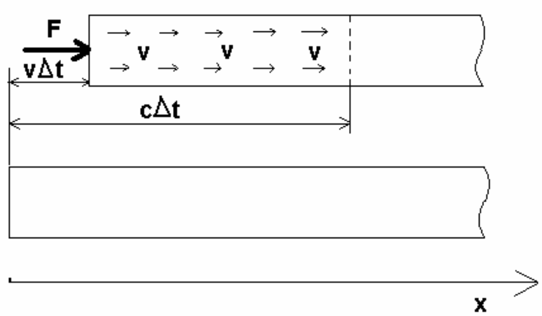
ŠIRJENJE MOTENJ V ELASTIČNIH SREDSTVIH, VALOVNA ENAČBA

Mehansko valovanje predstavlja širjenje motenj po sredstvu, pri čemer se deli snovi ne premaknejo dosti. Valovi na vodi prepotujejo velike razdalje, gibanje delov vode pa je omejeno na majhne razdalje reda velikosti višine vala. Tudi zvok se širi daleč, deli zraka pa se pri tem malo premaknejo. Tudi motnja na struni prepotuje celo struno, deli strune pa se pri tem malo premaknejo.

Valovanja so longitudinalna ali transverzalna. Pri longitudinalnih valovanjih se premikajo deli snovi v smeri širjenja valovanja. Pri tem nastajajo razredčine in zgoščine. Pri transverzalnih valovanjih se deli snovi premikajo v prečni smeri. Zvok je longitudinalno valovanje, valovanje na vodi in valovanje na struni pa sta transverzalni valovanji. Tudi elektromagnetno valovanje je transverzalno valovanje, le da tu v prečni smeri valujeta električna poljska jakost in gostota magnetnega polja.

Valovanje se lahko širi v eni, dveh ali treh razsežnostih. Zvok se v splošnem širi v treh razsežnostih. Valovi na vodi se širijo v dveh razsežnostih, valovanje na struni, palici ali v cevi se širi v eni razsežnosti.

Izračunajmo najprej, s kolikšno hitrostjo se širijo longitudinalne motnje v elastičnih sredstvih. Vzemimo dolgo palico s presekom S, ki je narejena iz snovi z gostoto ρ in prožnostnim modulom E. Naj začne ob času nič na en konec palice delovati vzdolžna sila F, zaradi katere se začne konec palice premikati s hitrostjo v.



V času Δt se konec palice premakne za vΔt, motnja pa prepotuje po palici razdaljo cΔt. Deli palice od prijemališča sile F do meje, do katere je pripotovala motnja, se gibljejo s hitrostjo v. Ostali deli palice mirujejo. Zapišimo izrek o gibalni količino:

$F\Delta t = \Delta mv = \rho Sc\Delta tv.$

Krajšajmo enačbo z Δt pa dobimo

$F = \rho Scv.$

Del palice, do koder je pripotovala motnja je skrčen. Dolžina tega dela je cΔt, skrček pa vΔt. Zapišimo enačbo za vzdolžno deformacijo:

$F/S = E(\Delta l/l) = E(v\Delta t/c\Delta t) = E(v/c).$

Izenačimo razmerje F/vS iz obeh enačb:

$F/vS = \rho c = E/c.$

Iz tega dobimo $c^2 = E/\rho$. Vzdolžne motnje se vzdolž palice širijo s hitrostjo

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,.$$

Dobili smo hitrost širjenja vzdolžne motnje v trdni snovi v splošnem, ne samo po palici.V trdnih snoveh je c običajno nekaj km/s.

V tekočinah je prožnostna konstanta stisljivost χ. Če naredimo enak račun kot prej za tekočino, ki je zaprta v dolgi cevi in jo na enem koncu omejuje gibljiv bat dobimo hitrost širjenja vzdolžnih motenj v tekočinah:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi}}\,.$$

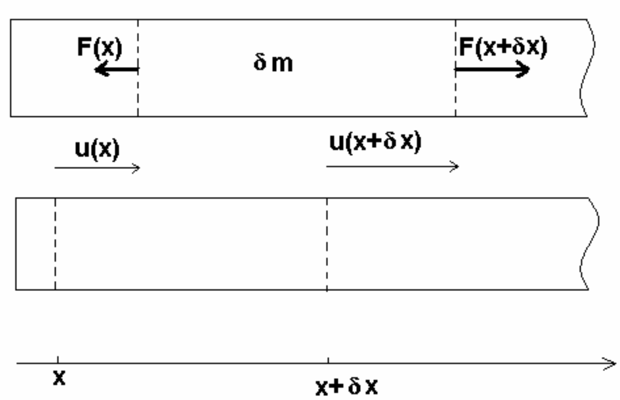
Pri plinih moramo vzeti izentropno stisljivost $\chi = 1/\kappa p$, ker plin v času trajanja motnje ne more izmenjati toplote z okolico. Hitrost širjenja vzdolžnih motenj (zvoka) v plinu je torej

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}.$$

Hitrost zvoka v plinih je odvisna od vrste plina (M), šibko pa je tudi odvisna od temperature. Zanimivo je, da je ta hitrost istega reda velikosti, kot hitrost gibanja molekul.

Omeniti je treba, da se v tekočinah lahko širijo le longitudinalne motnje.

Vrnimo se k dolgi palici. Vzdolž palice usmerimo os x . Del palice, ki je imel v mirovanju koordinato x, se zaradi motnje, ki potuje po palici ob času t premakne za u(x, t). Odmik u je v splošnem odvisen od kraja in časa. Poglejmo ob času t del palice, ki je bil v nirovanju med x in x+δx. Odmika koncev tega dela palice sta ob času t enaka u(x+δx,t) in u(x,t).



V splošnem elastična sila, ki deluje na izbrani del palice ni enaka nič. V poglavju o elastičnih deformacijah smo ugotovili, da lahko v enačbi F/S = EΔl/l razmerje Δl/l nadomestimo z du/dx. Na meji izbranega dela palice, ki je bila v mirovanju pri x+δx deluje v smeri osi x sila $F(x+\delta x) = ES\partial u(x+\delta x, t)/\partial x$. Zapisali smo parcialni odvod, ker je u funkcija dveh spremenljivk. Na mejo, ki je bila v mirovanju pri x, deluje v smeri

–x sila $F(x) = ES\partial u(x,t)/\partial x.$ Na izbrani del palice deluje torej ob času t vzdolž x osi sila

$$F = F(x+\delta x,t) - F(x,t) = ES\left(\frac{\partial u(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \approx ES\delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Zadnji izraz smo zapisali ob predpostavki, da je δx majhen. Vzemimo, da je δx zelo majhen, δx = dx, in zapišimo za izbrani del palice drugi Newtonov zakon:

$$ESdx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \delta ma = \rho Sdxa = \rho Sdx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Krajšajmo začetek in konec enačbe z Sdx in delimo z E ter imenujmo $c^2=E/\rho$. Dobili smo valovno enačbo v eni razsežnosti

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Valovno enačbo enake oblike dobimo tudi za širjenje motenj v tekočinah.

Rešitev te enačbe je motnja, ki se širi vzdolž osi x s hitrostjo c:

u(x,t) = f(t-x/c).

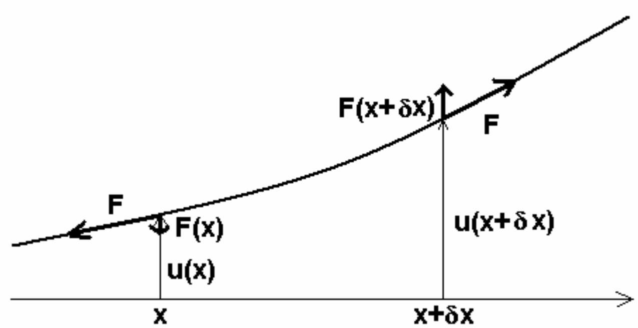
Pri tem je f poljubna funkcija argumenta t-x/c. Odmik u=f(0), ki smo ga opazili ob času 0 pri x=0, bomo pri x=a opazili ob času a/c

Druga rešitev valovne enačbe je motnja, ki se s hitrostjo c širi v smeri –x.:

u(x,t) = f(t+x/c).

Tudi tu je f poljubna funkcija argumenta t+x/c. Motnjo u=f(0), ki jo ob času nič opazimo pri x=0, opazimo ob času t pri x = -ct.

Izpeljimo še valovno enačbo za struno. Struno naj napenja sila F. Vzdolž nemotene strune naj poteka os x. Oglejmo si del strune med x in x+δx z maso δm. Ob času t je odmik pri x enak u(x), odmik pri x +δx pa u(x+δx).



Sila na izbrani del strune v prečni smeri je enaka razliki projekcij sile vzdolž strune na to smer F(x+δx) – F(x). Po drugem Newtonovem zakonu je ta sila enaka dma, pri čemer je a pospešek izbranega dela strune v prečni smeri. Zopet vzemimo, da je δx majhen in zapišimo a kot

$$a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Nadalje predpostavimo, da je kot, ki ga oklepa tangenta na smer strune s smerjo nemotene strune majhen tako, da sinus ali tangens tega kota lahko nadomestimo s kotom. Projekcija sile F na prečno smer pri $x+\delta x$ je enaka

$F(x+\delta x) = F(\partial u(x,t)/\partial x)_{x+\delta x}$.

Tu je $(\partial u(x,t)/\partial x)_{x+\delta x}$ v splošnem tangens kota med smerjo nemotene strune in tangento na struno pri $x+\delta x$ ob času t. Podobno je projekcija sile F , ki deluje vzdolž strune, na prečno smer pri x enaka

$F(x) = -F(\partial u(x,t)/\partial x)_x$.

Vsota obeh sil $F(x+dx) + F(x)$ je pri majhnem dx enaka

$F(x+\delta x) + F(x) = F(\partial^2 u(x,t)/\partial x^2)\delta x$.

Masa izbranega dela strune δm je enaka

$\delta m = \mu\delta x$,

pri čemer je $\mu = \rho S$ masa strune z dolžino m/l. Zapišimo drugi Newtonov zakon:

$F(\partial^2 u(x,t)/\partial x^2)\delta x = \mu\delta x(\partial^2 u(x,t)/\partial t^2)$.

Delimo enačbo z $F\delta x$ in označimo razmerje F/μ s c^2 pa dobimo valovno enačbo v eni razsežnosti. Po struni se torej širijo motnje poljubne oblike s hitrostjo

$c = \sqrt{F/\mu}$.

Valovne enačbe seveda tukaj ne bomo reševali. V nadaljnjem nas ne bodo zanimale splošne motnje, ampak se bomo posebej ukvarjali s sinusnimi motnjami. V resnici se da poljubno motnjo zapisati kot vsoto ali integral sinusnih motenj.

Vzemimo, da pri x=0 na začetku dolge cevi sinusno niha opna zvočnika. Nihanje delov zraka na tem mestu naj bo enako

$u(0,t) = u_0 \sin(\omega t)$.

Zanimajo nas odmiki delov zraka na mestu, ki je od zvočnika oddaljeno za x, u(x,t). V skladu z valovno enačbo je na tem mestu

$u(x,t) = u_0\sin(\omega(t-x/c)) = u_0\sin(\omega t - kx)$.

Vpeljali smo valovno število k:

$k = \omega/c$.

Odmik, ki je funkcija kraja in časa, ima pri sinusnem valovanju dve periodi: krajevno in časovno. Na danem mestu odmik sinusno niha z nihajnim časom $t_0 = 1/\nu = 2\pi/\omega$. Če gledamo trenutno sliko valovanja opazimo krajevno periodo ali valovno dolžino λ, pri čemer velja

$k\lambda = 2\pi$.

Sinus je namreč periodična funkcija s periodo 2π. Upoštevajmo še zvezo $k = \omega/c = 2\pi\nu/c$ pa dobimo zvezo med frekvenco in valovno dolžino

$c = \lambda\nu$.

VALOVANJE V ENI RAZSEŽNOSTI

Pri sinusnem valovanju v eni razsežnosti, recimo vzdolž osi x, je odmik delov snovi u(x,t) iz mirovne lege odvisen od kraja in časa in sicer je enak

$u(x,t) = u_0\sin(\omega t-kx+\phi)$.

Tu je $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/t_0$ krožna frekvenca, $k = 2\pi/\lambda$ valovno število, faza ϕ pa je odvisna od tega kdaj začnemo šteti čas in kam postavimo izhodišče.

Poglejmo, kaj se zgodi, ko zadene valovanje oviro. Naj bo najprej ovira taka, da je ob njej $u = 0$. Pri valovanju na struni je to trdno vpet konec strune, pri zvoku je to trdna stena. Od take ovire se valovanje odbije in potuje v smeri osi $-x$. Zapišimo vpadno valovanje kot

$u_v(x,t) = u_0\sin(\omega t-kx)$,

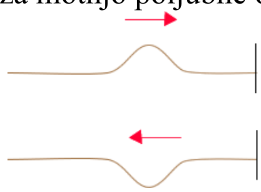
odbito valovanje pa kot

$u_o(x,t) = u_0'\sin(\omega t+kx+\phi)$.

Naj bo ovira pri $x = 0$. V vsakem trenutku mora biti

$u(0,t) = u_v(0,t) + u_o(0,t) = u_0\sin(\omega t) + u_0'\sin(\omega t+\phi) = 0$.

Rešitev enačbe je $u_0' = u_0$ in $\phi = \pi$. Valovanje se odbije z nasprotno fazo in enako amplitudo. Isto velja za motnjo poljubne oblike.

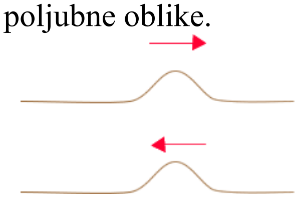


Druga skrajna možnost je, da se valovanje odbije na prostem koncu vrvi ali strune, ali pa na odprtem koncu cevi. V primeru strune tam ni prečne sile, v primeru cevi pa ni vzdolžne sile, zato je tam $\partial u(x,t)/\partial x = 0$. Odmika $u_v(x,t)$ in $u_o(x,t)$ napišemo enako kot prej, izberimo izhodišče $x = 0$ na meji in upoštevamo robni pogoj $(\partial u(x,t)/\partial x)_{x=0} = 0$. Iz tega dobimo $u_0' = u_0$ in $\phi = 0$. Odbito valovanje ima enako amplitudo in enako fazo kot vpadno;

$u_v(x,t) = u_0\sin(\omega t-kx)$

$u_o(x,t) = u_0\sin(\omega t+kx)$.

Podobno velja za motnjo poljubne oblike.



Ogledali si bomo tudi prehod valovanja iz sredstva, v katerem je hitrost valovanja c_1 v sredstvo, v katerem je hitrost valovanja c_2. Recimo, da se na nekem mestu spremeni debelina strune, ali pa v cevi tanka opna loči dva različna plina. Lahko se tudi palica iz ene snovi nadaljuje v enako debelo palico iz druge snovi. Na meji se frekvenca valovanja ne spremeni, spremeni pa se valovna dolžina:

$\lambda_1 = c_1/\nu$, $\lambda_2 = c_2/\nu$.

Če $c_1 \neq c_2$, se na meji vedno del valovanja odbije, del valovanja pa potuje naprej po drugem sredstvu. Problema ne bomo obravnavali v podrobnostih. Omenimo le, da se pri prehodu iz sredstva z večjo hitrostjo valovanja v sredstvo z manjšo hitrostjo valovanja del valovanje odbije z nasprotno fazo od vpadnega, pri prehodu iz sredstva z manjšo hitrostjo v sredstvo z večjo hitrostjo valovanja pa se del valovanja odbije z enako fazo, kot je faza vpadnega valovanja.

Stoječe valovanje

Vzemimo dve sinusni valovanji z enako frekvenco in amplitudo, ki potujeta v nasprotnih smereh:

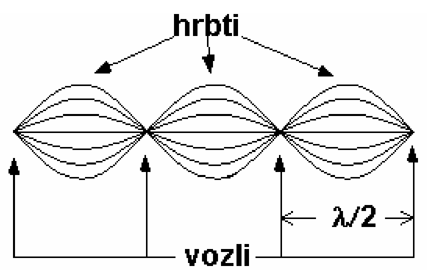
$u_1(x,t) = u_0\sin(\omega t\text{-}kx)$

$u_2(x,t) = u_0\sin(\omega t+kx)$.

Na mestih, kjer se srečata obe valovanji je skupni odmik u(x,t) enak

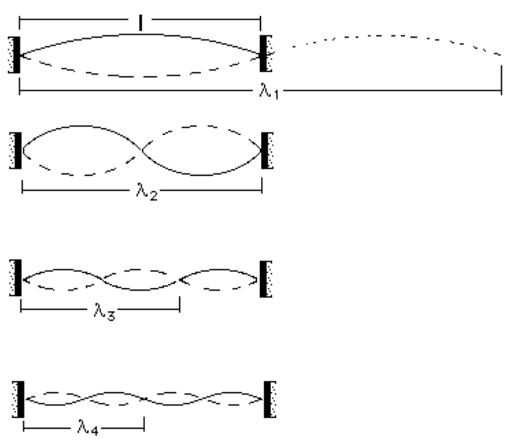
$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2u_0\sin(\omega t)\cos(kx)$.

Dobili smo stoječe valovanje.



Pri stoječem valovanju imamo mesta, kjer je odmik u vseskozi enak nič ($\cos(kx) = 0$). Imenujemo jih vozli. Mesta, kjer je amplituda nihanja odmika največja ($\cos(kx) = \pm 1$) imenujemo hrbti. Razdalja med sosednjima vozloma je enaka razdalji med sosednjima hrbtoma stoječega valovanja. Enaka je $\lambda/2$ ($k\lambda/2 = \pi$).

Stoječe valovanje srečamo pri strunah in piščalih. Na struni, ki je na obeh koncih vpeta, se dalj časa ohranijo stoječa valovanja, ki imajo na začetku in koncu strune vozel.



Dolžina strune l je enaka

$l = N\lambda_N/2 \qquad N = 1, 2, 3, \ldots$

Ta stoječa valovanja imajo frekvence
$\nu_N = c/\lambda_N = (c/2l)N$.
Spomnimo se še da je $c = \sqrt{F/\mu}$.

Podobno je pri zaprti piščali. Pihanje preko jezička povzroči motnje, ki se širijo po piščali. V prostoru med jezičkom in koncem piščali se ohranijo stoječa valovanja, ki imajo ob jezičku in na koncu piščali vozel odmika. Frekvence teh valovanj ν_N so enake
$\nu_N = c/\lambda_N = (c/2l)N, \quad N = 1, 2, 3,\ldots$
pri čemer je l razdalja med jezičkom in koncem piščali, c pa je hitrost zvoka v zraku, ki je približno c = 340 m/s. Najmočneje se sliši zvok osnovnega tona, ki ustreza N = 1.

Enake frekvence dobimo pri piščali, ki je na obeh koncih odprta. Razlika je le v tem, da sta na obeh koncih hrbta odmika.

Drugače je pri piščali, ki je na enem koncu odprta. Ob jezičku je vozel odmika, na odprtem koncu pa hrbet odmika. Najdaljša valovna dolžina stoječega valovanja je v tem primeru 4l, pri čemer je l dolžina piščali. V splošnem velja
$l = \lambda_N/4 + N\lambda_N/2 \quad N = 0, 1, 2, \ldots$
Valovna dolžina λ_N je v tem primeru enaka
$\lambda_N = 4l/(1+2N)$,
ustreza pa ji frekvenca
$\nu_N = c/\lambda_N = (c/4l)(1 + 2N) \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$

Spreminjanje tlaka pri valovanju v tekočini

Vzemimo valovanje, ki potuje po tekočini vzdolž osi x . Odmik delov tekočine iz mirovne lege naj bo
$u(x,t) = u_0 \sin(\omega t-kx)$.
Zanima nas, kako se zaradi tega spreminja tlak v tekočini. Vzemimo tanko prizmo z velikostjo osnovne ploskve S. Ena osnovna ploskev naj bo pri koordinati x, druga osnovna ploskev pa pri $x+\delta x$. Obravnavajmo del tekočine, ki je bil pred prihodom valovanja znotraj te prizme. Ko je prisotno valovanje se ob času t prva osnovna ploskev premakne na mesto s koordinato $x+u(x,t)$, druga osnovna ploskev pa na mesto s koordinato $x+\delta x+u(x+\delta x,t)$. Ploščina osnovne ploskve S se ohrani. Relativna sprememba prostornine izbranega dela tekočine $\delta V/V$ je ob času t enaka
$\delta V/V = S(u(x+\delta x,t)-u(x,t))/S\delta x = \partial u(x,t)/\partial x$.
Zadnji člen enačbe smo zapisali ob predpostavki, da je δx majhen, dosti manjši od λ.
Vemo pa, da velja zveza
$\delta V/V = -\chi \delta p$.
Sprememba tlaka pri koordinati x je ob času t enaka

$$\delta p(x,t) = -(\partial u(x,t)/\partial x)/\chi = (ku_0/\chi)\cos(\omega t-kx) = u_0\omega\sqrt{\frac{\rho}{\chi}}\cos(\omega t - kx) = u_0\omega\rho c\cos(\omega t-kx).$$

Tlak je kot funkcija kraja in časa enak
$p(x,t) = p_0 + \delta p(x,t) = p_0 + \delta p_0 \cos(\omega t-kx)$,
pri čemer je p_0 tlak v tekočini, ko ni valovanja. Amplituda nihanja tlaka δp_0 in amplituda odmika u_0 sta sorazmerni:
$\delta p_0 = \omega\rho c u_0$.

Energijski tok

Pri valovanju v tekočini pride do prožnih deformacij in do gibanja delov tekočine. S prvimi je povezana prožnostna energija, z drugim pa kinetična energija. Potujoče valovanje nosi s seboj kinetično in prožnostno energijo. Vzemimo pravokotno na smer širjenja valovanja ploskev velikosti S. Naj v času Δt skozi to ploskev steče energija ΔW. Energijski tok P definiramo kot pretočeno energijo s časom

$P = \Delta W/\Delta t.$

Gostota energijskega toka j je energijski tok s ploskvijo:

$j = P/S.$

Del tekočine, ki je bil pred prihodom valovanja med x in $x+\delta x$, se giblje s hitrostjo v(x,t):

$v(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t.$

Njegova masa je $\delta m = \rho S\delta x = \rho\delta V$, kinetična energija pa

$\delta W_k(x,t) = \delta m v^2(x,t)/2 = (\rho\omega^2 u_0^2 \delta V/2)\cos^2(\omega t-kx).$

Zopet smo predpostavili, da je $\delta x<<\lambda$. Gostota kinetične energije $w_k(x,t)$ je enaka

$w_k(x,t) = (\delta W_k(x,t)/\delta V) = (\rho\omega^2 u_0^2/2)\cos^2(\omega t-kx).$

Več dela bo s prožnostno energijo. Vzemimo cev dolžine l in preseka S, v kateri je tekočina s tlakom p_0. Cev naj omejuje bat, ki drsi ob stenah brez trenja. Na drugi strani bata naj bo tudi tlak p_0. Ko pritisnemo na bat s silo F, se v cevi poveča tlak za $\delta p = F/S$. Pri tem se bat premakne za x. Velja zveza

$\delta V/V = -xS/lS = -\chi\delta p = -\chi F/S.$

Sila F je po velikosti sorazmerna premiku bata x, po smeri pa nasprotna, $F = -kx$, pri čemer je $k = S/l\chi$. Zveza je podobna kot pri vzmeti. Podobna je tudi prožnostna energija:

$W_{pr} = kx^2/2 = (S/l\chi)(l\chi\delta p)^2/2 = V\chi(dp)^2/2.$

Tu je V prostornina kapljevine. Gostota prožnostne energije je

$w_{pr} = \chi(\delta p)^2/2.$

Spremembo tlaka pri valovanju $\delta p(x,t) = u_0\omega\rho c\cos(\omega t-kx)$ vstavimo v enačbo za gostoto prožnostne energije in dobimo

$w_{pr}(x,t) = (\rho\omega^2 u_0^2/2)\cos^2(\omega t-kx).$

Gostota prožnostne energije je enaka gostoti kinetične energije. Ker obe nihata s časom, nas bo pri izračunu energijskega toka zanimala le povprečna gostota energije

$\langle w\rangle = \langle w_k\rangle + \langle w_{pr}\rangle = \rho\omega^2 u_0^2/2 = \delta p_0^2/2\rho c^2.$

Valovanje se širi s hitrostjo c, zato je energijski tok P enak

$P = S\langle w\rangle c,$

gostota energijskega toka pa

$j = P/S = \langle w\rangle c = \rho\omega^2 u_0^2 c/2 = \delta p_0^2/2\rho c.$

Izraz $j = \rho\omega^2 u_0^2 c/2$ velja tudi pri širjenju vzdolžnih motenj v trdnih snoveh.

Absorpcija valovanja

Nobena snov ni idealno prožna, zato se mehanska valovanja v splošnem v snovi absorbirajo. Absorbirajo se seveda tudi elektromagnetna valovanja.

Vzemimo, da je v bližini izvora gostota energijskega toka enaka j_0. Vprašanje je, kolikšna je gostota energijskega toka j(x) v poljubni razdalji x od izvora. Predpostavili bomo, da se valovanje širi samo v smeri osi x in, da je snov, po kateri se širi valovanje homogena.

Vzemimo tanko plast snovi med x in x+dx. Vanjo vpada valovanje z gostoto energijskega toka j(x), zapušča pa jo valovanje z gostoto energijskega toka j(x+dx). Razlika gostot energijskega toka je enaka
$j(x+dx)-j(x) = -j(x)\mu dx$.
Predpostavili smo, da je sprememba gostote energijskega toka v primeru zelo tanke plasti soraznerna debelini plasti dx in vpadni gostoti energijskega toka j(x). Z μ smo označili absorpcijski koeficient z enoto m^{-1}. Enačbo delimo z dx in dobimo diferencialno enačbo
$dj(x)/dx = -\mu j(x)$
z rešitvijo
$j(x) = j_0 e^{-\mu x}$.
Gostota energijskega toka pada eksponentno z oddaljenostjo od izvora. Značilna razdalja, v kateri pade gostota energijskega toka na vrednost $j_0/e \approx j_0/3$, je enaka $1/\mu$. Razpolovna debelina snovi $l_{1/2}$ je tista debelina, ki prepusti polovico vstopajočega energijskega toka $j_0/2$. Enaka je
$l_{1/2} = \ln 2/\mu$.

V splošnem se moramo zavedati, da absorpcijski koeficient ni konstanten, ampak je odvisen od valovne dolžine oziroma frekvence valovanja: $\mu = \mu(\omega)$. V primeru sestavljenega valovanja, ki vsebuje več frekvenc

$$u = \sum_i u_i \sin(\omega_i t - k_i x),$$

je gostota energijskega toka brez absorpcije enaka

$$j = \sum_i j_i,$$

Pri čemer je $j_i = \rho\omega_i^2 u_i^2 c/2$. Z upoštevanjem absorpcije valovanja v snovi dobimo

$$j(x) = \sum_i j_i(x) = \sum_i j_i e^{-\mu(\omega_i)x}.$$

Gostota energijskega toka posamezne sestavine $j_i(x)$ eksponentno pada z naraščajočo debelino snovi, padanje celotne gostote energijskega toka j(x) pa je v splošnem bolj zapleteno.

VALOVANJE V DVEH IN TREH RAZSEŽNOSTIH

Valovanje na struni se širi v eni razsežnosti. Valovanje na vodni površini se širi v dveh razsežnostih, zvok pa v splošnem v treh razsežnostih

Valovanje v treh razsežnostih si predstavimo z valovnimi ploskvami in žarki. V primeru zvoka povezujejo valovne ploskve mesta, na katerih je v nekem trenutku tlak dosegel amplitudo nihanja. Razdalja med sosednjima valovnima ploskvama je λ. Žarki so črte, pravokotne na valovne ploskve, ki kažejo smer širjenja valovanja. V dveh razsežnostih nadomesti valovno ploskev valovna črta.

V okolici velike ravne plošče, ki niha v smeri pravokotnice, so valovne ploskve vzporedne s ploščo, žarki pa so pravokotni na ploščo.

V okolici zvočila, ki oddaja zvok enakomerno v vse smeri, so valovne ploskve krogle z zvočilom v središču. Žarki imajo radialno smer. Če zanemarimo absorpcijo

zvoka, je energijski tok P skozi katerokoli kroglo z zvočilom v središču enak, gostota energijskega toka pa z naraščajočo oddaljenostjo od zvočila pada:
$j = P/S = P/4\pi r^2$.
Z naraščajočo oddaljenostjo od izvora padata tudi amplituda nihanja tlaka in amplituda odmika:

$$\delta p_0 = \sqrt{\frac{P\rho c}{2\pi}}\frac{1}{r} \qquad u_0 = \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho\omega^2 c}}\frac{1}{r}.$$

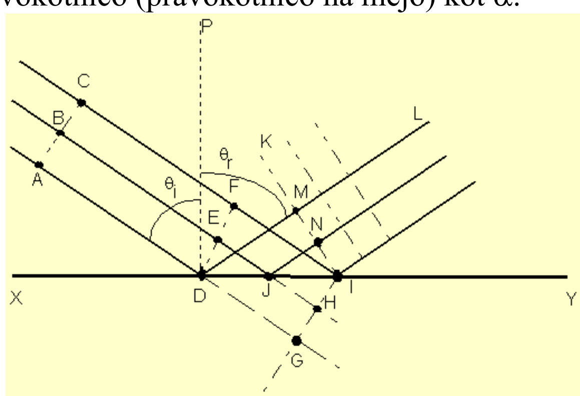
Z upoštevanjem absorpcije zvoka pada gostota energijskega toka z oddaljenostjo od izvora po enačbi
$j = (P/4\pi r^2)e^{-\mu r}$.

Ponavadi nas zanima samo del valovne ploskve. Daleč od izvira si lahko mislimo, da so deli valovnih ploskev ravni. V tem primeru govorimo o ravnem valovanju. Pri ravnem valovanju si valovne ploskve predstavljamo kot vzporedne ravnine. Med sosednjima ravninama je razdalja λ. Žarki so pravokotni na ravnine. Ravno valovanje obravnavamo enako, kot valovanje v eni razsežnosti.

Odboj in lom valovanj

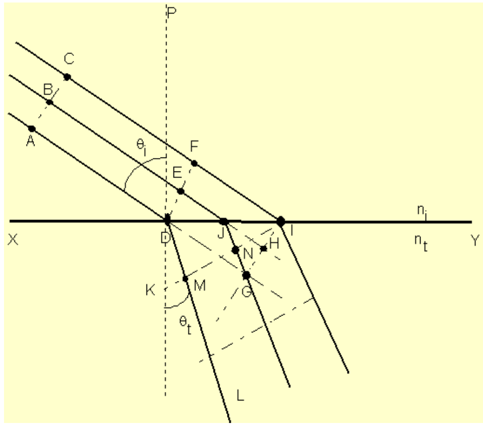
Ko ravno valovanje zadene nejo dveh sredstev, se v splošnem del valovanja odbije, del valovanja pa potuje po drugem sredstvu v smeri, ki se v splošnem ne ujema s smerjo vpadnega valovanja.

Vzemimo, da je meja med sredstvoma ravna in, da oklepajo žarki vpadnega valovanja z vpadno pravokotnico (pravokotnico na mejo) kot α.



Upoštevamo Huygensovo načelo ki pravi, da je vsaka točka, ki ji doseže valovna ploskev izvor novih elementarnih valov. Točke D, E in F ležе na valovni ploskvi vpadnega valovanja. V času, ko točka F na valovni ploskvi zadene mejo v točki I, je valovna ploskev elementarnega valovanja iz točke D projicirana na ravnino slike krog s polmerom DM. V istem trenutku je projekcija valovne ploskve elementarnega valovanja iz točke J na ravnino slike krog s polmerom JN. Ovojnica elementarnih valovanj je ravna valovna ploskev skozi točke M, N in I. Trikotnika DFI in DMI sta enaka , le zasukana okrog vpadne pravokotnice za 180^0. To pa pomeni, da je kot med žarki vpadnega valovanja in vpadno pravokotnico (vpadni kot) enak odbojnemu kotu med žarki odbitega valovanja in vpadno pravokotnico.

S Huygensovim načelom razložimo tudi lom valovanja pri prehodu v drugo sredstvo. V prvem sredstvu naj bo hitrost valovanja c_1, v drugem pa c_2.



Točke D, E in F ležе na valovni ploskvi, ki se giblje v smeri žarkov s hitrostjo c_1. V času t, v katerem pripotuje točka F do meje, pripotuje elementarno valovanje iz točke D tako daleč, da je projekcija valovne ploskve na ravnino slike krog s polmerom DM. V tem trenutku je projekcija valovne ploskve elementarnega valovanja iz točke J na ravnino slike krog s polmerom JN. Ovojnica elementarnih valov je ravna valovna ploskev skozi točke M, N in I. Poiščimo zvezo med vpadnim kotom α in lomnim kotom β. Lomni kot je kot med žarki lomljenega valovanja in vpadno pravokotnico.

V trikotniku DIF je vpadni kot pri oglišču D, njegov sinus pa je enak

$\sin\alpha = EI/DI$.

V trikotniku DIM je lomni kot pri oglišču I , njegov sinus pa je enak

$\sin\beta = DM/DI$.

Razmerje sinusov kotov je enako

$\sin\alpha/\sin\beta = EI/DM = c_1t/c_2t = c_1/c_2$.

Dobili smo lomni zakon. Vpadni žarek, vpadna pravokotnica in lomljeni žarek ležijo v isti ravnini.

Do loma ne pride pri pravokotnem vpadu, ko je $\alpha = \beta = 0$.

Lom na ukrivljeni površini obravnavamo na enak način, kot lom na ravni površini, če sta krivinska polmera površine mnogo večja od valovne dolžine. V tem primeru ima vpadna pravokotnica na različnih mestih površine različno smer.

Interferenca valovanj

Do interference pride, ko se sreča več valovanj. V eni razsežnosti smo obravnavali interferenco dveh valovanj z enako frekvenco, ki potujeta v nasprotnih smereh. V tem primeru dobimo stoječe valovanje.

Oglejmo si bolj splošen primer. Vzemimo dva zvočnika, ki oddajata zvok s frekvencama ν_1 in ν_2. Poslušalec sliši oba zvočnika. Zaradi prvega zvočnika je časovni potek spremembe tlaka na mestu poslušalca enak $\delta p_1 = \delta p_{10}\sin(\omega_1 t-\phi_1)$. Drugi zvočnik povzroči spremembo tlaka $\delta p_2 = \delta p_{20}\sin(\omega_2 t-\phi_2)$. Sprememba tlaka δp, ki jo zazna poslušalec, je enaka

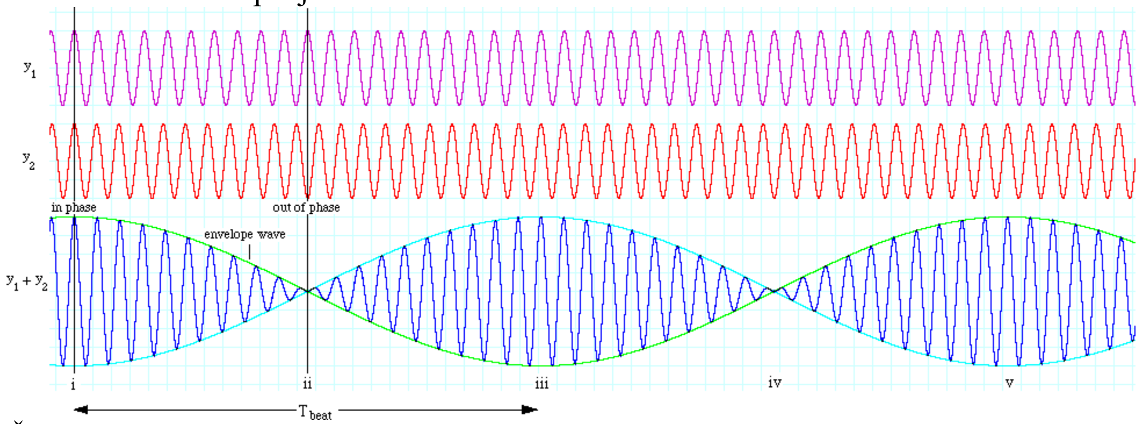
$\delta p = \delta p_1 + \delta p_2$.

Ta zveza, ki je osnova interference velja, ko je sprememba tlaka majhna: $\delta p_1, \delta p_2 \ll p_0$.

Vzemimo najprej, da se frekvenci zvočnikov malo razlikujeta. Naj bo $\omega_1 = \omega_2+\delta\omega$ ($\delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$). Zaradi enostavnosti računa predpostavimo, da je $\phi_1=\phi_2=0$ in $\delta p_{10}=\delta p_{20}=\delta p_0$. Sprememba tlaka dp je enaka

$$\delta p = 2\delta p_0 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t\right).$$

Poslušalec sliši utripanje.



Čas utripa t_u je čas med zaporednima trenutkoma, ko sliši najmočnejši zvok, ali čas med dvema zaporednima trenutkoma, ko zvoka ne sliši. V času t_u naraste argument počasi spreminjajoče se funkcije $\cos(\delta\omega t/2)$ za π:

$\delta\omega t_u/2 = \pi$.

Iz tega sledi

$\nu_u = 1/t_u = \delta\omega/2\pi = \delta\nu$.

Frekvenca utripanja je enaka razliki frekvenc izvorov. Utripanje s frekvenco ν_u slišimo tudi, ko amplitudi nihanja tlakov nista enaki, le manj je izrazito.

V drugem primeru naj bosta frekvenci zvočnikov enaki $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, nihanji open pa v fazi. Sedaj je

$\delta p_1 = \delta p_0 \sin(\omega t - kl_1)$

$\delta p_2 = \delta p_0 \sin(\omega t - kl_2)$.

Tu je l_1 razdalja od prvega zvočnika do poslušalca, l_2 pa razdalja od drugega zvočnika do poslušalca. Zaradi enostavnosti smo predpostavili, da sta amplitudi nihanja tlaka enaki. Spreminjanje tlaka je enako

$\delta p = 2\delta p_0 \sin(\omega t - k(l_1+l_2)/2)\cos(k(l_2-l_1)/2)$.

Prvi člen predstavlja nihanje s krožno frekvenco ω. Bolj zanimiv je drugi člen. Na mestih, kjer je $\cos(k(l_2-l_1)/2) = \pm 1$ ($l_2-l_1 = N\lambda$, $N = 0, \pm 1, \pm 2...$), slišimo ojačen zvok. Do tja prideta zgoščini iz obeh izvorov hkrati. N ni poljubno veliko število. Največja razlika razdalj l_2-l_1 je namreč enaka razdalji med zvočnikoma.

Na mestih, kjer je $\cos(k(l_2-l_1)/2) = 0$ ($l_2-l_1 = (N+1/2)\lambda$, $N = 0, \pm 1, \pm 2...$), zvoka ne slišimo. Če amplitudi nihanja tlaka nista enaki slišimo tam oslabljen zvok. Na ta mesta pridejo istočasno zgoščine iz enega izvora in razredčine iz drugega izvora.

Če opni zvočnikov ne nihata v fazi, se situacija spremeni. Ko je fazna razlika nihanja open π, slišimo ojačen zvok na mestih, kjer smo pri fazni razliki 0 slišali oslabljen zvok in obratno.

Uklon

Ko zadene ravno valovanje oviro, se ob oviri žarki ukrivijo (uklonijo). Valovanje se širi tudi v področje geometrijske sence. Za obravnavo uklona lahko uporabimo Huygensovo načelo. Uklon je izrazit pri objektih (odprtinah, ovirah), katerih velikost je primerljiva z valovno dolžino. Tedaj je delež valovanja, ki se širi v področje geometrijske sence znaten. Podrobneje bomo obravnavali uklon pri optiki.

Dopplerjev pojav

Ko se poslušalec premika proti izvoru zvoka, zazna drugačno frekvenco zvoka, kot, če glede na izvor zvoka miruje. Ko se približuje izvoru zvoka zazna višjo frekvenco, ko se oddaljuje pa nižjo frekvenco. Pojav imenujemo Dopplerjev pojav in je značilen za vsako valovanje, tudi elektromagnetno.

Tu bomo obravnavali dva mejna primera. Naj se v prvem primeru giblje izvor zvoka proti poslušalcu, ki miruje glede na sredstvo, po katerem se širi valovanje. Izvor zvoka oddaja zgoščine s periodo t_0. Ko izvor zvoka miruje glede na sredstvo, po katerem se širi valovanje, prepotuje v času t_0 zgoščina pot $ct_0 = \lambda$. V našem primeru se izvor giblje v smeri širjenja zgoščin s hitrostjo v, zato se v času t_0 premakne za vt_0. Predpostavili bomo, da je $v<c$. Primer, ko je $v>c$ bomo obravnavali pozneje. Razdalja med sosednjima zgoščinama v valovanju λ' je enaka

$\lambda' = ct_0 – vt_0 = \lambda(1-v/c)$.

Pri valovanju v splošnem velja zveza $c = \lambda\nu = \lambda'\nu'$, zato je frekvenca ν', ki jo sliši poslušalec enaka

$\nu' = c/\lambda' = c/[\lambda(1-v/c)] = \nu/(1-v/c)$.

Ko se izvor približuje poslušalcu ($v>0$), se frekvenca poviša, ko pa se od njega oddaljuje ($v<0$), se frekvenca zniža. V primeru, ko je $v<<c$ je $\nu' \approx \nu(1+v/c)$ in je sprememba frekvence kar enak $\nu v/c$.

Drug mejni primer je, ko izvor glede na sredstvo, po katerem se širi valovanje, miruje, poslušalec pa se giblje. Vzemimo, da se poslušalec giblje proti izvoru. Naj ob času 0 zadene poslušalca zgoščina. Vprašajmo se, kdaj ga zadene naslednja zgoščina. Imenujmo ta čas t_0'. Zgoščina prepotuje pot ct_0', poslušalec pa vt_0'. Vsota poti je enaka valovni dolžini λ:

$ct_0' + vt_0' = (c+v)/\nu' = \lambda$.

Frekvenca zvoka ν', ki jo sliši poslušalec je enaka

$\nu' = (c+v)/\lambda = \nu(1+v/c)$.

V tem primeru je sprememba frekvence $\nu'-\nu$ enaka $\nu v/c$. Enačba velja tudi, ko se poslušalec oddaljuje od izvora. V tem primeru se znak hitrosti obrne: $\nu' = \nu(1-v/c)$.

Doslej smo računali za poseben primer, ko je gibanje v smeri zveznice. V splošnem primeru se izvor giblje glede na sredstvo s hitrostjo $\vec{v}_i$, poslušalec pa s hitrostjo $\vec{v}_p$. Če je $\vec{n}$ enotni vektor v smeri od izvora do poslušalca, je frekvenca ν', ki jo zazna poslušalec, enaka

$\nu' = \nu(1-\vec{n}\vec{v}_p/c)/(1-\vec{n}\vec{v}_i/c)$.

V pogostem primeru, ko je v_p, $v_i<<c$, se enačba poenostavi:

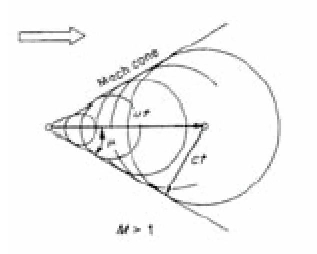
$\nu' = \nu\left(1-\vec{n}(\vec{v}_p-\vec{v}_i)/c\right)$.

Sami lahko obravnavate primer, ko izvor zvoka in poslušalec mirujeta, giblje pa se predmet, od katerega se zvok odbije. Frekvenca odbitega zvoka se razlikuje od frekvence zvoka ν, ki jo oddaja izvor. V primeru, ko se predmet oddaljuje od izvora in poslušalca, je frekvenca odbitega zvoka ν' enaka

$\nu' = \nu(c-v)/(c+v) \approx \nu(1-2v/c)$.

Zadnji člen je zapisan za (pogost) primer, ko je v<<c.
Dopplerjev pojav uporabljajo za merjenje hitrosti. Rdeči in modri premik značilnih spektralnih črt lahkih elementov v svetlobi z oddaljenih zvezd je povezan z gibanjem zvezd. Pri merjenju hitrosti avtomobila z radarjem se mikrovalovi odbijejo od gibajočega se avtomobila. Pri tem se jim za $\Delta\nu = 2\nu v/c$ spremeni frekvenca. Tu je ν frekvenca mikrovalov, c pa svetlobna hitrost. Pri seštevanju valovanja iz radarja in odbitega valovanja pride do utripanja s frekvenco, ki je enaka razliki frekvenc $\Delta\nu$. Frekvenca utripanja je sorazmerna hitrosti avtomobila.

Ko se predmet giblje po sredstvu z večjo hitrostjo, kot je hitrost valovanja, ima valovno čelo obliko stožca. Imenujemo ga Machovo valovno čelo.

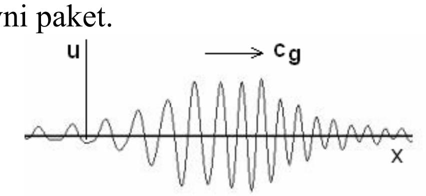


Sinus kota pri vrhu stožca je enak c/v. Razmerje v/c imenujemo Machovo število. Primer Machovega valovnega čela je trikotno valovno čelo, ki ga vidimo za ladjami.

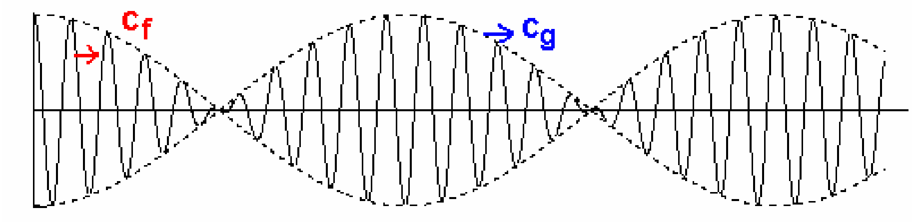
Disperzija valovanj

Doslej smo predpostavljali, da je hitrost valovanja c konstantna, neodvisna od valovne dolžine. Vedno ni tako. Hitrost valovanj na površini globoke vode je enaka
$c = \sqrt{g/k}$.
Tudi hitrost elektromagnetnega valovanja v snovi je v splošnem odvisna od valovne dolžine.

To hitrost, s katero potuje sinusno valovanje z eno frekvenco, imenujemo fazna hitrost c_f. Sinusno valovanje z eno frekvenco traja neskončno dolgo in ne prenaša informacij in energije. Informacije ali energijo prenašajo valovanja, ki trajajo omejen čas, na primer valovni paket.



Taka valovanja vsebujejo več frekvenc, zato nas zanima, s kakšno hitrostjo potujejo. Računali ne bomo v splošnem, ampak si bomo raje ogledali preprost zgled. Vzemimo dve potujoči valovanji v smeri osi x, katerih frekvenci in valovni števili se malo razlikujeta:
$u_1(x,t) = u_0\sin[(\omega+\delta\omega)t - (k+\delta k)x]$
$u_2(x,t) = u_0\sin[(\omega-\delta\omega)t - (k-\delta k)x]$.
Njuna vsota je enaka:
$u(x,t) = u_1(x,t)+u_2(x,t) = 2u_0\sin(\omega t-kx)\cos(\delta\omega t-\delta kx)$.



Člen produkta $\sin(\omega t - kx)$ predstavlja valovanje s frekvenco ω, ki potuje s fazno hitrostjo $c_f = \omega/k$.
Drugi člen $\cos(\delta\omega t - \delta k x)$ predstavlja modulacijo s frekvenco $\delta\omega$, ki se giblje s skupinsko ali grupno hitrostjo c_g,
$c_g = \delta\omega/\delta k = d\omega/dk$.
Hitrost, s katero se prenaša energija, je v tem primeru skupinska hitrost c_g. Tudi hitrost premikanja valovnega paketa je skupinska hitrost.

Izračunajmo skupinsko hitrost za valove na površini globoke vode. Tam je fazna hitrost enaka $c_f = \sqrt{g/k}$. Iz zveze $k = \omega/c_f$ dobimo $\omega = \sqrt{gk}$, z odvajanjem pa c_g:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}c_f.$$

Skupinska hitrost je v tem primeru enaka polovici fazne hitrosti.

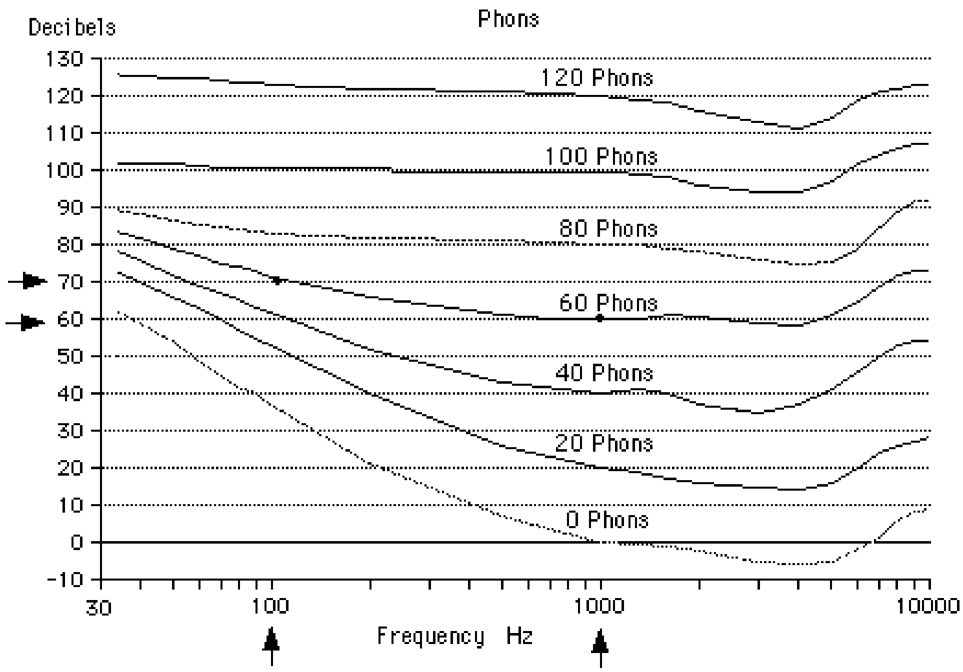
Uho

Z ušesom slišimo zvok s frekvencami med 20 Hz in 20 kHz. Meji sta individualni in se s starostjo spreminjata.

Gostoto zvočnega energijskega toka j imenujemo v akustiki jakost zvoka. Pogosto jo izražamo v decibelih (dB) kot
$10\log(j/j_0)$.
Tu je jakost zvoka $j_0 = 10^{-12}$ W/m^2 približno enaka najmanjši jakosti zvoka, ki jo zazna uho pri frekvenci okrog 1kHz, ko je najbolj občutjivo. Nič decibelom ustreza jakost zvoka $j = j_0 = 10^{-12}$ W/m^2, meji bolečine 120 dB pa $j = 1$W/m^2.

Uho ni enako občutljivo pri vseh frekvencah. Zvok z jakosjo 50 dB pri frekvenci 100 Hz ne povzroči v ušesu enakega občutka, kot zvok z jakostjo 50 dB pri frekvenci 4 kHz. Zato poleg jakosti zvoka vpeljemo še glasnost. Zvok z enako glasnostjo povzroči pri vseh frekvencah, ki jih uho zazna, enak občutek v ušesu. Glasnost lahko definiramo kot
$10\log(j/j_0(\nu))$
in jo izražamo v fonih. Tu je $j_0(\nu)$ meja slišnosti pri frekvenci ν. Zvok z glasnostjo 50 fonov pri frekvenci 100 Hz povzroči v ušesu enak občutek, kot zvok z glasnostjo 50 fonov pri frekvenci 1 kHz.

Glasnost zvoka lahko definiramo tudi tako, da pri frekvenci 1kHz izenačimo jakost zvoka v dB in glasnost zvoka v fonih. Zvezo med jakostjo zvoka v dB in glasnostjo zvoka v tem primeru kaže naslednja slika. Krivulja, ki ustreza glasnosti 0 fonov predstavlja mejo slišnosti.



ELEKTROMAGNETNO VALOVANJE

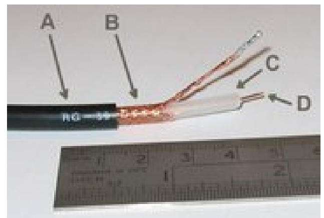
Doslej smo si ogledali mehanska valovanja, predvsem zvok in valovanje na struni ter nekatere pojave, ki so značilni za valovanja. Pomembno valovanje, ki ga pogosto srečamo tudi v vsakdanjem življenju, je elektromagnetno valovanje. Spekter elektromagnetnega valovanja je zelo širok. Valovne dolžine so od km in več do stotine pm. Izvori in detektorji elektromagnetnega valovanja so pri različnih valovnih dolžinah različni. Nekaj pomembnejših elektromagnetnih valovanj z značilnimi izvori in značilnimi valovnimi dolžinami podaja naslednja tabela.

vrsta valovanja	**izvor**	**značilna valovna dolžina**
radijski valovi	oscilator, antena	1m
mikrovalovi	klistron, magnetron, Gunnova dioda	1cm
infrardeče sevanje	vrtenje in nihanje molekul	10 μm
vidna svetloba	zunanji elektroni v atomih	0.4 μm – 0.7 μm
ultravijolična svetloba	elektroni v atomih	0.1 μm
rentgenski žarki	zavorno sevanje elektronov, notranji elektroni v atomih, sinhrotron	1 nm
gama žarki	atomska jedra	1 pm

Najprej si bomo ogledali elektromagnetno valovanje v splošnem, potem pa bomo več časa posvetili vidni svetlobi.

Koaksialni vodnik

Koaksialni vodnik sestavljata kovinska žila s polmerom a in kovinski plašč z notranjim polmerom b. Vmes je dielektrik z dielektričnostjo ε. V običajnih koaksialnih vodnikih je dielektrik polietilen z dielektričnostjo ε = 2.3. Kovinski plašč ščiti notranji vodnik pred zunanjimi motnjami.



Ugotovili smo že, da je kapaciteta koaksialnega vodnika (Glej valjasti kondenzator!) z dolžino l enaka

$C = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l/ln(b/a)$.

Kapaciteta koaksialnega vodnika na enoto dolžine C* je enaka

$C^* = C/l = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0/ln(b/a)$.

Električna poljska jakost v koaksialnem vodniku je enaka

$E = e/2\pi\varepsilon\varepsilon_0 rl = U/rln(b/a)$.

Tu je e električni naboj na žili, U pa napetost med žilo in plaščem

Izračunali smo tudi že gostoto magnetnega polja v vodniku in njegovo induktivnost:

$B = \mu_0 I/2\pi r$

$L = (1/2\pi)\mu_0 lln(b/a)$.

Induktivnost koaksialnega vodnika na enoto dolžine L* je enaka

$L^* = L/l = (1/2\pi)\mu_0 ln(b/a)$.

Predpostavimo, da se vzdolž vodnika s časom in krajem spreminjata električni tok I(x,t) in napetost U(x,t). Koordinata x naj poteka vzdolž vodnika. Vzemimo dve bližnji mesti v vodniku s koordinatama x in x+δx. Razlika I(x+δx,t)dt –I(x,t)dt je enaka naboju de, ki je v času dt odtekel iz izbranega odseka vodnika, ta pa je enak –(C*δx)dU(x,t). Tu je dU(x,t) sprememba napetosti med elektrodama na izbranem mestu v času dt. Velja torej

$I(x+\delta x,t)dt - I(x,t)dt = -(C^*\delta x)dU(x,t)$.

Enačbo delimo z δxdt in upoštevajmo, da je δx majhen pa dobimo

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C^* \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}.$$

Odvoda smo zapisali kot parcialna odvoda, ker sta U in I funkciji dveh spremenljivk x in t. V členu na levi strani enačbe nastopa razlika tokov vzdolž osi x pri istem času t, zato tam nastopa parcialni odvod po x. Na desni strani enačbe nastopa sprememba napetosti v času dt pri stalni koordinati x, zato smo zapisali parcialni odvod po času.

Razlika napetosti U(x+δx,t) – U(x,t) je enaka napetosti, ki se v času dt inducira na izbranem delu vodnika med x in x+δx, ta pa je enaka –(L*δx)∂I(x,t)/∂t. Izraza izenačimo, delimo z δx in upoštevamo, da je δx majhen pa dobimo

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -L^* \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}.$$

Dobili smo dve enačbi, ki povezujeta napetost in tok v koaksialnem vodniku. Enačbi se imenujeta telegrafski enačbi. Enaki enačbi lahko napišemo tudi za drugačne vodnike, na primer za vodnik sestavljen iz dveh vzporednih žic, le C* in L* sta v tem primeru drugačni.

Odvajajmo drugo enačbo parcialno po x, prvo pa po t in izločimo mešani odvod $\partial^2 I(x,t)/\partial x\partial t = \partial^2 I(x,t)/\partial t\partial x$. Pri tem dobimo enačbo

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}.$$

Enačba, ki smo jo dobili, je valovna enačba s splošno rešitvijo

$U(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct),$

pri čemer sta f in g poljubni funkciji argumentov (x-ct) in (x+ct), hitrost širjenja motenj po kablu pa je enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Tu je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu, $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ = 299792459 m/s. V običajnem kablu s polietilenom med elektrodama je $c = 0.66c_0$.

Če odvajamo prvo enačbo parcialno po x, drugo pa po t, dobimo valovno enačbo za tok:

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = L^* C^* \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}.$$

Kot smo že omenili, nas posebej zanimajo sinusna valovanja. Vzemimo sinusno valovanje s krožno frekvenco ω, ki se širi vzdolž osi x:

$U(x,t) = U_0 \sin(\omega t-kx).$

Pri tem valovanju je tok enak

$I(x,t) = (U_0/R_0)\sin(\omega t-kx).$

Tu je

$$R_0 = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\ln(b/a)}{2\pi}$$

značilni upor vodnika. Ta je običajno 50 Ω ali 75 Ω. Omenimo še, da imenujemo $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ = 377 Ω upor vakuuma.

Poglejmo, kako se pri tem valovanju vzdolž vodnika spreminjata E in B. Velja

$$E = \frac{U}{r\ln(b/a)} = \frac{U_0}{r\ln(b/a)}\sin(\omega t - kx)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 U_0}{2\pi R_0 r}\sin(\omega t - kx) = \frac{U_0}{cr\ln(b/a)}\sin(\omega t - kx) = E/c.$$

Če pogledamo še smeri vektorjev $\vec{E}$ in $\vec{B}$ lahko napišemo tudi vektorsko zvezo

$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}.$

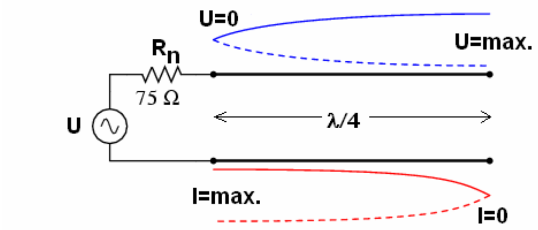
Pri sinusnem potovanju, ki se širi v nasprotni smeri osi x, sta napetost in tok

$U(x,t) = U_0 \sin(\omega t+kx)$

$I(x,t) = -(U_0/R_0)\sin(\omega t+kx),$

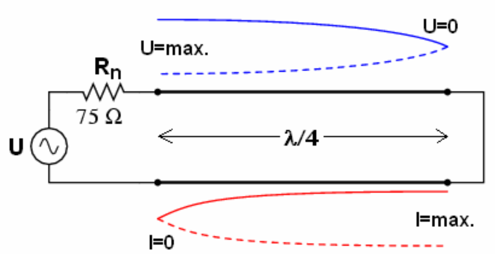
prej napisana zveza med vektorji električne poljke jakosti, gostote magnetnega polja in hitrosti širjenja valovanja še vedno velja.

V koaksialnem vodniku lahko dobimo stoječe valovanje. Kot primer vzemimo vodnik dolžine λ/4. Če na enem koncu žila in plašč nista povezana, je na tem koncu vozel toka in hrbet napetosti.



Na drugem koncu, ki je običajno priključen v električno vezje pa je hrbet toka in vozel napetosti. Pri frekvenci, pri kateri je dolžina vodnika ravno λ/4, je vhodna impedanca tega vodnika nič.

Če na koncu vodnik sklenemo, se situacija spremeni.



Tedaj je na sklenjenem koncu vozel napetosti in hrbet toka, na koncu, ki je priključen v vezje pa je hrbet napetosti in vozel toka. Vhodna impedanca vodnika je zelo velika.

Če na koncu poljubno dolgega koaksialnega vodnika priključimo poljubno breme, bosta v vodniku v splošnem prisotni obe valovanji: valovanje, ki potuje proti bremenu in valovanje, ki se od bremena odbije. Le, če na koncu vodnika priključimo breme, katerega upor je enak značilnemu uporu vodnika R_0, odbitega valovanja ni, vhodni upor pa je neodvisno od dolžine vodnika enak značilnemu uporu R_0. V laboratorijih in tudi drugje elektronske naprave pogosto povezujemo s koaksialnimi vodniki. Če želimo povezati vir izmenične napetosti, ki ima notranji upor 50 Ω z ojačevalnikom izmenične napetosti, ki ima vhodni upor 50 Ω, bomo uporabili koaksialni vodnik z značilnim uporom R_0=50 Ω. Vhodna impedanca vodnika je v tem primeru 50 Ω, to pa je ravno impedanca, pri kateri prejema breme (ojačevalnik) od generatorja največjo moč.

Koaksialni vodnik, s katerim priključimo na anteno ali kabelsko omrežje televizor ima značilni upor 75 Ω. Tak je tudi vhodni upor televizorja.

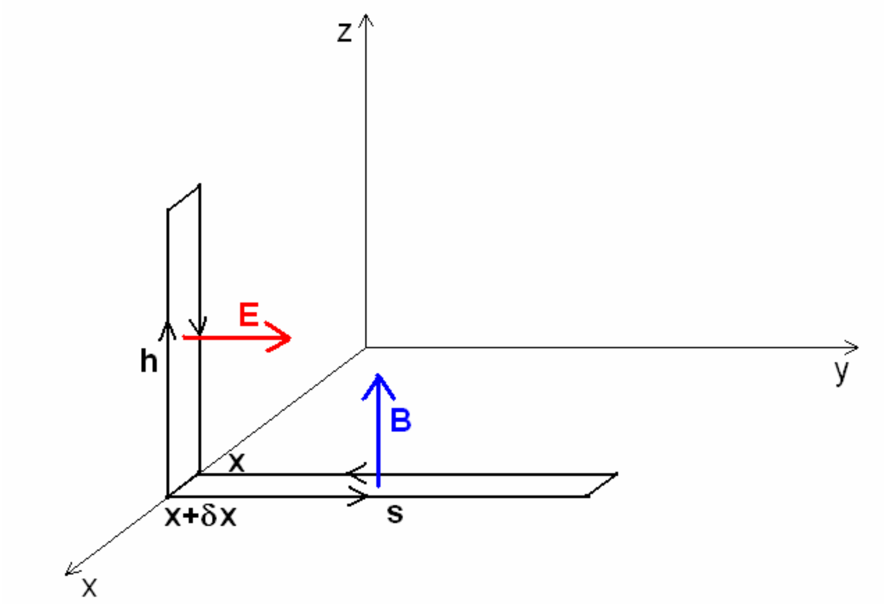
Koaksialne vodnike uporabljamo do frekvenc nekaj GHz. Pri višjih frekvencah uporabljamo za vodenje elektromagnetnega valovanja (mikrovalov) valovne vodnike. To so bakrene cevi pravokotnega preseka v katerih ni notranje elektrode.

Elektromagnetno valovanje v vakuumu in dielektrikih

Valovanja, s katerimi smo se srečali do sedaj, potujejo po sredstvu. Elektromagnetno valovanje pa lahko potuje tudi po vakuumu. To sledi iz Maxwellovih enačb. Pri Fiziki I splošna obravnava problema ni mogoča, bomo pa na preprostem primeru pokazali, da iz Maxwellovih enačb sledi valovna enačba.

Vzemimo, da ima E smer osi y, B pa smer osi z. Vzdolž osi x izberemo dve koordinati x in x+δx, pri čemer se zavedamo, da je δx majhen. Izberemo dve zaključeni poti:

- pot dolžine s in širine δx v xy ravnini
- pot dolžine h in širine δx v xz ravnini.



Uporabili bomo naslednji Maxwellovi enačbi:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Upoštevali smo dejstvo, da v vakuumu ni toka. Vemo tudi, da je v vakuumu $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ in $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Zapišimo najprej integral električne poljske jakosti po zaključeni poti v XY ravnini:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = E(x + \delta x, t)s - E(x,t)s = \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} \delta x s.$$

Pri zapisu zadnjega člena smo upoštevali, da je δx majhen. Pri tej poti imata vektorja $\vec{B}$ in d$\vec{S}$ isto smer, zato je integral na desni enak

$$\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \delta x s.$$

Prva enačba pove, da je

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}.$$

Oglejmo si še drugo enačbo. Najprej izračunajmo integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti v xz ravnini:

$$\oint \vec{H}d\vec{s} = H(x+\delta x,t)h - H(x,t)h = \frac{\partial H(x,t)}{\partial x}\delta xh.$$

V integralu gostote električnega polja po ploskvi moramo upoštevati, da imata $\vec{D}$ in $d\vec{S}$ nasprotno smer, zato je integral na desni enak

$$\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{S} = -\frac{\partial D(x,t)}{\partial t}\delta xh.$$

Dobimo torej enačbo

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial D(x,t)}{\partial t}.$$

Enačbo prepišemo z E in B:

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}.$$

Prvo enačbo odvajamo parcialno po x, drugo pa po času in izločimo mešani odvod $\partial^2B(x,t)/\partial x\partial t = \partial^2B(x,t)/\partial t\partial x$. Pri tem dobimo valovno enačbo

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}.$$

Na podoben način dobimo tudi valovno enačbo za B:

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}.$$

Elektromagnetno valovanje, pri katerem niha E v smeri osi y, B pa v smeri osi z se širi v vakuumu v smeri osi x, ali v nasprotni smeri, s hitrostjo c_0. Če enak račun naredimo v dielektriku z dielektričnostjo ε, prav tako dobimo valovni enačbi za E in B, v katerih pa je hitrost širjenja valovanja c enaka

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c_0}{n}.$$

Vpeljali smo lomni količnik sredstva za elektromagnetno valovanje, ki je enak $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Vzemimo sinusno valovanje, ki se širi vzdolž osi x. Za to valovanje velja

$B = B_0 sin(\omega t-kx)$ in

$E = E_0 sin(\omega t-kx) = B_0 c sin(\omega t-kx)$.

Če predpostavimo, da je potek B tak, kot smo ga zapisali, iz dobljenih zvez med E in B lahko izračunamo E in obratno. Električna poljska jakost in gostota magnetnega polja nihata v fazi. Med amplitudama velja zveza $E_0 = B_0c$, Ko si podrobneje ogledamo še vektorje $\vec{E},\vec{B}$ in $\vec{c}$ vidimo, da tudi tu velja zveza

$$\vec{E} = \vec{B}\times\vec{c},$$

ki smo jo dobili že pri koaksialnem vodniku.

Izračunajmo še gostoto energijskega toka. Že pri zvoku smo omenili, da je gostota energijskega toka enaka

$j = \langle w\rangle c,$

pri čemer je <w> povprečna gostota energije valovanja. V našem primeru je gostota energije enaka vsoti gostote energije električnega polja in gostote energije magnetnega polja:

$$< w > = < w_e > + < w_m > = < \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 > + < \frac{B^2}{2\mu_0} > .$$

Predpostavimo, da imamo opravka s sinusnim valovanjem in upoštevajmo prej dobljena izraza za B in E. Pri tem dobimo

$$< w_e > = < w_m > = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{4\mu_0}.$$

Gostota energijskega toka je torej enaka

$$j = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c = \frac{B_0^2}{2\mu_0} c.$$

Smer in gostoto energijskega toka opišemo s Poyntingovim vektorjem

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Smer Poyntingovega vektorja se ujema s smerjo širjenja valovanja, njegova povprečna velikost pa je enaka gostoti energijskega toka.

Elektromagnetno polje pospešenega naboja in nihajočega dipola

Električni naboj e, ki se enakomerno goblje, povzroča v svoji okolici električno in magnetno polje. Obe poljski jakosti sta obratno sorazmerni kvadratu oddaljenosti od naboja. V okolici naboja , ki se giblje s pospeškom a pa sta tudi električno in magnetno polje, katerih jakosti padata obratno sorazmerno z oddaljenostjo od naboja. Naboj seva elektromagnetno valovanje. V podrobnosti se tu ne bomo spuščali. Omenimo le, da sta v razdalji r od naboja električna poljska jakost E in gostota magnetnega polja B elektromagnetnega valovanja enaki

$$E = \frac{ea \sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

$$B = E / c.$$

Tu je ϑ kot med smerjo pospeška in krajevnim vektorjem $\vec{r}$ točke, v kateri računamo E in B. Gostota magnetnega polja ima glede na smer pospeška aksialno smer, vektor hitrosti valovanja ima v tej točki smer vektorja $\vec{r}$, vektor električne poljske jakosti pa zadošča enačbi $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$.

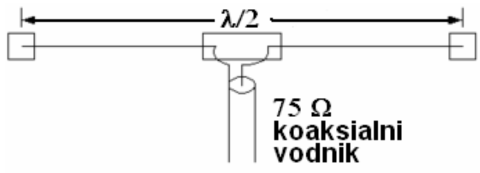
Gostota energijskega tokaje enaka

$$j = \frac{e^2 a^2 \sin^2\vartheta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2}.$$

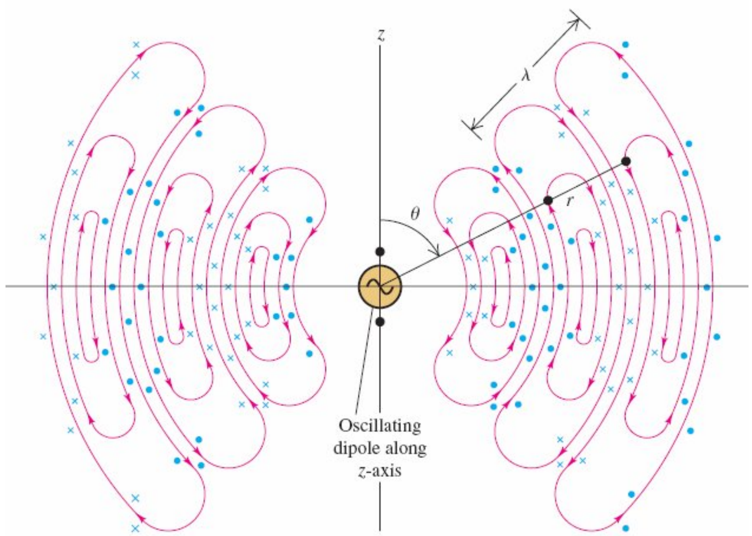
V smeri pospeška naboj ne seva elektromagnetnega valovanja. Z integracijo gostote energijskega toka po površju krogle s polmerom r izračunamo izsevani energijski tok

$$P = \int_0^{\pi} j 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Na osnovi tega lahko izračunamo gostoto energijskega toka in energijski tok, ki ga seva nihajoč električni dipol. Preprost model nihajočega električnega dipola je ravna antena z dolžino λ/2.



Električne silnice v okolici nihajočega dipola kaže naslednja slika.



Magnetne silnice so krogi okrog osi z, ki kaže v smeri nihajočega dipola.
Če dipolni moment niha kot
$p_e = p_0 \sin\omega t$,
je gostota energijskega toka v točki, podani s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ od središča dipola enaka

$$j = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2}.$$

Tu je θ kot med smerjo nihajočega dipola in krajevnim vektorjem $\vec{r}$. V smeri nihajočega dipola je gostota energijskega toka enaka nič. Gostota energijskega toka je največja v ravnini, ki gre skozi središče dipola in je pravokotna na smer dipola. V tej ravnini niha električna poljska jakost v smeri, ki je pravokotna na ravnino, B pa leži v ravnini.

Z integracijo izraza za gostoto energijskega toka po krogli s polmerom r dobimo energijski tok, ki ga seva nihajoči električni dipol:

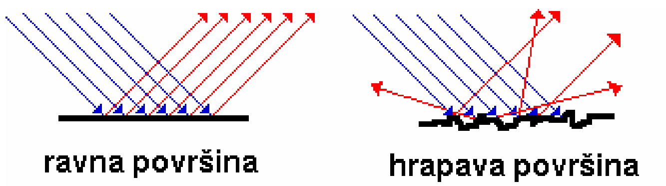
$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

Dosedanja razprava in enačbe, ki smo jih napisali, veljajo za primer, ko je hitrost električno nabitih delcev dosti manjša od svetlobne hitrosti. V elektronskem sinhrotronu, kjer elektroni dosežejo hitrost, ki je blizu svetlobni hitrosti, sevajo elektroni zaradi radialnega pospeška. Smer sevanja se skoraj natančno ujema s smerjo gibanja. Kot pri vrhu stožca, v katerega elektroni sevajo elektromagnetno valovanje je približno kotna minuta.

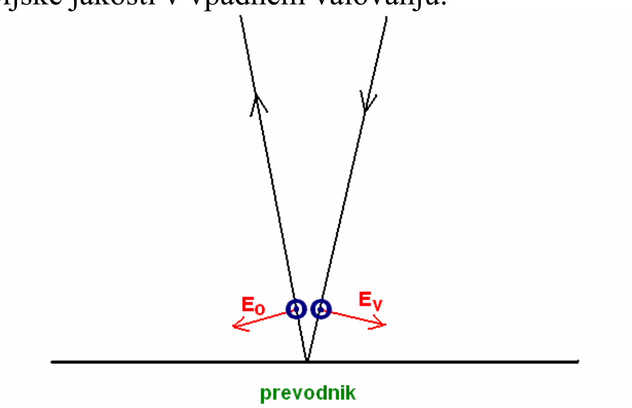
ODBOJ IN LOM SVETLOBE

Odslej nas bo zanimala predvsem vidna svetloba, deloma pa še infrardeča in ultravijolična svetloba.

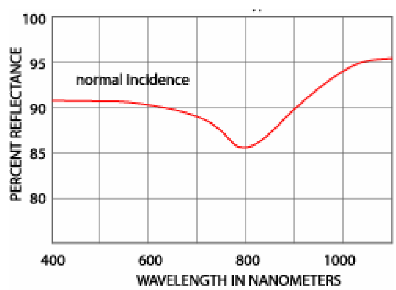
Do odboja svetlobe pride na meji med sredstvi. Če je meja gladka, pride do odboja po odbojnem zakonu: vpadni kot je enak odbojnemu. Tak odboj svetlobe opazimo pri zrcalu, na vodni površini, gladkih kovinskih površinah itd. Ko je meja ukrivljena tako, da je krivinski polmer dosti večji od valovne dolžine svetlobe, se ta v vsaki točki odbije po odbojnem zakonu. Na hrapavi površini pride do difuznega odboja in vzporeden curek svetlobe se razprši. Do difuznega odboja svetlobe pride na papirju, ometu, obleki itd.



Oglejmo si najprej odboj na površini prevodnika. V prevodniku se elektromagnetno valovanje ne širi. Na površini prevodnika mora biti tangentna komponenta električne poljske jakosti enaka nič. Zato je tangentna komponenta električne poljske jakosti v odbitem valovanju enako velika in nasprotno usmerjena od električne poljske jakosti v vpadnem valovanju.



Po velikosti je amplituda električne poljske jakosti v odbitem valovanju E_o enaka amplitudi električne poljske jakosti v vpadnem valovanju E_v. Gostota energijskega toka odbitega valovanja j_o je enaka gostoti energijskega toka vpadnega valovanja j_v. Odbojnost površine j_o/j_v je enaka 1. To seveda velja za idealne prevodnike. Pri realnih prevodnikih je odbojnost odvisna od valovne dolžine. Odvisnost odbojnosti spolirane aluminijeve površine od valovne dolžine pri pravokotnem vpadu svetlobe kaže naslednja slika.



Pri valovni dolžini 10 µm je odbojnost aluminija 0.981. Srebro ima pri λ = 0.55 µm odbojnost 0.982, pri λ = 10 µm pa 99.1. Odbojnost bakra pri λ = 0.55 µm je 0.668.

Tudi elektromagnetno valovanje seže pod površje prevodnika. Električna poljska jakost in gostota magnetnega polja padata v prevodniku eksponentno z značilno dolžino $\delta = \sqrt{2/\sigma\mu_0\omega}$. Tu je σ prevodnost prevodnika. Dolžini δ pravimo vdorna globina.

Mimogrede omenimo, da v prevodnikih teče visokofrekvenčni električni tok tik ob površini, približno znotraj vdorne globine. Pojav imenujemo kožni pojav (skin efekt). Zaradi kožnega pojava upor prevodnikov pri visokih frekvencah zraste. Zmanjšamo ga tako, da povečamo površino. Žico sploščimo, ali namesto ene žice vzamemo šop tanjših žic.

Pri prehodu med dielektrikoma se del elektromagnetnega valovanja odbije nazaj v prvo sredstvo, večji del valovanja pa nadaljuje pot v drugem sredstvu. Če je meja med dielektrikoma ravna, se ravno valovanje lomi po lomnem zakonu

$\sin\alpha/\sin\beta = c_1/c_2 = n_2/n_1$.

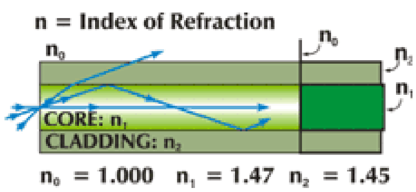
Lomni količniki nekaterih snovi za vidno svetlobo so zbrani v naslednji tabeli.

snov	**lomni količnik**
vakuum	1
zrak (p=1bar)	1.0003
voda	1.33
aceton	1.36
aluminijev fluorid	1.36
pleksi steklo	1.51
kronsko steklo	1.52
natrijev klorid	1.54
flintsko steklo	1.57-1.75
svinčev fluorid	1.75
silicijev nitrid	2.02
cinkov sulfid	2.35
diamant	2.42
titanov dioksid	2.88
galijev fosfid	3.31

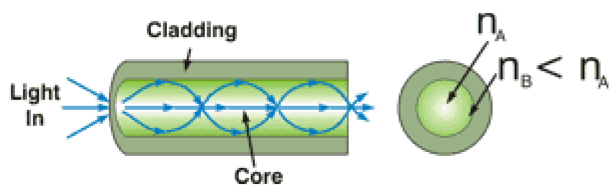
Snov, v kateri je lomni količnik večji, imenujemo optično gostejša snov. Pri prehodu iz optično redkejše v optično gostejšo snov se žarki lomijo k vpadni pravokotnici (β<α). Pri prehodu iz optično gostejše v optično redkejšo snov se žarki lomijo stran od vpadne pravokotnice ($\beta > \alpha$). Pri tem lahko pride do totalnega odboja. Mejni kot totalnega odboja je tisti kot α_m, pri katerem je kot β enak 90^0:

$\sin\alpha_m = n_2/n_1$.

Pri prehodu iz stekla v zrak je $\alpha_m = 42^0$. Ko je $\alpha > \alpha_m$ pride do totalnega odboja. S totalnim odbojem spreminjamo smer svetlobnega curka, pri čemer so izgube manjše, kot če uporabimo kovinsko zrcalo. Precej pomembnejši so svetlobni vodniki, ki jih uporabljamo v telekomunikacijah ali medicini. To so tanka steklena ali plastična vlakna, ki so obdana s snovjo z manjšim lomnim količnikom. Sprememba lomnega količnika je lahko zvezna ali nezvezna. Pri nezvezni spremembi pride na meji snovi do totalnega odboja svetlobe. Pri tem svetloba ostaja v vodniku (slika (a)). Lahko se lomni količnik jedra zvezno spreminja. Največji je v sredini, proti robu pa se manjša. V tem primeru se svetkobni žarki zvezno krivijo in ostajajo v jedru vodnika (slika (b)).



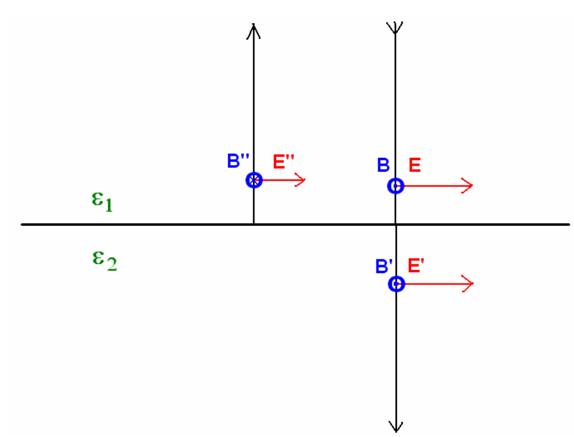
(a)



(b)

S snopom optičnih vlaken lahko tudi prenašamo sliko z mest, ki jih drugače ne bi mogli doseči, na primer iz želodca.

Izračunajmo gostoto energijskega toka odbitega elektromagnetnega valovanja na meji dveh dielektrikov. Obravnavali bomo samo najpreprostejši primer, ko valovanje z gostoto energijskega toka j_{vp} vpade pravokotno na mejo dveh dielektrikov z dielektričnostima ε_1 in ε_2. V vpadnem valovanju naj bo amplituda električne poljske jakosti E, amplituda gostote magnetnega polja pa B. Med njima velja zveza $E = Bc_1$, pri čemer je $c_1 = c_0/n_1 = c_0/\sqrt{\varepsilon_1}$. V prepuščenem valovanju je amplituda električne poljske jakosti E', gostote magnetnega polja pa B'. Med njima velja zveza $E' = B'c_2$. Tu je $c_2 = c_0/n_2 = c_0/\sqrt{\varepsilon_2}$. V odbitem valovanju sta amplitudi električne poljske jakosti in gostote magnetnega polja E'' in B''. Zveza med njima je $E'' = B''c_1$.



Na meji se ohranja tangentna komponenta električne poljske jakosti in tangentna komponenta jakosti magnetnega polja. Ker sta magnetni permeabilnosti obeh sredstev enaki 1, se na meji ohranja tudi tangentna komponenta gostote magnetnega polja. Veljata torej zvezi:

$E + E'' = E'$

$B - B'' = B'$.

Z upoštevanjem zvez med jakostjo električnega polja in gostoto magnetnega polja prepišemo drugo enačbo v obliki

$E - E'' = E'(c_1/c_2)$.

Rešitvi enačb sta

$$E' = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E$$

$$E'' = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E.$$

Gostota vpadnega energijskega toka j_{vp} je enaka

$$j_{vp} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_0 E^2 c_1 = \frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 E^2 c_0.$$

Gostota prepuščenega energijskega toka j_{prep} je

$$j_{prep} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_0 E'^2 c_2 = j_{vp} \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Izračunajmo še gostoto energijskega toka odbitega valovanja j_{odb}:

$$j_{odb} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_0 E''^2 c_1 = j_{vp} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

Energija se ohranja, zato med gostotami energijskih tokov velja zveza

$j_{vp} = j_{prep} + j_{odb}$.

Razmerje med gostoto odbitega energijskega toka in gostoto vpadnega energijskega toka je enako:

$$j_{odb} / j_{vp} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

Pri prehodu vidne svetlobe iz zraka (n=1.0) v steklo (n=1.5) ali iz stekla v zrak se odbije 4% energijskega toka, na čisti stekleni šipi torej skoraj 8% energijskega toka. Huje je v optičnih napravah, kjer potuje svetloba skozi več zaporednih leč. Tam bi se gostota energijskega toka bistveno zmanjšala, če leče ne bi bile pokrite s tankimi antirefleksnimi plastmi, a o tem pozneje.

Podoben račun kot zgoraj lahko brez težav naredimo tudi za primer, ko pada svetloba na mejo dielektrikov pod kotom α in se lomi pod kotom β. Računa ne bomo naredili. Navedimo samo rezultat v dveh posebnih primerih.

V primeru, ko je električna poljska jakost pravokotna na ravnino, ki jo tvorijo vpadni, odbiti in lomljeni žarek velja

$$j_{odb} / j_{vp} = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2.$$

V bližini totalnega odboja, ko je eden od kotov približno 90^0, je j_{odb}/j_{vp} približno 1.

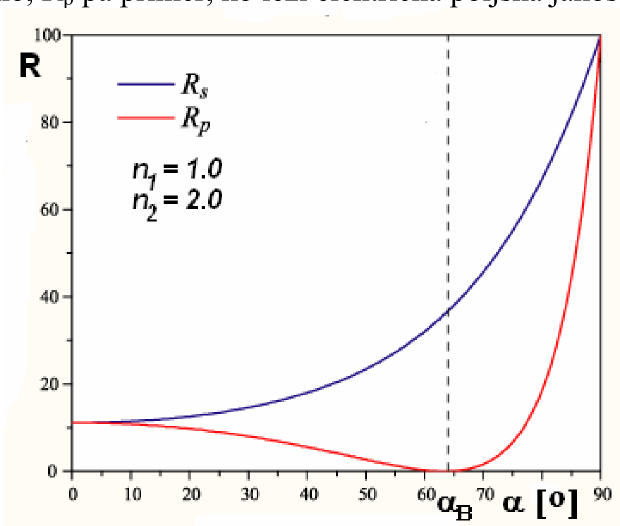
V drugem posebnem primeru leže električne poljske jakosti vseh treh valovanj v ravnini, ki jo tvorijo vpadni, odbiti in prepuščeni žarek. V tem primeru dobimo:

$$j_{odb} / j_{vp} = \left(\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \right)^2 .$$

V primeru ko je kot med odbitim in lomljenim žarkom 90^0, ko je torej $\beta = 90^0 - \alpha$, je $j_{odb}/j_{vp} = 0$. To se zgodi, ko je kot α podan z enačbo:

$tg\alpha = n_2/n_1$.

Ta kot $\alpha = \alpha_B$ imenujemo Brewstrov kot. O njem bomo več govorili v zvezi s polarizacijo valovanj. Tudi tu se blizu kota totalnega odboja odbije skoraj vse valovanje. Odbojnost $R = j_{odb}/j_{vp}$ v odvisnosti od vpadnega kota α za poseben primer, ko je $n_1 = 1$ in $n_2 = 2$ kaže naslednja slika. R_s opisuje primer, ko je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino, R_p pa primer, ko leži električna poljska jakost v vpadni ravnini.



Lomni količnik snovi v splošnem ni konstanten, ampak se spreminja z valovno dolžino svetlobe. Lahko si predstavljamo, da so električni naboji v snovi elastično vezani, elektromagnetno valovanje pa vzbudi nihanje nabojev.

Vsiljeno nihanje smo obravnavali pri mehaniki. Izračunali smo, kakšen je vpliv sile $F = F_0 \sin\omega t$, ki deluje na utež dušenega vzmetnega nihala. Ugotovili smo, da lahko časovni potek odmika iz mirovne lege zapišemo kot $x = x' \sin\omega t + x'' \cos\omega t$, pri čemer sta amplitudi x' in x'' enaki:

$$x' = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$x'' = -\frac{(F_0/m)2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} .$$

Tu je ω_0 lastna krožna frekvenca nedušenega nihala, β pa faktor dušenja. Zaradi enostavnosti se ukvarjajmo samo s frekvencami, ki niso v neposredni bližini resonance: $|\omega - \omega_0| >> 2\beta$.

V tem primeru lahko drugi člen v obeh imenovalcih zanemarimo. Velja tudi $x'' << x'$, zato x'' (izgube) zanemarimo, x' pa je približno enak

$x' \approx (F_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$.

Pri frekvencah, ki so nižje od resonančne frekvence ($\omega < \omega_0$) je x' pozitiven. Nad resonanco ($\omega > \omega_0$) je x' negativen. Utež niha z nasprotno fazo kot sila.

Vrnimo se k elektromagnetnemu valovanju. Namesto uteži nastopajo električno nabiti delci. Sila F je enaka $F = eE = eE_0 \sin\omega t$. Zaradi enostavnosti smo vzeli nabit delec z maso m pri x=0 (kx=0). Produkt x'e,

$x'e = (e^2E_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$,

je enak amplitudi nihajočega električnega dipolnega momenta. Amplituda P_0 nihajoče električne polarizacije, ki niha v fazi z električno poljsko jakostjo ($\omega<\omega_0$) ali v nasprotni fazi ($\omega>\omega_0$) je enaka

$P_0 = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_0 = (ne^2E_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$.

Tu je n število nihajočih električno nabitih delcev v enoti prostornine. Dielektričnost sredstva ε je torej enaka

$\varepsilon = 1+ (ne^2/m\ \varepsilon_0)/(\omega_0^2 - \omega^2)$.

Ko frekvenca elektromagnetnega valovanja narašča in se približuje resonanci tudi dielektričnost in z njo lomni količnik naraščata. Nad resonanco sta dielektričnost in lomni količnik manjša od 1. Običajno je v snovi več različnih električno nabitih delcev, ki nihajo v električnem polju in tudi njihove resonančne frekvence so različne. V bližini resonance, ko se ε znatno razlikuje od 1, je tudi absorpcija elektromagnetnega valovanja močna. Zato situacijo, ko je $\varepsilon<1$ redko opazimo. Srečamo jo pri rentgenskih žarkih. Za rentgenske žarke z valovno dolžino 0.125 nm je $1-\varepsilon$ pri diamantu $4.6\ 10^{-6}$, pri siliciju $4.9\ 10^{-6}$ in pri bakru $1.6\ 10^{-5}$. V vseh omenjenih primerih je lomni količnik podan z enačbo

$n(\omega) = 1 - (\omega_P/\omega)^2$,

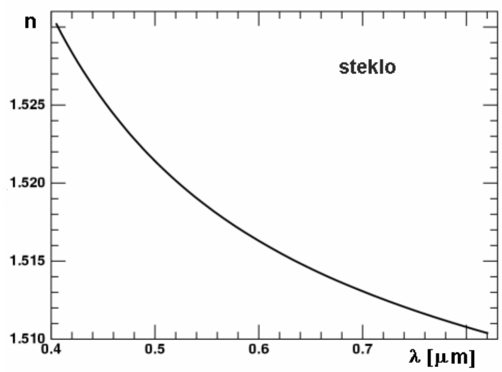
ki se dobro ujema s prej izračunano frekvenčno odvisnostjo dielektrične konstante, ko je $\omega>>\omega_0$. Na prvi pogled izgleda, da je hitrost rentgenskih žarkov v teh snoveh večja od svetlobne hitrosti v vakuumu. V resnici je večja le fazna hitrost $c_f = c_0/n(\omega)$. Kot smo že omenili energija in informacije potujejo s skupinsko hitrostjo c_g, $c_g = d\omega/dk$. Izračunajmo, kolikšna je skupinska hitrost rentgenskih žarkov, ko velja prej omenjena frekvenčna odvisnost lomnega količnika. Zvezo $k = \omega/c = \omega n(\omega)/c_0$ zapišemo v obliki $\omega n(\omega) = c_0 k$ in jo odvajamo po k. Pri tem dobimo

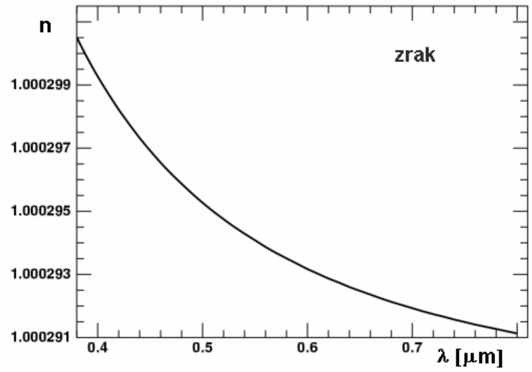
$$c_g = \frac{c_0}{n(\omega) + \omega\dfrac{dn(\omega)}{d\omega}} = \frac{c_0}{1+\left(\dfrac{\omega_P}{\omega}\right)^2}.$$

Skupinska hitrost c_g je seveda manjša od hitrosti c_0.

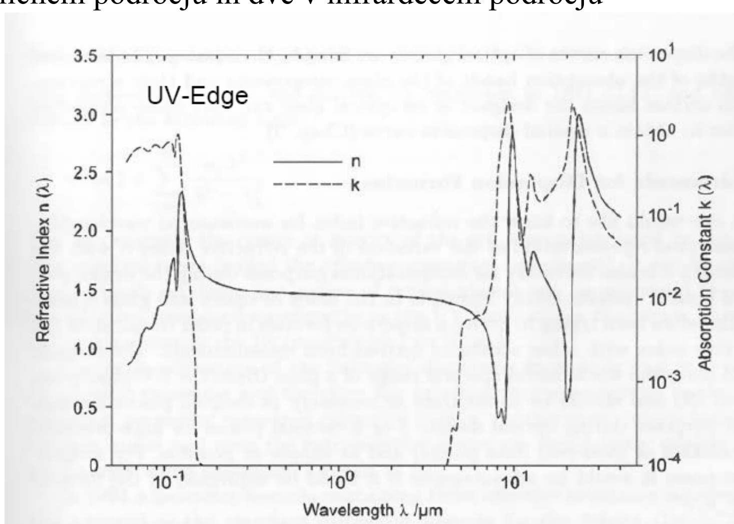
Odvisnost lomnega količnika od frekvence ali valovne dolžine imenujemo disperzija. Zaradi disperzije svetlobe v vodnih kapljicah vidimo mavrico. Disperzijo svetlobe uporabljamo v spektralni analizi.

Svetloba, ki v ravnem curku pade na prizmo, je v splošnem sestavljena iz elektromagnetnih valovanj različnih valovnih dolžin, ki se na prizmi različno lomijo. Na zaslonu izmerimo porazdelitev svetlobe po valovni dolžini. Pri tem je seveda treba vedeti, kako je lomni količnik stekla ali druge snovi, iz katere je prizma, odvisen od valovne dolžine. Disperzijski krivulji, ki podajata odvisnost lomnega količnika od valovne dolžine, za optično steklo in zrak pri normalnih pogojih, kažeta naslednji sliki.

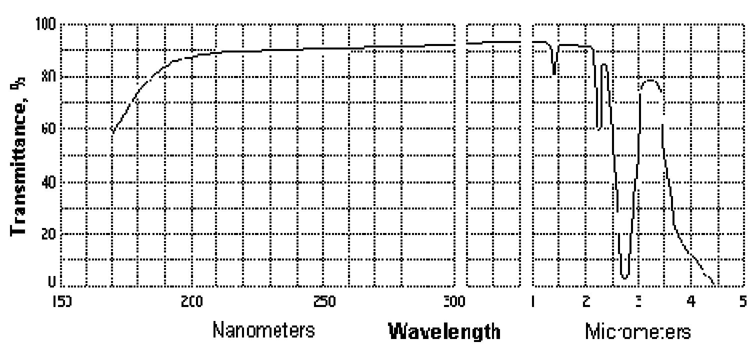




Odvisnost lomnega količnika kremenovega (SiO_2) stekla v širšem področju valovnih dolžin je narisana na naslednji sliki. Lomni količnik predstavlja polna črta, črtkana pa je povezana z absorpcijskim koeficientom. Na sliki vidimo v grobem tri optične resonance: eno v ultravijoličnem področju in dve v infrardečem področju



Naslednja slika kaže razmerje med prepuščenim in vpadlim energijskim tokom pri 10 mm debelemu kremenovenu steklu v odvisnosti od valovne dolžine svetlobe.



Slika je povezana z gornjo. Pod 200 nm in nad 4 μm opazimo povečano absorpcijo svetlobe, ki je posledica približevanja optičnim resonancam. V področju, kjer je steklo prozorno, je prepustnost manjša od 1 zaradi odboja na obeh površinah steklene plošče.