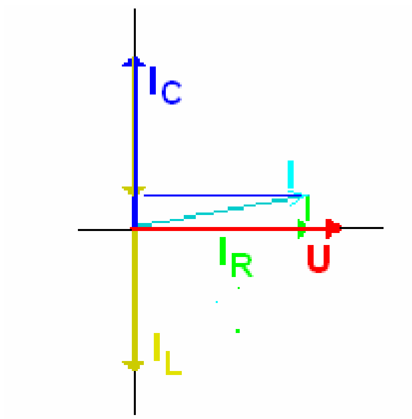
Računajmo z metodo kompleksnih impedanc. Impedanca vezja je enaka
$$\widetilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{i\varphi} = Ze^{i\varphi},$$
pri čemer je $\mathrm{tg}\varphi = (X_L - X_C)/R$. Kompleksni tok je enak
$\widetilde{I} = \widetilde{U}/\widetilde{Z} = (\Phi_0\omega/Z)e^{i(\omega t-\varphi)}$.
Tok po vezju je enak

$I = \mathrm{Im}(\widetilde{I}) = (\Phi_0 \omega / Z)\sin(\omega t - \varphi).$

V resonanci je $X_L = X_C$, Z=R in φ=0. Impedanca zaporedne vezave idealne tuljave in idealnega kondenzatorja je v resonanci enaka nič. Amplituda toka je v resonanci enaka $I_0 = \omega_0\Phi_0/R = (\Phi_0/L)Q$.

V resonanci je tok po vezju sorazmeren kvaliteti nihajnega kroga.

Oglejmo si še vezje, v katerem so vzporedno vezani upornik tuljava in kondenzator in priključeni na vir izmenične napetosti. Kazalčni diagram za ta primer kaže naslednja slika.



Na vseh treh elementih je napetost z amplitudo U_0 (rdeča poščica) enaka. Tok na plošče kondenzatorja prehiteva napetost v fazi za 90^0, njegova amplituda I_C pa je enaka $U_0\omega C$. Tok skozi tuljavo zaustaja v fazi za napetostjo za 90^0, njegova amplituda je enaka $I_L = U_0/\omega L$. Tok skozi upornik z amplitudo $I_R = U_0/R$ je v fazi z napetostjo.Vektorsko seštejmo vse tri amplitude tokov. Amplituda toka I_0 je enaka:

$$I_0 = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = U_0\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Impedanca vezja je dana z enačbo

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2},$$

tangens faznega kota pa je enak

$$tg\varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{R(\omega^2 LC - 1)}{\omega L}.$$

V resonanci je tok v fazi z napetostjo, impedanca vezja pa je enaka R. Če v vezju ni upornika je v resonanci impedanca vzporednega nihajnega kroga velika. Odvisna je od kvalitete nihajnega kroga. Enaka je

$$Z(\omega_0) = Q\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Spomnimo se, da je v resonanci impedanca zaporednega nihajnega kroga majhna:

$$Z(\omega_0) = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Za zaključek izračunajmo lastno induktivnost koaksialnega vodnika dolžine l. Polmer notranjega vodnika (žile) naj bo a, notranji polmer plašča pa b. Po žili in plašču naj tečeta enaka tokova velikosti I v nasprotnih smereh.

Zunaj vodnika ni magnetnega polja. Tok, ki teče skozi poljubno zaključeno zanko, ki objema vodnik je nič: I + (-I) = 0. Magnetno polje je od nič različno v žili in plašču in med njima.Silnice so krogi. Predpostavili bomo, da je razdalja med žilo in plaščem, b-a, dosti večja od polmera žile a in od debeline plašča. Zato bomo izračunali samo magnetni pretok skozi ploskev med žilo in plaščem. Gostota magnetnega polja je tam

$B = \mu_0 I/2\pi r$,

pri čemer je r oddaljenost od osi. Magnetni pretok v koaksialnem vodniku je enak

$$\Phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln(b/a).$$

Induktivnost izračunamo iz zveze

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln(b/a).$$

Za vajo izračunajte induktivnost kabla, ki je sestavljen iz dveh vzporednih vodnikov polmera r, med katerima je razdalja d (r<<d). Dolžina kabla je l, po vodnikih pa tečeta enaka tokova v nasprotnih smereh. Izračunajte magnetni pretok skozi ploskev med vodnikoma. Po pravilnem računu dobite

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\left(\frac{d-r}{r}\right).$$

SNOV V MAGNETNEM POLJU

Ko magnetu približamo železen predmet občutimo močno privlačno silo. Podoben pojav opazimo ko naelektreni palici (ali glavniku) približamo košček papirja, vlakna, ali lase. V primeru dielektrikov pojav brez težav razumemo. Električno polje polarizira snov. Vzemimo, da je naelektrena palica negativna. Pozitivni naboji dipolov so obrnjeni proti palici in so bliže palici kot negativni naboji. Ker je električno polje v okolici palice nehomogeno in z oddaljenostjo od palice električna poljska jakost pada, je privlačna sila na pozitivni naboj večja od odbojne sile na negativni naboj. Rezultanta sil je privlačna. Izračunajmo to silo. Usmerimo os x v sneri dipola proti palici. Naj bo koordinata negativnega naboja dipola x, pozitivnega pa x+d, pri čemer je d razdalja med nabojema. Rezultanta sil je enaka

$F = eE(x+d) - eE(x) \approx eddE/dx = p_e dE/dx$.

Privlačna sila je enaka produktu dipolnega momenta p_e in odvoda električne poljske jakosti v smeri dipolnega momenta.

Do enakega rezultata pridemo s pomočjo energijo dipola. Ta je v našem primeru enaka

$W = -p_e E$. Sila je enaka negativni vrednosti odvoda energije po koordinati:

$F = -dW/dx = p_e dE/dx$.

S pomočjo energije magnetnega dipola, ki se orientira vzdolž magnetnih silnic pridemo do podobnega rezultata. Tam je $W = -p_m B$, sila pa

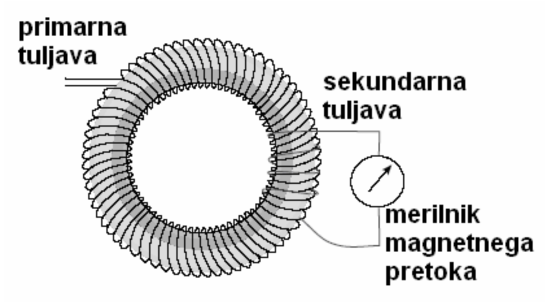
$F = p_m dB/dx$.
Na magnetne dipole v kosu železa, ki se orientirajo v magnetnem polju v smeri magnetnih silnic deluje močna privlačna sila. Na železo in nekatere druge snovi, ki jih imenujemo feromagnetne snovi, deluje v nehomogenem magnetnem polju močna privlačna sila. Na aluminij in druge paramagnetne snovi deluje v nehomogenem magnetnem polju šibka privlačna sila. V nehomogenem magnetnem polju pa opazimo nekaj, česar v nehomogenem električnem polju ne opazimo in to je odbojna sila. Odbojna sila na nekatere snovi je sicer šibka, a merljiva. Najbolj značilna predstavnika teh – diamagnetnih – snovi sta bizmut in pirolitski grafit. Tanka rezina pirolitskega grafita lahko celo lebdi nad permanentnim magnetom iz redkih zemelj. Pojav imenujemo levitacija.

Odbojna sila na diamagnetne snovi je povezana z mikroskopskimi elektronskimi tokovi. Zunanje magnetno polje spremeni te tokove in s tem inducira magnetne dipole. Po Lenzovem pravilu so ti dipoli usmerjeni v nasprotni smeri kot magnetne silnice. Posledica tega je odbojna sila.

Paramagnetne in feromagnetne snovi so povezane z elektronskimi magnetnimi momenti. Kot že omenjeno, imajo magnetne momente tudi atomska jedra, a ti so za tri rede velikosti manjši od elektronskih. Magnetni moment opazimo pri velikem številu atomskih jeder. Če ga običajno jedro atoma kakega elementa nima, ga ima pogosto kak bolj redek izotop, n. pr. ^{13}C, ^{17}O, ^{33}S... Elektronske magnetne momente v snoveh redkeje opazimo. Elektroni večinoma nastopajo v parih tako, da se magnetna momenta elektronov kompenzirata. V paramagnetnih snoveh (Al, Mg, Ba, Ca, Cr, W, $CuCl_2$, O_2,...) elektronski magnetni momenti niso povsem kompenzirani in se v magnetnem polju deloma urede vzdolž magnetnih silnic. V čistih feromagnetnih snoveh (Fe, Co, Ni, Gd, Dy...) in zlitinah so zaradi močnega medsebojnega vpliva magnetni momenti urejeni znotraj domen. V magnetnem polju se premikajo domenske stene. Pri tem naraščajo domene, v katerih so magnetni momenti orientirani v smeri magnetnih silnic, manjšajo pa se domene, v katerih so magnetni momenti orientirani v nasprotni smeri. Pri segrevanju feromagnetnega materiala pride do faznega prehoda v paramagnetno fazo. Temperaturo faznega prehoda imenujemo Curiejeva temperatura. T_C. Curiejeve temperature nekaterih feromagnetnih snovi podaja naslednja tabela.

snov	**T_C [K]**
železo	1043
kobalt	1388
nikelj	627
gadolinij	292
disprozij	88

Kvantitativno opišemo magnetne lastnosti snovi z zvezo mad gostoto magnetnega polja B in jakostjo magnetnega polja H. Izmerimo jo lahko z Rowlandovim toroidom. Iz snovi, katere lastnosti nas zanimajo, naredimo obroč, okrog pa enakomerno navijemo dve toroidni tuljavi.



Spremenimo tok skozi primarno tuljavo in pri tem merimo sunek napetosti v sekundarni tuljavi. Primarna tuljava naj ima N_1, sekundarna pa N_2 ovojev. Ko teče po primarni tuljavi tok I, je jakost magnetnega polja v jedru H enaka
$H = N_1 I/2\pi r$.
Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je toroid tanek. V tem primeru je r srednji polmer toroida. Ko spremenimo tok skozi primarno tuljavo za ΔI, se jakost magnetnega polja spremeni za ΔH:
$\Delta H = N_1 \Delta I/2\pi r$.
Pri tem se spremeni gostota magnetnega polja za ΔB. Spremembo gostote magnetnega polja izmerimo kot sunek napetosti na sekundarni tuljavi:
$$\int U dt = \int N_2 S \frac{dB}{dt} dt = N_2 S \Delta B.$$
Začnemo pri H=0 (I=0). V majhnih korakih spreminjamo H in pri vsakem koraku (ΔH) izmerimo sunek napetosti in izračunamo spremembo gostote magnetnega polja (ΔB). Na ta način dobimo zvezo med B in H.

V paramagnetnih in diamagnetnih snoveh je zveza med B in H linearna:
$B = \mu\mu_0 H$.
Tu je μ magnetna permeabilnost snovi, ki je za paramagnetne snovi večja od 1, za diamagnetne pa manjša od 1. V vakuumu je $\mu = 1$.

V elektrotehniki označujejo magnetno permeabilnost z μ_r in jo imenujejo relativna magnetna permeabilnost. Z μ označujejo produkt $\mu\mu_r$, ki ga imenujejo magnetna permeabilnost.

Razliko μ-1 za nekatere paramagnetne snovi pri sobni temperaturi podaja naslednja tabela.

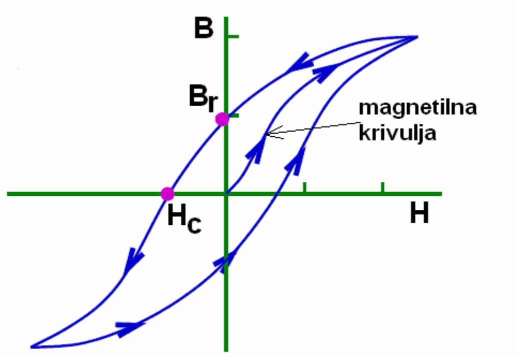
paramagnetna snov	**$\mu - 1$**
aluminij	$2.3\ 10^{-5}$
titan	$7.1\ 10^{-5}$
natrij	$0.72\ 10^{-5}$
krom	$33\ 10^{-5}$
platina	$26\ 10^{-5}$
volfram	$6.8\ 10^{-5}$
kisik (1 bar)	$0.19\ 10^{-5}$

Razlika 1-μ izmerjena pri sobni temperaturi je za nekaj diamagnetnih snovi podana v naslednji tabeli.

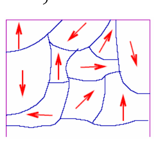
diamagnetna snov	1-μ
helij (1bar)	$1\ 10^{-9}$
argon (1bar)	$1.0\ 10^{-8}$
zlato	$3.6\ 10^{-5}$
baker	$1.0\ 10^{-5}$
diamant	$2.1\ 10^{-5}$
grafit	$1.6\ 10^{-5}$
bizmut	$1.7\ 10^{-5}$
živo srebro	$3.0\ 10^{-5}$

Mimogrede omenimo, da je »idealna« diamagnetna snov suprprevodnik. V superprevodniku ni magnetnega polja. Pojav se imenuje Meissnerjev pojav. Ko približamo superprevodniku magnet, se v njem inducira električni tok, ki kompenzira spremembo magnetnega pretoka. Zaradi upora nič ta tok ne zamre. Superprevodnik se torej obnaša kot snov z $\mu = 0$.

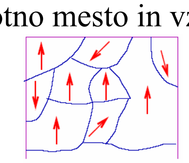
Pri feromagnetnih snoveh je zveza med B in H bolj zapletena. Pri prvi meritvi nenamagnetenega vzorca dobimo magnetilno krivuljo, potem pa histerezno krivuljo.



Pri naraščanjem H se premikajo domenske stene, dokler vzorec ni popolnoma namagneten. Tedaj (v nasičenju) je gostota magnetnega polja B_n. Ko potem H zmanjšamo na nič, se domenske stene ne vrnejo na prvotno mesto in vzorec ostane namagneten.

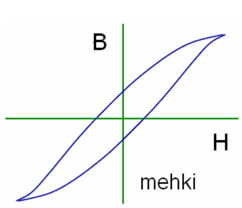


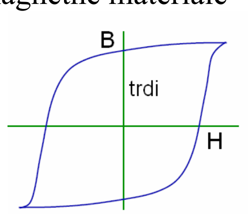
nenamagneten vzorec



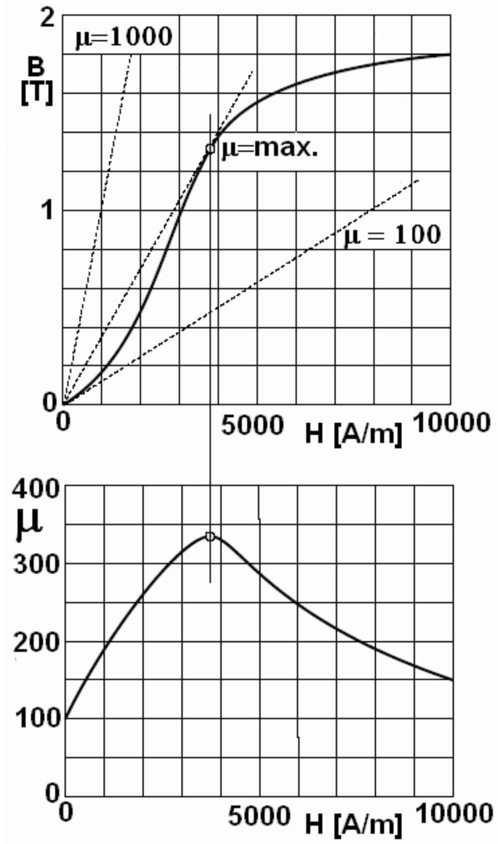
namagneten vzorec

Gostoto magnetnega polja v jedru pri H=0 imenujemo remanentna gostota B_r. Da postane B=0, je potrebna koercitivna jakost magnetnega polja H_k v nasprotni smeri. V splošnem ločimo »trde« in »mehke« magnetne materiale





Mehki magnetni materiali imajo majhno remanentno gostoto in majhno koercitivno jakost. Namenjeni so za izdelavo jeder dušilk in transformatorjev ter za magnetno zaščito. Naslednja slika kaže magnetilno krivuljo in magnetno permeabilnost $\mu=B/\mu_0H$ tipičnega mehkega feromagnetnega materiala.



Podatki za nekaj značilnih mehkih feromagnetnih materialov so zbrani v naslednji tabeli.

Snov	**μ začetna**	**μ največja**	**H_k [A/m]**	**B_r [T]**	**B_n [T]**
železo (99.8 %)	150	5000	100	1.3	2.15
kobalt (99%)	70	250	800	0.5	-
nikelj (99%)	110	600	60	0.4	-
permaloj	10^4	10^5	4	0.7	1.6
supermaloj	10^5	10^6	0.2	0.7	0.8
mumetal	$8\ 10^4$	$3\ 10^5$	4	0.4	0.65
NiZn ferit	100-1000	-	30	-	0.3

Permaloj, supermaloj jn mumetal so zlitine na osnovi niklja, železa in še nekaterih kovin. NiZn ferit je primer keramičnega feritnega materiala na osnovi ferita FeO_2, Ni in Zn. Feritni materiali so sestavljeni iz drobnih feromagnetnih delcev in imajo velik specifični upor.

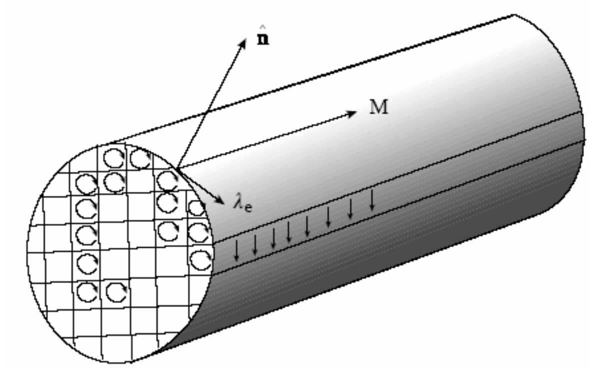
Trde feromagnetne materiale uporabljajo za izdelavo trajnih magnetov in magnetnih spominskih elementov. Nekaj podatkov za trde magnetne materiale je zbranih v naslednji tabeli.

Snov	**T_c [^{0}C]**	**B_r [T]**	**H_k [kA/m]**
$Nd_2Fe_{14}B$	310	1.2	800
Sm_2Co_{17}	825	1.15	700
$SmCo_5$	750	0.83	600
Alnico	860	1.15	47
Sr ferit	450	0.4	250
γ-Fe_2O_3 + Co	-	0.076	50

Alnico je zlitina iz Al, Ni, Co in še nekaterih lementov. Fe_2O_3 obstoja v več kristalografskih fazah in faza, ki jo imenujemo faza γ je feromagnetna. Dodatek kobalta izboljša feromagnetne lastnosti. Snov se uporablja v računalniških trdih diskih.

Magnetizacija

V namagneteni snovi so magnetni dipolni momenti orientirani vzdolž magnetnega polja. Predstavljamo si jih lahko kot množico mikroskopskih tokov I, ki tečejo po zaključenih zankah s ploščino S'.



Znotraj snovi se tokovi med seboj kompenzirajo. Ostane samo tok, ki teče po površini. Če označimo dolžino dipola z d, je vzdolžna gostota površinskega toka j enaka
$j = dI/dx = I/d.$
Os x ima smer gostote magnetnega polja. Vzemimo, da ima namagnetena snov obliko dolgega valja z dolžimo l in osnovno ploskvijo $S = \pi r^2$. Tedaj je tok, ki teče po površini valja, enak jl, gostota magnetnega polja v valju pa
$B = \mu_0 jl/l = \mu_0 j.$
Uporabili smo enačbo za dolgo tuljavo in skupni tok vseh ovojev NI nadomestili s površinskim tokom jl.

Definirajmo magnetizacijo M na podoben način, kot smo v elektrostatiki definirali polarizacijo P. Naj bo magnetizacija vsota vseh mikroskopskih magnetnih momentov deljena s prostornino vzorca:

$$M = \frac{1}{V}\sum_i p_{mi} = \frac{NIS'}{V}.$$

Z N smo označili število mikroskopskih magnetnih dipolov v palici, IS' pa je magnetni moment mikroskopskega dipola. Število N je enako:

$N = (l/d)(S/S')$.

Vstavimo ta izraz v enačbo za magnetizacijo pa dobimo

$M = I/d = j$.

Velja torej zveza

$B = \mu_0 M$.

Model površinskega toka pogosto uporabljamo za opis trajnih magnetov, pri čemer je vzdolžna gostota površinskega toka enaka magnetizaciji.

Ko je prisotno tudi zunanje magnetno polje, velja v izotropnih snoveh v splošnem zveza

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}.$$

V paramagnetnih in diamagnetnih snoveh velja zveza $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$. Tam je magnetizacija enaka

$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H} = \chi \vec{H}.$$

S χ smo označili magnetno susceptibilnost snovi. V paramagnetnih snoveh je magnetna susceptibilnost obratno sorazmerna absolutni temperaturi. To dejstvo je znano kot Curiejev zakon in je povezano z Maxwell-Boltzmannovo porazdelitvijo magnetnih dipolov po energiji v magnetnem polju.

Zvezo $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$ lahko kot približek uporabimo tudi pri mehkih feromagnetnih snoveh. Zavedati pa se moramo, da ta zveza približno velja, dokler je gostota magnetnega polja B manjša od gostote magnetnega polja v nasičenju B_n. Tudi vrednost za μ je v tem primeru le približna, saj se v splošnem μ spreminja s H.

B in H na meji dveh snovi

V primeru, ko lahko premikalni tok zanemarimo, veljata naslednji Maxwellovi enačbi:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I.$$

Če na meji dveh snovi ni (pravega) površinskega toka, je tudi drugi integral enak nič.

Kot zaključeno ploskev na meji dveh sredstev vzemimo plosko »škatlo« , katere ena ploskev velikosti S je v prvem sredstvu, druga enako velika ploskev pa v drugem sredstvu. Ploskvi naj bosta vzporedni z mejo med sredstvoma . V tem primeru velja

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \vec{B}_1 \vec{S} + \vec{B}_2(-\vec{S}) = B_{1n} S - B_{2n} S = 0.$$

Projekciji gostote magnetnega polja na pravokotnico na mejo sta tik ob meji v obeh sredstvih enaki:

$B_{1n} = B_{2n}$.

Zaključena pot naj bo tanka zanka, katere polovica z dolžino l poteka tik ob meji v prvem sredstvu, enako dolga polovica poti pa poteka v nasprotni smeri po drugem sredstvu. Če na meji ni toka velja

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \vec{H}_1 \vec{l} + \vec{H}_2(-\vec{l}) = H_{1t} l - H_{2t} l = 0.$$

Tangentni projekciji jakosti magnetnega polja sta tik ob meji v obeh sredstvih enaki:

$H_{1t} = H_{2t}$.

Feromagnetno jedro

Navijmo okrog zaključenega feromagnetnega jedra z dolžino l in presekom S tuljavo z N ovoji. Tudi če smo tuljavo navili samo okrog dela jedra, se silnice zaključijo v jedru. Jakost magnetnega polja v jedru bomo izračunali z Amperovim zakonom:

$Hl = NI$.

Pri računanju gostote magnetnega polja bomo predpostavili, da velja zveza $B = \mu\mu_0 H$, pri čemer je magnetna permeabilnost m odvisna od snovi iz katere je jedro in je tipično reda velikosti 10^4. Gostota magnetnega polja v jedru je enaka

$B = \mu\mu_0 NI/l$.

Tu je l dolžina jedra in ne tuljave. Induktivnost tuljave je enaka

$L = \Phi_m/I = NBS/I = \mu\mu_0 N^2 S/l$.

Induktivnost tuljave je v primerjavi z enako tuljavo brez jedra močno narastla. Pri enakem toku narate tudi energija tuljave $W_L = LI^2/2$.

Ko priključimo tuljavo na vir izmenične napetosti pride v njej do histereznih izgub. Moč na tuljavi je enaka

$P = UI = (NSdB/dt)(Hl/N) = (lS)HdB/dt = VHdB/dt$.

Tu je V = lS prostornina jedra. Delo, ki ga prejme tuljava v eni periodi napetosti je enako

$$A = \int_0^{t_0} VH\frac{dB}{dt}dt = V\oint HdB.$$

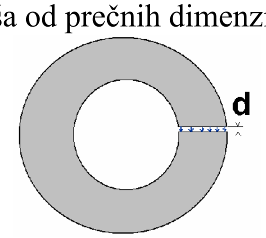
Drugi integral pa je ravno ploščina histerezne krivulje. Za premikanje domenskih sten je torej v eni periodi potrebno delo, ki je enako prostornini jedra pomnoženi s ploščino histerezne zanke. Povprečna moč, ki jo troši jedro je enaka

$$P = \frac{A}{t_0} = \frac{V}{t_0}\oint HdB = \nu V\oint HdB.$$

Moč zaradi histereznih izgub narašča z naraščajočo frekvenco in s ploščino histerezne zanke. Zato mora biti pri mehkih magnetnih materialih ploščina histerezne zanke čim manjša.

Jedro tuljave mora biti narejeno tako, da po njem ne tečejo inducirani tokovi. Zato je narejeno iz lankih lističev, ki so med seboj električno izolirani. Lahko je to tudi navita pločevina, ki je na eni strani prevlečena s plastjo izolatorja. Pri višjih frekvencah izmenične napetosti to ni dovolj. Tedaj uporabljajo feritna jedra.

Če v jedru tuljave naredimo režo, se induktivnost tuljave spremeni. Vzemimo, da je širina reže d dosti manjša od prečnih dimenzij jedra.



V tem primeru je gostota magnetnega polja v jedru B_j enaka gostoti magnetnega polja v reži B_r: $B_j = B_r = B$. Normalna komponenta gostote magnetnega polja se na meji dveh snovi ohranja. Jakosti magnetnega polja sta seveda različni:

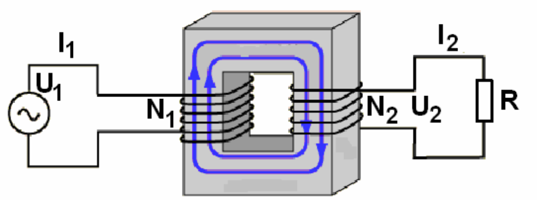
$\mu\mu_0 H_j = \mu_0 H_r = B$.

Izrazimo ju z B: $H_j = B/\mu\mu_0$, $H_r = B/\mu_0$. Po Amperovem zakonu dobimo
$H_j l + H_r d = Bl/\mu\mu_0 + Bd/\mu_0 = NI$.
Iz te enačbe izračunamo gostoto magnetnega polja:
$B = \mu\mu_0 NI/(l + \mu d)$.
Zaradi velike vrednost μ je že pri majhnem d pogosto $\mu d >> l$. V tem primeru je gostota magnetnega polja v jedru in reži približno enaka
$B \approx \mu_0 NI/d$.
Odvisna je od širine reže, ni pa odvisna od magnetne permeabilnosti jedra.

Induktivnost tuljave, ki ima jedro s tanko režo je v splošnem enaka
$L = NBS/I = \mu\mu_0 N^2 S/(l+\mu d) \approx \mu_0 N^2 S/d$.
V elektrotehniki pogosto uporabljajo tuljave z režami. Pri tem se znebijo odvisnosti induktivnosti tuljave od magnetne permeabilnosti, s tem pa odvisnosti induktivnosti .od temperature in amplitude električnega toka.

Na podoben način deluje elektromagnet. Tudi tu je jedro, ki pa je lahko homogeno in narejeno iz polnega materiala, prekinjeno. V reži dobimo močno magnetno polje. Pola magneta imata pogosto obliko prisekanega stožca. Silnice ostajajo v jedru. Ker se magnetni pretok $\Phi_m = BS$ ohranja, se proti reži povečuje gostota magnetnega polja. V primeru železnega jedra dosežemo na ta način največjo gostoto magnetnega polja okrog 2T.

Za zaključek poglavja si oglejmo transformator. Na skupnem feromagnetnem jedru sta naviti dve tuljavi: primarna z N_1 ovoji in sekundarna z N_2 ovoji. Na primarno tuljavo priključimo generator izmenične napetosti, na sekundarno pa porabnik.



Gostoto magnetnega polja, ki jo v jedru povzročata tokova po obeh tuljavah označimo z B. Padec napetosti na primarni tuljavi $N_1 SdB/dt$ je enak napetosti generatorja U_1. Med koncema druge tuljave se inducira napetost $N_2 SdB/dt$ in ta je enaka padcu napetosti na porabniku U_2. S je presek jedra. Velja torej
$U_2/U1_P = U_{2ef}/U_{1ef} = N_2/N_1$.
Če so izgube v transformatorju, ki so posledica upora žic, histereznih izgub in induciranih tokov v jedru, majhne, jih zanemarimo. V tem primeru je moč $U_{1ef}I_{1ef}$, ki jo transformator prejema od vira napetosti, enaka moči $U_{2ef}I_{2ef}$, ki jo oddaja porabniku. Razmerje tokov je enako
$I_{2ef}/I_{1ef} = N_1/N_2$.
Izračunajmo še vhodni upor R_V transformatorja, če je porabnik upornik z uporom R. Vhodni upor je enak
$R_V = U_{1ef}/I_{1ef} = (U_{2ef}/I_{2ef})(N_1/N_2)^2 = R(N_1/N_2)^2$.

Transformator uporabljamo za povečevanje in zmanjševanje amplitude izmenične električne napetosti z zanemarljivimi izgubami. To je pomermbno pri prenosu električne energije na velike razdalje, ko upor žic daljnovoda ni zanemarljiv. Uporabljamo ga tudi za prilagajanje impedanc.