

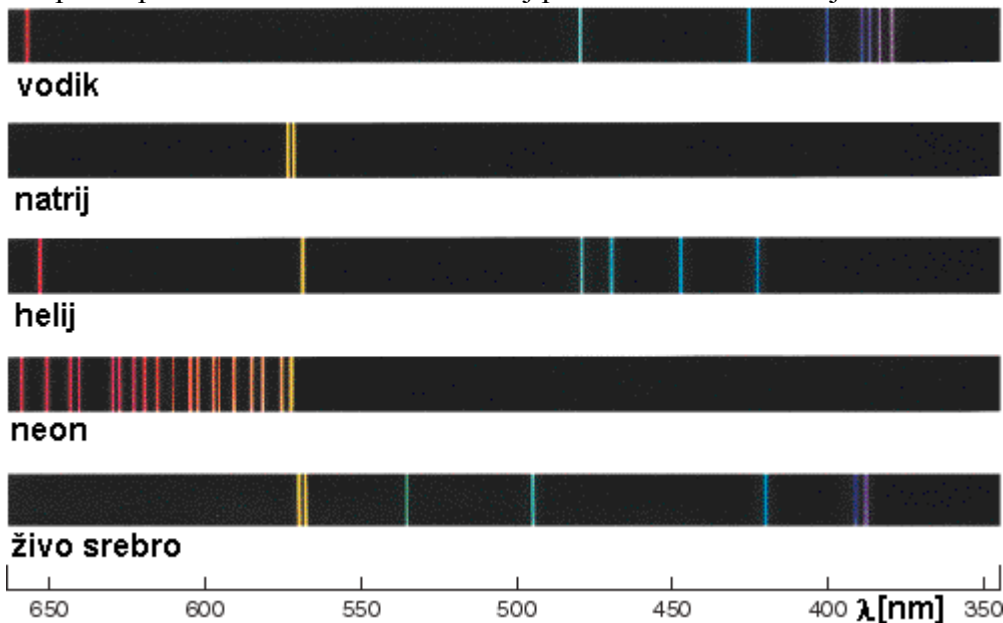
## INTERFERENCA SVETLOBE

Interferenco smo že obravnavali pri mehanskih valovanjih. Nekaj osnovnih dejstev smo povedali tudi o uklonu.

Interferenco radijskih valov ali mikrovalov obravnavamo enako kot interferenco mehanskih valov. Namesto odmika ali spremembe tlaka se pri interferenci elektromagnetnega valovanja sešteva električna poljska jakost ali gostota magnetnega polja. Če na neko mesto prihaja elektromagnetno valovanje iz dveh izvorov in se frekvenci izvorov malo razlikujeta, opazimo utripanje. Amplituda električne poljske jakosti narašča in pada s frekvenco, ki je enaka razliki frekvenc izvorov. Ko sta frekvenci izvorov enaki, opazimo na mestih, kamor prideta valovanji v fazi, ojačitev. Na mestih, kamor prideta valovanji v nasprotni fazi opazimo oslabitev valovanja.

Drugače je pri svetlobi. Svetlobo oddajajo atomi pri prehodu iz višjega energijskega stanja v nižje energijsko stanje. Atome vzbudimo v višja energijska stanja na več načinov. Če snov dovolj segrejemo jih vzbudi termično gibanje. Ko skozi plin teče električni tok, prihaja do trkov elektronov in ionov z atomi ali molekulami. V dovolj redkem plinu so energije ionov in elektronov pri trkih dovolj velike, da pride do vzbuditve.

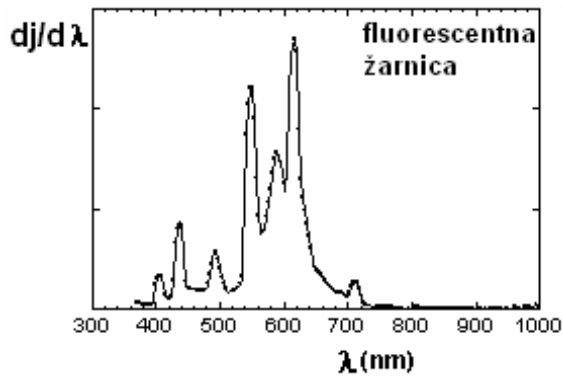
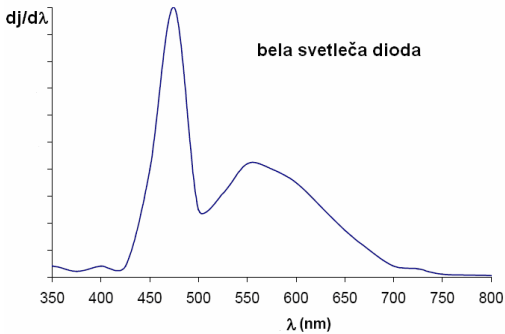
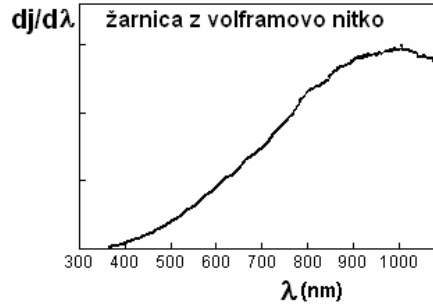
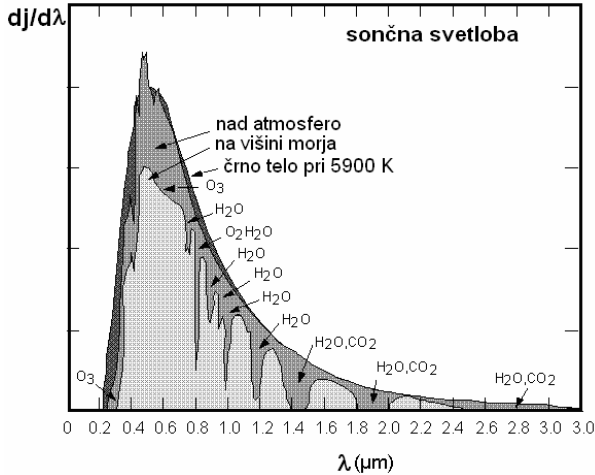
Spektri plinskih svetil so črtasti. Nekaj primerov kaže naslednja slika.



Upoštevati je treba kvantno naravo atomov. Dovoljene so samo določene energije, zato so spektri črtasti. Spektri trdnih svetil, na primer nitke žarnice ali svetleče diode, so zvezni. Predstavimo jih s porazdelitvijo gostote energijskega toka po valovni dolžini  $dj/d\lambda$ . Tu je  $dj$  gostota energijskega toka, ki ustreza valovanju z valovno dolžino v intervalu med  $\lambda$  in  $\lambda+d\lambda$ . »Vsota« po vseh intervalih oziroma integral

$$\int_0^{\infty} (dj / d\lambda) d\lambda$$

je seveda enak celotni gostoti energijskega toka  $j$ . Porazdelitev gostote energijskega toka po valovni dolžini  $dj/d\lambda$  za nekaj značilnih svetil predstavljajo naslednje slike.



Nemoten atom seva svetlobo kratek čas. Kratkotrajnemu valovanju, ki ga pri tem izseva, pravimo valovna poteza. Med valovnimi potezami, ki jih sevajo različni atomi ni nobene fazne povezave, zato pravimo, da je svetloba, ki jo izsevajo običajna svetila, nekoherentno valovanje. Če vzamemo dva izvora nekoherentnih valovanj interferenčni poskus ne uspe. Ne opazimo ojačitev in oslabeitev. Da bomo to razumeli izračunajmo gostoto energije in z njo povezano gostoto energijskega toka pri nekoherentnem valovanju. Da ne bo težav obravnavajmo poenostavljen model. Vse valovne poteze naj imajo enako frekvenco in enako amplitudo električne poljske jakosti  $E_0$  pa še električna poljska jakost naj pri vseh valovnih potezah niha v isti smeri. Vzemimo, da imamo opraviti z  $N$  valovnimi potezami, pri čemer je  $N$  veliko število. Električna poljska jakost v valovanju, ki se širi vzdolž osi  $x$  je enaka:

$$E = \sum_{i=1}^N E_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_i).$$

Faze  $\varphi_i$  so kot že omenjeno naključno porazdeljene. Povprečna gostota energije je enaka

$$\langle w \rangle = 2 \langle w_e \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_0^2 \langle \sin(\omega t - kx + \varphi_i) \sin(\omega t - kx + \varphi_j) \rangle.$$

Časovno povprečje produkta sinusov je enako

$$\langle \sin(\omega t - kx + \varphi_i) \sin(\omega t - kx + \varphi_j) \rangle = (1/2) \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

Zato je povprečna gostota energije

$$\langle w \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

Dvojno vsoto razdelimo na dva dela. Najprej vzemimo, da je  $i=j$ . V tem primeru je  $\varphi_i - \varphi_j = 0$ . Vsaki vrednosti  $i$  ustreza en  $j$ , vrednosti  $i$  je  $N$ ,  $\cos(\varphi_i - \varphi_j)$  pa je v teh primerih 1, zato je ta del dvojne vsote enak  $N$ .

V drugem delu dvojne vsote nastopajo členi, pri katerih  $i \neq j$ . Fazne razlike  $\varphi_i - \varphi_j$ , ki nastopajo v teh členih, so enakomerno porazdeljene na intervalu od 0 do  $2\pi$ . Zato je vsota kosinusov enaka nič. Ti členi pravzaprav predstavljajo interferenco valovnih potez. Zaradi naključnih vrednosti faz valovnih potez interference ni opaziti. Gostota energije elektromagnetnega valovanja je enaka

$$\langle w \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} N = \sum_{i=1}^N \langle w_i \rangle.$$

Gostota energije je torej enaka vsoti gostot energij valovnih potez. Če uporabimo dva izvora nekoherentne svetlobe A in B velja enako. Gostota energije  $\langle w \rangle$  je enaka

$$\langle w \rangle = \langle w_A \rangle + \langle w_B \rangle.$$

Interference ni opaziti.

Interferenco nekoherentne svetlobe opazimo, ko curek nekoherentne svetlobe razdelimo na dva dela, ki ju potem zopet združimo. Pa tudi tu moramo paziti, da razlika poti delnih curkov ni prevelika. Ko delna curka zopet združimo, se mora »srečati« svetloba iz istih izvorov. Razlika poti mora biti krajša od poti, ki jo prepotuje valovna poteza v času sevanja atomov. V resnici je največja razlika poti, pri kateri še opazimo interferenčne pojave in jo imenujemo koherentna dolžina svetlobe, še krajša. V plinih se atomi gibljejo. Pri tem pride do Dopplerjevega premika, ki razširi črte v spektru svetlobe in skrajša koherentno dolžino. Drugi vzrok za razširitev črt in skrajšanje koherentne dolžine so trki med atomi. Koherentna dolžina Na plinske svetilke pri nizkem tlaku je nekaj desetih mm. Svetleče diode imajo koherentno dolžino reda velikosti 10  $\mu\text{m}$ . V splošnem imajo trdna svetila koherentno dolžino enako nekaj valovnim dolžinam.

Bistveno daljšo koherentno dolžino imajo laserji. Laser oddaja vzporeden curek enobarvne svetlobe. Plinski HeNe laser z valovno dolžino 633 nm ima koherentno dolžino od nekaj dm do več sto km. Trdni laserji imajo koherentno dolžino od nekaj mm do nekaj m. V obeh primerih je velik razpon koherentnih dolžin povezan s kvaliteto izdelave laserja.

Zdaj, ko smo spoznali pogoje, pri katerih pride do interference svetlobe, si oglejmo nekaj primerov.

Na steklene površine delov optičnih naprav pogosto naparijo tanke antirefleksne plasti, da čim bolj zmanjšajo odboj svetlobe. Mimogrede omenimo, da se tanke plasti uporabljajo tudi pri zrcalnih za povečanje odbojnosti. Nas bo zanimalo, kako debela mora biti antirefleksna plast in, kolikšen lomni količnik mora imeti.

Na obeh mejah antirefleksne plasti pride do odboja svetlobe. Električna poljska jakost v odbitih valovanjih mora nihati v nasprotni fazi, amplitudi električne poljske jakosti v obeh valovanjih pa morata biti enaki. V tem primeru zaradi destruktivne interference odbitega valovanja ni. Ker je antirefleksna plast tanka, ni težav s koherenco svetlobe. Najprej ugotovimo, kdaj sta amplitudi električne poljske jakosti enaki. V prvem približku izenačimo odbojnost na obeh površinah. S tem zanemarimo zmanjšanje energijskega toka zaradi odboja na prvi površini in vse ostale odboje. Ker je ponavadi odbojnost majhna, je omenjeni približek kar dober. Velja

$$\left(\frac{n_1 - n}{n_1 + n}\right)^2 = \left(\frac{n - n_2}{n + n_2}\right)^2.$$

Z  $n_1$  smo označili lomni količnik sredstva, iz katerega prihaja svetloba. Če je to zrak, je  $n_1=1$ . Lomni količnik antirefleksne plasti smo označili z  $n$ , lomni količnik drugega sredstva (n. pr. leče) pa z  $n_2$ . V ulomku na levi strani enačbe števec in imenovalec delimo z  $n$ , v ulomku na desni strani enačbe pa števec in imenovalec delimo z  $n_2$ . Takoj ugotovimo, da je enačba izpolnjena, ko je  $n_1/n = n/n_2$ , oziroma  $n = \sqrt{n_1 n_2}$ .

To je tudi edina rešitev enačbe. Lomni količnik antirefleksne plasti je po velikosti med lomnima količnikoma obeh sredstev. Ko je  $n_1 = 1$  in  $n_2 = 1.5$  je najugodnejši lomni količnik antirefleksne plasti 1.22.

Poglejmo še, kako debela mora biti antirefleksna plast. Ker je lomni količnik antirefleksne plasti po velikosti med lomnima količnikoma obeh sredstev, se valovanji na obeh mejah odbijeta z enako fazo. Na razliko v fazi vpliva daljša pot, ki jo opravi valovanje, ki se odbije na meji med antirefleksno plastjo in sredstvom z lomnim količnikom  $n_2$ . Če je debelina antirefleksne plasti  $d$ , je razlika poti  $2d$ . Na razliko v fazi pa ne vpliva samo razlika poti, ampak tudi lomni količnik sredstva, s katerim je povezana valovna dolžina. Rekli bomo, da je za razliko v fazi pomembna optična pot, to je produkt poti in lomnega količnika. Naj bo valovna dolžina svetlobe v vakuumu  $\lambda$ . V antirefleksni plasti je valovna dolžina  $\lambda/n$ , število valovnih dolžin na poti pa je  $(2d)/(\lambda/n) = (2dn)/\lambda$ . Enako je optični poti deljeni z valovno dolžino svetlobe v vakuumu. Do destruktivne interference valovanj pride, ko je  $(2d)/(\lambda/n) = 1/2$ .

Tedaj valovanje, ki se odbije na drugi ploskvi, zaostaja za valovanjem, ki se odbije na prvi ploskvi, za polovico valovne dolžine, kar pomeni fazni zaostanek za  $\pi$ . Debelina antirefleksne plast mora biti torej enaka  $d = \lambda/4n$ .

Debelina antirefleksne plasti je odvisna od valovne dolžine svetlobe. Zadovoljivo delovanje v širšem območju valovnih dolžin dosežejo tako, da naparijo več zaporednih tankih plasti

Drugi primer, ki si ga bomo ogledali, je odboj enobarvne svetlobe pri pravokotnem vpadu na tanko klinasto plast zraka. Tako plast dobimo, če vzamemo dve stekleni ploščici, ki se na enem robu stikata, na drugi strani pa je med njima predmet debeline  $D$ . Predpostavimo, da sta debelini steklenih ploščic večji od koherenčne dolžine svetlobe. V tem primeru upoštevamo samo interferenco svetlobe, ki se odbije na obeh mejnih plasteh zračnega klina. Posledica interference odbite svetlobe je zaporedje svetlih in temnih prog.

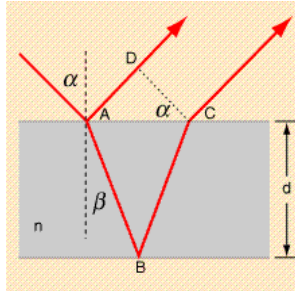
Odbiti valovanji imata nasprotno fazo. Prvič se namreč svetloba odbije pri prehodu iz optično gostejšega v optično redkejšo sredstvo, drugič pa pri prehodu iz optično redkejšega v optično gostejše sredstvo. Na mestu, kjer je debelina zračnega klina  $d$ , je razlika poti obeh valovanj  $2d$ . Ob stiku steklenih ploščic, kjer je  $d=0$ , opazimo zaradi nasprotne faze odbitih valovanj temno progo. Naslednjo temno progo opazimo, ko je razlika poti  $2d$  enaka valovni dolžini svetlobe. V splošnem opazimo temne proge, ko je  $d = N\lambda/2$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$

Svetle proge opazimo, ko je

$$d = (N + \frac{1}{2})\lambda/2, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

S štejem temnih prog od stika ploščic do predmeta izmerimo debelino predmeta D. Če smo našli M prog, je  $D = M\lambda/2$ .

Oglejmo si še interferenco svetlobe pri odboju od tanke plasti, ko svetloba vpadajo poševno, pod kotom  $\alpha$ . To je lahko odboj na opni milnega mehurčka, na tanki oljni plasti na vodi itd. Če opazujemo odboj bele svetlobe, opazimo barve. Vzemimo za primer odboj na opni milnega mehurčka debeline d.

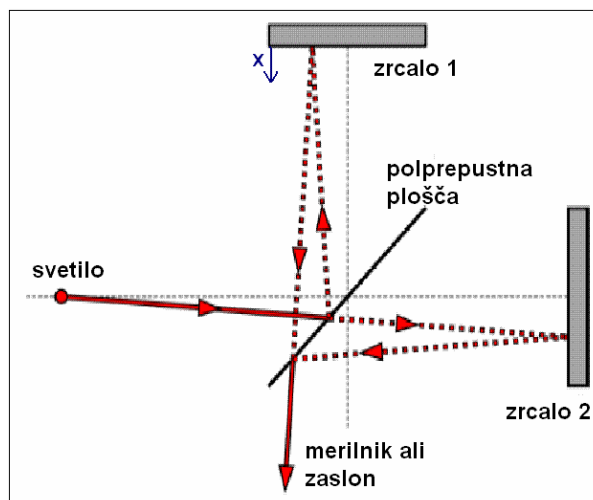


Valovanje, ki zadane točko A se v njej deloma odbije, večina pa se ga lomi pod kotom  $\beta$ . V točki B se valovanje odbije in v točki C zapusti tanko plast. Odbiti valovanji sta vzporedni. Oddaljeni opazovalec opazi konstruktivno interferenco, ko sta valovanji v točkah C in D v fazi. Ker je na obeh straneh opne zrak, pride pri odbojih do fazne razlike  $\pi$ . Električna poljska jakost odbitega valovanja v točki A je nasprotno usmerjena od električne poljske jakosti vpadlega valovanja v točki A. V točki B imata vpadlo in odbito valovanje isto smer. Optična pot na poti ABC je enaka  $2dn/\cos\beta$ . Pot AB, ki je hkrati tudi optična pot, je enaka  $2d\sin\alpha/\cos\beta = 2dn\sin^2\beta/\cos\beta$ . Razlika optičnih poti je enaka  $2dncos\beta$ . Ojačenje dobimo, ko je  $2dncos\beta = (N + \frac{1}{2})\lambda$ , ali

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Tu je N nič ali pozitivno celo število, ki pa ni poljubno. Ko je  $d < \lambda/4n$  ne dobimo ojačitve pri odboju. Pri večjih d je največja vrednost N je enaka celemu delu števila  $(4dn - \lambda)/2\lambda$ . Različnim valovnim dolžinam ustrezajo različni koti  $\alpha$ , zato pri odboju bele svetlobe na tankih plasteh opazimo barve.

Do interference svetlobe pride tudi pri Michelsonovem interferometru.



Vzporeden curek enobarvne svetlobe iz izvora zadene polprepustno ploščo. Del curka se na plošči odbije proti zrcalu 1, del pa ga plošča prepusti in se odbije od zrcala 2. Po odboju na zrcalih se curka združita. Pogosto na pot enega delnega curka postavijo ploščo za izravnavo optičnih poti. En delni curek namreč prepotuje polprepustno ploščo enkrat, drugi pa trikrat. Če razlika optičnih poti ni prevelika pride do interference. Ker curek iz svetila ni natančno vzporeden, opazimo na zaslonu zaporedje svetlih in temnih koncentričnih krogov. Zanima nas točka v središču krogov, kamor lahko postavimo tudi merilnik svetlobnega toka. Ko sta optični poti delnih curkov  $l_1 = l_2 = l$  enaki, sta valovanji na mestu merilnika v fazi:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t - kl)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t - kl).$$

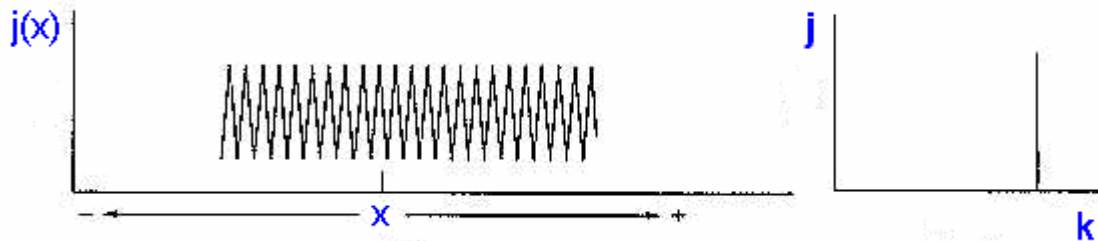
Pri natančnem računu bi morali upoštevati, da je svetloba sestavljena iz valovnih potez, a to končnega rezultata ne spremeni. Lahko si tudi mislimo, da zapisani električni poljski jakosti ustrezata eni valovni potezi. Zaradi preprostosti smo privzeli, da sta obe amplitudi enaki.

Ko premaknemo zrcalo 1 za  $x$ , se optična pot  $l_1$  skrajša za  $2x$ , zato se električni poljski jakosti  $E_1$  na mestu merilnika spremeni faza:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t - kl + 2kx).$$

Električna poljska jakost na mestu merilnika  $E$  je vsota električnih poljskih jakosti  $E_1$  in  $E_2$ . Gostota energijskega toka  $j(x)$ , ki jo izmeri merilnik je enaka

$$j(x) = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle c = 2 \varepsilon_0 E_0^2 c \cos^2(kx) = \varepsilon_0 E_0^2 c (1 + \cos(2kx)) = (j_0/2)(1 + \cos(2kx)).$$



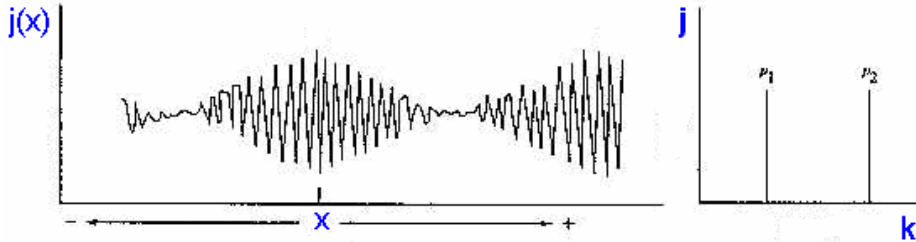
Pri premikanju zrcala na zaslonu nastajajo ali izginejo krogi v odvisnosti od smeri premikanja. Nov krog nastane ali izgine pri premiku  $\lambda/2$ . Tedaj se optična pot spremeni za  $\lambda$ . Tudi merilnik svetlobnega toka zazna pri premiku  $\lambda/2$  enak svetlobni tok, kot pred premikom

Z Michelsonovim interferometrom natančno merimo premike in dolžine. Z njim merimo tudi valovno dolžino in koherentno dolžino enobarvne svetlobe.

Z Michelsonovim interferometrom sta Michelson in Morley pokazala, da je hitrost svetlobe neodvisna od tega, v katerem opazovalnem sistemu jo merimo. Da torej ni odlikovanega sistema za svetlobo in tudi ne »etra«, po katerem se svetloba giblje.

(\*) Zaenkrat smo predpostavili, da oddaja svetilo svetlobo z eno samo valovno dolžino. Poglejmo, kaj se zgodi, ko svetloba ni enobarvna, Znan primer je svetloba, ki jo oddaja natrijeva plinska svetilka. V dubletu okrog 589 nm sta dve črti z valovnima dolžinama  $\lambda_1 = 589.0$  nm in  $\lambda_2 = 589.6$  nm. Svetlobo obeh črt moramo smatrati kot svetlobo z dveh nekoherentnih izvorov. Zato seštevamo gostoti energijskega toka. Da bo

račun preprostejši predpostavimo, da je  $j_0$  za obe črti enak. Valovni števili označimo kot  $k_1 = k + \delta k/2$  in  $k_2 = k - \delta k/2$ . Pri tem je  $k = 2\pi/\langle\lambda\rangle$ ,  $\langle\lambda\rangle = 589.3 \text{ nm}$  in  $\delta k = 2\pi(\lambda_2 - \lambda_1)/\langle\lambda\rangle^2$ . Pri tem dobimo  $j(x) = j_1(x) + j_2(x) = j_0(1 + \cos(2kx)\cos(\delta kx))$ .



Gostota energijskega toka  $j(x)$  je amplitudno modulirana periodična funkcija z osnovno periodo  $1/k$  in s periodo modulacije  $1/\delta k$ . Iz obeh period lahko izračunamo  $\langle\lambda\rangle$  in  $\lambda_2 - \lambda_1$ . Na mestih, kjer je  $\cos(\delta kx)$  enak nič, opazimo poblede. Tam tudi krogi na zaslonu izginejo. Premik zrcala  $\Delta x$  med dvema zaporednima pobledivama je pri natrijevi svetilki enak  $\Delta x = \pi/\delta k \approx 290 \mu\text{m}$ . To je sicer primerljivo s koherentno dolžino natrijeve svetlobe, a še vedno merljivo.

V tem preprostem primeru smo pokazali, da lahko v primeru, ko sta v spektru svetlobe dve črti, z merjenjem  $j(x)$  izmerimo obe valovni dolžini.

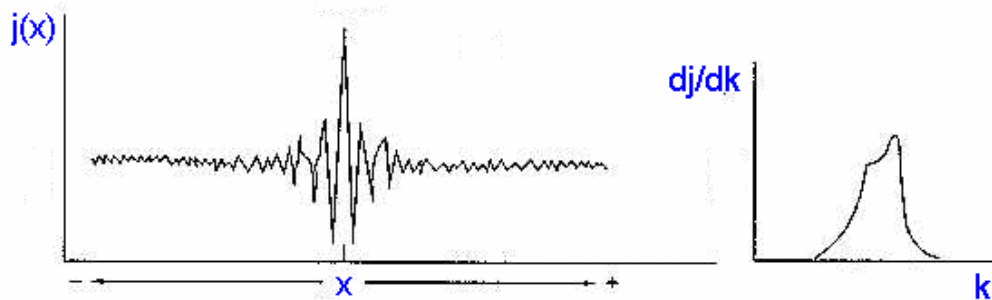
Zelo ozke črte so seveda idealizacija. Zavedati se moramo, da čas sevanja atomov, njihov medsebojni vpliv pa tudi trki atomov in Dopplerjev pojav v plinih širijo resonančne črte in krajšajo koherentni čas. V splošnem govorimo o porazdelitvi gostote energijskega toka po frekvenci, valovni dolžini, ali valovnem vektorju. Vse tri porazdelitve so med seboj povezane tako, da lahko eno izrazimo z drugo. V našem primeru je smiselno govoriti o porazdelitvi gostote energijskega toka po valovnem vektorju  $k$ . Porazdelitev  $dj/dk$  predstavlja gostoto energijskega toka svetlobe z valovnim vektorjem  $k$  v intervalu med  $k$  in  $k+dk$ , deljeno s širino intervala  $dk$ . Temu intervalu valovnega vektorja ustreza  $dj(x)$ , ki je enak

$$dj(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2kx)) \frac{dj}{dk} dk.$$

Gostoto energijskega toka, ki jo zazna merilnik  $j(x)$  dobimo z integracijo po vseh možnih valovnih vektorjih  $k$ . Formalno lahko postavimo meji za  $k$  od nič do neskončno:

$$j(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [1 + \cos(2kx)] \frac{dj}{dk} dk = \frac{1}{2} j_0 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos(2kx) \frac{dj}{dk} dk.$$

Tu je  $j_0$  gostota energijskega toka, ki jo izmerimo pri  $x=0$ . Iz izmerjenega  $j(x)$  se da z obratno Fourierovo transformacijo izračunati porazdelitev  $dj/dk$ . Podrobnejša razlaga presega okvire Fizike I. Oglejmo si le preprost zgled, ki ga kaže naslednja slika.



Na levi je narisana gostota energijskega toka, ki jo zazna merilnik, v odvisnosti od premika zrcala  $x$ , na desni pa izračunana porazdelitev gostote energijskega toka po valovnem vektorju.

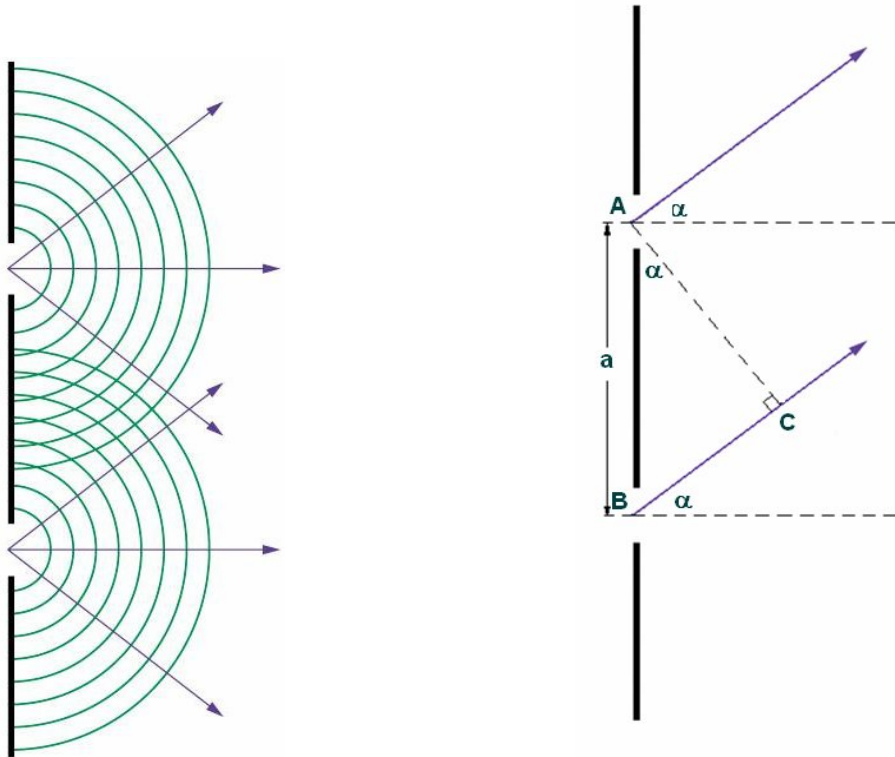
Meritev, ki smo si jo ogledali, je ena izmed meritev spektroskopije s Fourierovo transformacijo, ki jo srečamo tudi na drugih področjih fizike.

## UKLON SVETLOBE

Na kratko smo uklon že omenili. Rekli smo, da se zaradi uklona valovanje širi v področje geometrijske sence. Delež valovanja, ki se širi v področje geometrijske sence, je odvisen od dimenzije reže ali ovire. Če je širina reže primerljiva z valovno dolžino, se večji del valovanja širi v področje geometrijske sence. V posebnem primeru, ko je reža mnogo daljša od valovne dolžine, njena širina pa je dosti manjša od valovne dolžine, se za oviro širijo valjasti valovi enakomerno v vse smeri polprostora. Če je v oviri odprtina, katere premer je dosti manjši od valovne dolžine, dobimo za oviro krogelno valovanje, ki se širi enakomerno v vse smeri polprostora.

Vzemimo, da sta v oviri dve vzporedni dolgi ozki reži, med katerima je razdalja  $a$ . Širina vsake od rež naj bo enaka  $d$ , pri čemer naj bo  $d \ll \lambda$ . Na oviro naj pravokotno vpada enobarvna svetloba z valovno dolžino  $\lambda$ . Zanima nas gostota energijskega toka na oddaljenam zaslonu za oviro.





Iz točk A in B izhajata valovanja v fazi. Do točke na oddaljenem zaslonu, ki je podana s kotom  $\alpha$ , prepotujeta valovanja različno pot. Točki A in C sta enako oddaljeni od točke na zaslonu. Razlika poti je torej razdalja BC, ki je enaka  $a \sin \alpha$ . Do najmočnejšega ojačenja pride, ko je

$$a \sin \alpha = N\lambda, \quad N=0, \pm 1, \dots, \pm N_{max}.$$

Največja razlika poti je enaka  $a$ , zato je  $N_{max}$  celi del razmerja  $a/\lambda$ .

Valovanje se uniči, ko je  $a \sin \alpha = (N + 1/2)\lambda$ .

Oglejmo si uklon podrobneje. Oddaljenost od točke A do točke na zaslonu naj bo enaka  $l$ . Električna poljska jakost, ki jo v točki na zaslonu prispeva reža A naj bo enaka  $E_A = E \sin(\omega t - kl)$ .

Prispevek reže B je enak

$$E_B = E \sin(\omega t - kl - k a \sin \alpha).$$

Pri tem predpostavljamo, da je razlika poti dosti krajša od koherentne dolžine svetlobe.

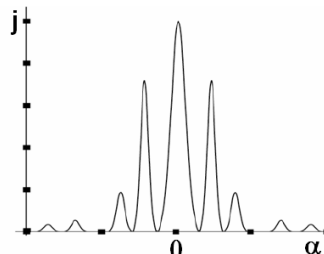
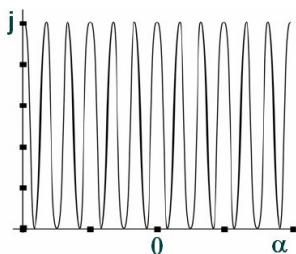
Električna poljska jakost  $E$  v točki na zaslonu je enaka

$$E = E_A + E_B = 2E \sin(\omega t - kl - 1/2 k a \sin \alpha) \cos(1/2 k a \sin \alpha).$$

Gostota energijskega toka v tej točki je enaka

$$j = 1/2 \epsilon_0 E_0^2 c = (2 \epsilon_0 E^2 c) \cos^2(1/2 k a \sin \alpha).$$

Odvisnost gostote energijskega toka od kota  $\alpha$  je za dve ozki in za dve širši reži narisana na naslednjih slikah.



V primeru rež, ki niso ozke v primerjavi z valovno dolžino, so maksimumi gostote energijskega toka približno na istih mestih kot pri zelo ozkih režah ( $a \sin \alpha = N\lambda$ ), višina maksimumov pa se spreminja s kotom  $\alpha$ . O tem več pozneje.

Uklonska slika se spremeni, ko imamo opravka z večjim številom vzporednih rež. Vzemimo, da imamo  $M$  ozkih vzporednih rež, razdalja med katerimakoli sosednjima režama pa naj bo enaka  $a$ . Nanje naj pravokotno vpada ravno valovanje z valovno dolžino  $\lambda$ . V tem primeru prepotuje valovanje iz reže, ki je najbližja točki na zaslonu, do točke na zaslonu pot  $l$ , iz naslednje reže je pod daljša za  $a \sin \alpha$ , potem za  $2a \sin \alpha$  in iz zadnje reže za  $(M-1)a \sin \alpha$ . Brez težav ugotovimo, da so valovanja v fazi, ko je  $a \sin \alpha = N\lambda$ ,  $N = 0, \pm 1, \dots, \pm N_{max}$ .

Maksimumi gostote energijskega toka so pri istih kotih  $\alpha$ , kot v primeru dveh rež.

Izračunajmo električno poljsko jakost v točki na zaslonu:

$$E = E \cdot \sin(\delta) + E \cdot \sin(\delta - \phi) + E \cdot \sin(\delta - 2\phi) + \dots + E \cdot \sin(\delta - (M-1)\phi).$$

Zaradi krajšega zapisa smo uvedli oznaki

$$\delta = \omega t - kl$$

$$\phi = ka \sin \alpha.$$

Vrsto bomo najlaže sešteli v kompleksnem. Oglejmo si vsoto

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E \cdot e^{i\delta} + E \cdot e^{i(\delta - \phi)} + E \cdot e^{i(\delta - 2\phi)} + \dots + E \cdot e^{i(\delta - (M-1)\phi)} = \\ &= E \cdot e^{i\delta} (1 + e^{-i\phi} + e^{-2i\phi} + \dots + e^{-(M-1)i\phi}) \end{aligned}$$

Električna poljska jakost  $E$  je enaka imaginarnemu delu vsote  $\tilde{E}$ . Vsoto v oklepaju lahko grafično predstavimo kot vektorsko vsoto kazalcev dolžine 1 v kompleksni ravnini. Dva zaporedna kazalca oklepata kot  $\phi$ . Lažje bomo vsoto v oklepaju izračunali po pravilu za seštevanje geometrijske vrste:

$$1 + e^{-i\phi} + \dots + e^{-(M-1)i\phi} = \frac{1 - e^{-Mi\phi}}{1 - e^{-i\phi}} = e^{-i\frac{1}{2}(M-1)\phi} \frac{\sin(M\phi/2)}{\sin(\phi/2)}.$$

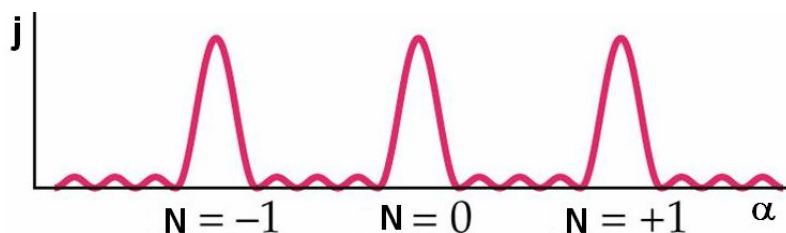
Električna poljska jakost  $E$  je torej enaka

$$E = E \cdot \frac{\sin(M\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \sin\left(\delta - \frac{1}{2}(M-1)\phi\right).$$

Gostota energijskega toka na zaslonu je enaka

$$j = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c \left( \frac{\sin(M\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c \left( \frac{\sin(Mka \sin(\alpha)/2)}{\sin(ka \sin(\alpha)/2)} \right)^2.$$

Gostota energijskega toka kot funkcija kota  $\alpha$  je za primer petih ozkih rež ( $M=5$ ) narisana na naslednji sliki.



Uklonski maksimumi so ožji, kot v primeru dveh rež, med njimi pa je še  $M-2$  manjših uklonskih maksimumov. Z naraščanjem števila  $M$  se glavni uklonski maksimumi ožijo, dodatni uklonski maksimumi med njimi pa se glede na glavne uklonske maksimume manjšajo. Ko je  $M$  veliko število so glavni uklonski maksimumi močni in ozki.

Nastopajo, ko je imenovalec ulomka v izrazu za  $j \sin(k \sin(\alpha)/2)$  enak nič:

$$k \sin(\alpha)/2 = (\pi a/\lambda) \sin(\alpha) = N\pi.$$

To je v resnici že znana zveza  $a \sin(\alpha) = N\lambda$ .

Pri navedenih kotih je gostota energijskega toka enaka

$$j = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c M^2.$$

Širino maksimuma ocenimo tako, da ugotovimo, za koliko moramo spremeniti  $\alpha$ , da bo števec v ulomku prvič postal enak nič:

$$\frac{1}{2} k a \sin \alpha = N\pi$$

$$\frac{1}{2} M k a \sin(\alpha + \delta\alpha) = MN\pi + \pi.$$

Ker je  $\delta\alpha$  majhen, razvijemo  $\sin(\alpha + \delta\alpha)$  v Taylorjevo vrsto do prvega člena:

$$\sin(\alpha + \delta\alpha) = \sin \alpha + \delta\alpha \cos \alpha$$

in dobimo

$$\delta\alpha = \lambda / (a M \cos \alpha).$$

Širina maksimuma je obratno sorazmerna številu rež  $M$ , ki sodelujejo pri uklonu in interferenci

Uklonska mrežica, ki jo uporabljamo za analizo spektrov svetlobe, je narejena iz vrste vzporednih rež v medsebojni razdalji  $a$ , pri čemer je  $a$  reda velikosti  $\mu\text{m}$ . Ko pravokotno nanjo usmerimo svetlobo z valovno dolžino  $\lambda$ , dobimo uklonske maksimume pri kotih, ki jih podaja enačba  $a \sin \alpha = N\lambda$ . Različnim valovnim dolžinam ustrezajo različni koti  $\alpha$ , zato dobimo na zaslonu spekter svetlobe. Poglejmo, kolikšna je najmanjša razlika valovnih dolžin, ki jo še ločimo z uklonsko mrežico. Z diferenciranjem enačbe  $a \sin \alpha = N\lambda$  dobimo

$$a \cos \alpha \delta\alpha = N\delta\lambda.$$

Spremembi valovne dolžine  $\delta\lambda$  ustreza sprememba kota  $\delta\alpha = N\delta\lambda / (a \cos \alpha)$ . Najmanjši kot  $\delta\alpha$ , pri katerem bomo ločili spektralni črti, je reda velikosti širine uklonskih maksimumov  $\delta\alpha = \lambda / (a M \cos \alpha)$ . Ko izenačimo obe vrednosti za  $\delta\alpha$  dobimo  $\delta\lambda = \lambda / (NM)$ .

Ločljivost uklonske mrežice narašča z redom spektra  $N$  in s številom rež  $M$ , ki sodelujejo pri uklonu in interferenci.

Poleg prepustne poznamo tudi odbojno uklonsko mrežico, ki prav tako predstavlja periodično strukturo z razdaljo  $a$  med zarezi. Preprost model take mrežice je CD plošča. Ko posvetimo nanjo z belo svetlobo opazimo barve. Če uporabimo vir enobarvne svetlobe opazimo ojačitve v odbiti svetlobi.

Doslej smo obravnavali idealiziran primer uklona na zelo ozkih režah. Znebimo se ter omejitev in pogledimo, kakšna je uklonska slika »široke« reže pri pravokotnem

vpadu ravnih valov enobarvne svetlobe z valovno dolžino  $\lambda$ . Širina reže naj bo  $d$ . Zanima nas odvisnost električne poljske jakosti od kota  $\alpha$  med pravokotnico od središča reže do zaslona in zveznico od središča reže do točke, v kateri nas zanima  $E$ . Najpreprosteje pridemo do rezultata, če ustrezno prepisemo električno poljsko jakost pri interferenci svetlobe uklonjene na  $M$  ozkih režah. Mislimo si, da je »široka« reža sestavljena iz  $M$  ozkih rež širine  $\delta$ , med katerimi je razdalja  $\delta$ . Pri tem je  $\delta \ll \lambda$ , število  $M$  pa je enako  $M = d/\delta$ . Kot  $\phi$  je enak  $\phi = k\delta \sin \alpha$ , kot  $M\phi$  pa  $M\phi = kd \sin \alpha$ . Ker je kot  $\phi$  majhen lahko dovolj natančno zapišemo  $\sin(\phi/2) = \phi/2$ . Nadalje bomo predpostavili, da je  $E^*$  sorazmerna  $\delta$ :  $E^* = E_0(\delta/d)$ . Vstavimo navedene izraze v izraz za električno poljsko jakost in dobimo

$$E = E_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right) \sin(\omega t - kl - (kd/2) \sin \alpha).$$

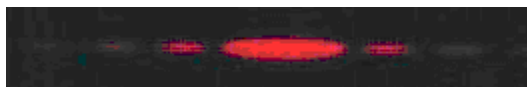
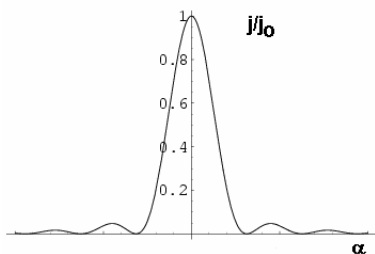
Pri tem je

$$z = \frac{1}{2} k d \sin \alpha.$$

Gostota energijskega toka na zaslonu je enaka

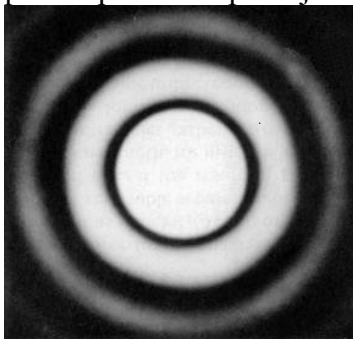
$$j = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 = j_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2.$$

Odvisnost razmerja  $j/j_0$  od kota  $\alpha$  kažeta naslednji sliki.



Gostota energijskega toka je največja na sredini slike ( $\alpha=0$ ). Prvič postane enaka nič, ko je  $z = (\pi d/\lambda) \sin \alpha \approx (\pi d/\lambda) \alpha = \pm \pi$ . Tedaj je  $\alpha = \pm \lambda/d$ .

Pri uklonu na okrogli odprtini opazimo zaporedje svetlih in temnih krogov.



Prvi temni krog opazimo pri kotu  $\alpha = 0.61\lambda/r = 1.22\lambda/d$ .

Pri obravnavi uklona na dveh režah smo omenili, da se v primeru, ko širina rež ni majhna v primerjavi z  $\lambda$  uklonska slika spremeni. Vzemimo dve reži širine  $d$  v medsebojni razdalji  $a$ . Pri kotu  $\alpha$  je razlika poti od ekvivalentnih mest v režah do zaslona enaka  $a \sin \alpha$ , električni poljski jakosti pa sta enaki

$$E_1 = E_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right) \sin(\omega t - kl - (kd/2) \sin \alpha)$$

$$E_2 = E_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right) \sin(\omega t - kl - (kd/2) \sin \alpha - ka \sin \alpha).$$

Njuna vsota je

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right) \cos\left(\frac{ka \sin \alpha}{2}\right) \sin\left(\omega t - kl - \frac{kd \sin \alpha}{2} - \frac{ka \sin \alpha}{2}\right).$$

Gostota energijskega toka je enaka

$$j = 2\varepsilon_0 E_0^2 c \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \cos^2\left(\frac{ka \sin \alpha}{2}\right) = j_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \cos^2\left(\frac{ka \sin \alpha}{2}\right).$$

Spomnimo se da je  $z$  enak  $z = \frac{1}{2}k d \sin \alpha$ . Pri uklonu na dveh ozkih režah smo dobili podoben izraz, ki pa ni vseboval člena  $(\sin z/z)^2$ . Ta člen je posledica uklona na reži. Zaradi njega so ponavadi uklonski maksimumi, ki ustrezajo višjim vrednostim  $N$  ( $a \sin \alpha = N\lambda$ ) šibkejši.

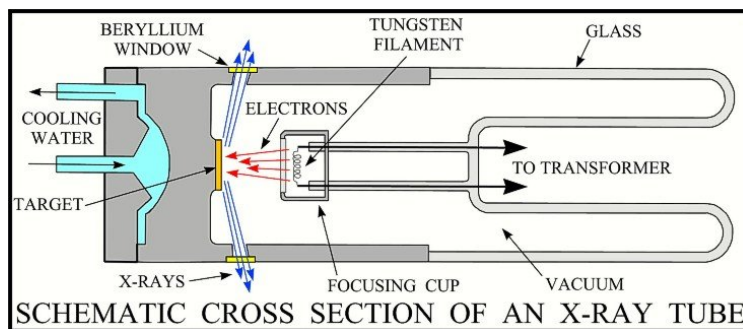
Podobno kot za dve reži velja tudi za uklonsko mrežico. Tudi tu nastopa v izrazu za gostoto energijskega toka produkt dveh členov: člena ki opisuje uklon na reži in člena, ki opisuje interferenco svetlobe iz  $M$  tankih rež. Če označimo gostoto energijskega toka pri  $\alpha=0$  z  $j_0$ , je kotna odvisnost gostote energijskega toka enaka

$$j = j_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right)^2 \left( \frac{\sin(Mka \sin(\alpha)/2)}{M \sin(ka \sin(\alpha)/2)} \right)^2.$$

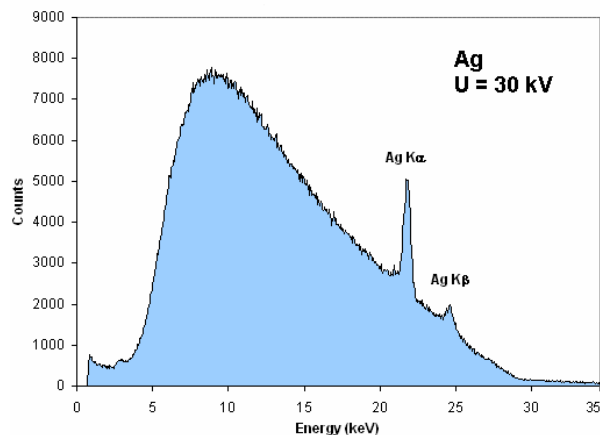
Tudi pri uklonski mrežici je gostota energijskega toka v uklonskih maksimumih odvisna od člena  $(\sin z/z)^2$ , pri čemer je tam  $z = N\pi(d/a)$ .

### (\*) Uklon rentgenskih žarkov v kristalih

Rentgenske žarke dobimo –kot smo že omenili– v sinhrotronu, bolj običajno pa uporabljamo rentgenske cevi.



V rentgenski cevi izhajajo elektroni iz vroče katode (podobno kot v osciloskopu ali televizorju) in jih potem pospešimo v električnem polju z napetostjo med anodo in katodo več deset kV. V anodi se dokaj hitro ustavijo. Med zaviranjem sevajo elektromagnetno valovanje (zavorno sevanje), ki skozi berilijevo okno izhaja iz cevi. Spekter izhajajočih rentgenskih žarkov je odvisen od snovi, iz katere je anoda. Spekter rentgenskih žarkov iz cevi s srebrovo anodo pri napetosti med anodo in katodo 30 kV kaže naslednja slika.



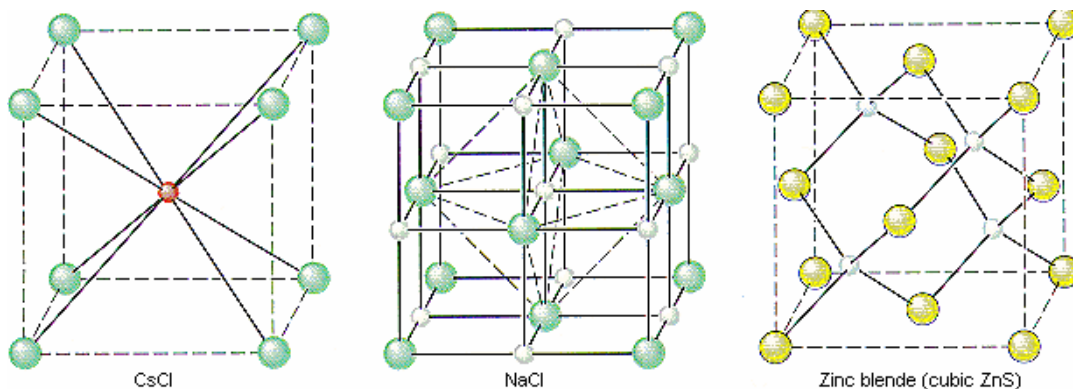
Poleg zveznega spektra zavornega sevanja opazimo tudi črte ( $K_{\alpha}$ ,  $K_{\beta}$ ,...), ki so povezane s prehodi med energijskimi nivoji notranjih elektronov v atomih.

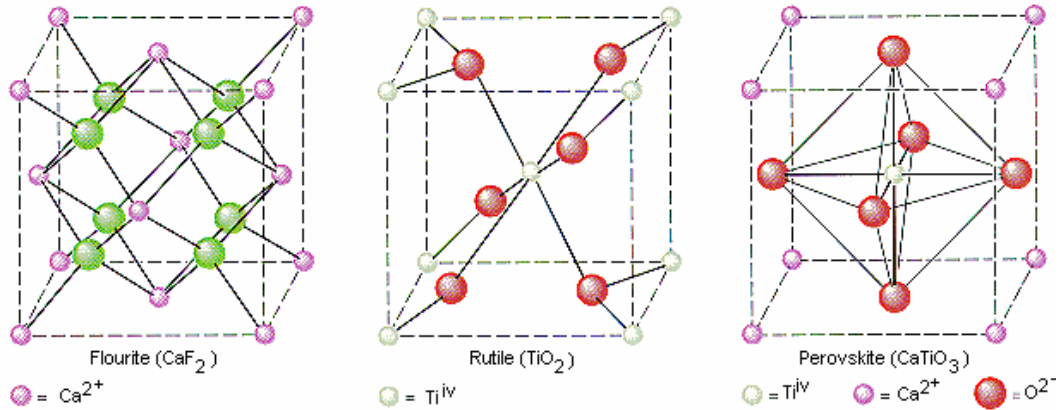
Med detektorji rentgenskih žarkov omenimo Geiger-Müllerjev števec in scintilacijski detektor. Geiger-Müllerjev števec je s plinom napolnjen valjasti kondenzator z zelo tanko notranjo elektrodo. Pozitivni pol vira napetosti je priključen na notranjo elektrodo, negativni pa na zunanjo. Rentgenski žarek povzroči ionizacijo. Ioni potujejo proti zunanji elektrodi, elektroni pa proti notranji. V bližini tanke notranje elektrode je močno električno polje, v katerem elektroni pri trkih ionizirajo atome plina. Posledica tega je sunek električnega toka. Z Geiger-Müllerjevim števcem štejemo sunke toka, ki jih povzročijo rentgenski žarki.

V nekaterih snoveh, na primer v NaI, rentgenski žarek povzroči nastanek sunka vidne svetlobe. Na tej osnovi delujejo scintilacijski detektorji.

Rentgenski žarki imajo valovno dolžino primerljivo z dimenzijo atomov. V snovi pride do uklona rentgenskih žarkov na atomih.

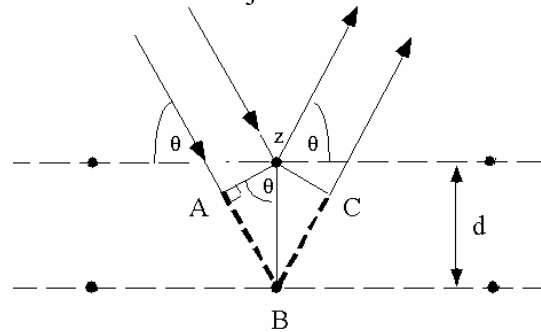
V kristalih so atomi urejeni v kristalni mreži. Najmanjša trirazsežna enota, ki se ponavlja v kristalu je osnovna celica. Nekaj osnovnih celic kaže naslednja slika.





Zaradi uklona rentgenskih žarkov na trirazsežni urejeni kristalni strukturi pričakujemo interferenčne pojave, podobno kot pri enorazsežni urejeni strukturi – uklonski mrežici. Najlaže si to predstavljamo kot odboj rentgenskih žarkov od kristalnih ravnin. To je zaporedje ravnin, na katerih leže atomi. Med sosednjima ravninama je razdalja  $d$ . V trirazsežni kristalni strukturi je takih zaporedij ravnin več. Razlikujejo se po orientaciji in po razdalji med sosednjima ravninama.

Smeri ojačenih curkov valovanja po odboju na kristalnih ravninah izračunamo podobno, kot smo izračunali smeri ojačenih svetlobnih curkov po odboju na tanki plasti.

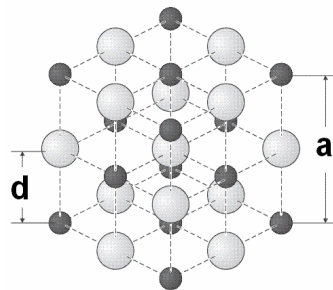


Namesto vpadnega kota  $\alpha$  vpeljemo raje kot  $\theta$ . Kot  $2\theta$  je eksperimentalno merljiv. To je namreč kot med smerjo vpadnih žarkov in smerjo uklonjenih žarkov. Lomni količnik je za rentgenske žarke skoraj natančno 1, valovanje pa se od obeh ravnin odbije z isto fazo. Točki A in z ležita na isti valovni ploskvi. Odbiti valovanji sta v fazi, ko je valovanje v točki C v fazi z valovanjem v točki z. To pa pomeni, da mora biti razdalja ABC enaka celemu mnogokratniku valovne dolžine:

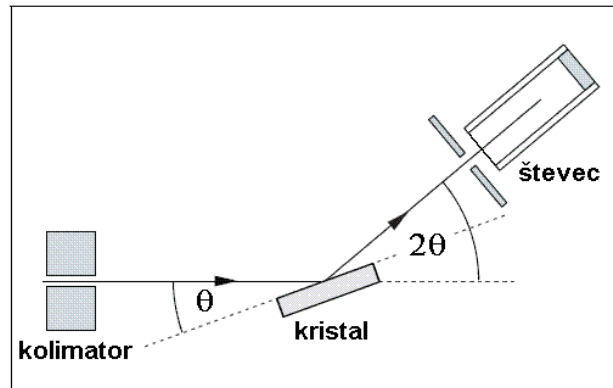
$$2d \sin \theta = N\lambda$$

Enačbo imenujemo Braggova enačba.

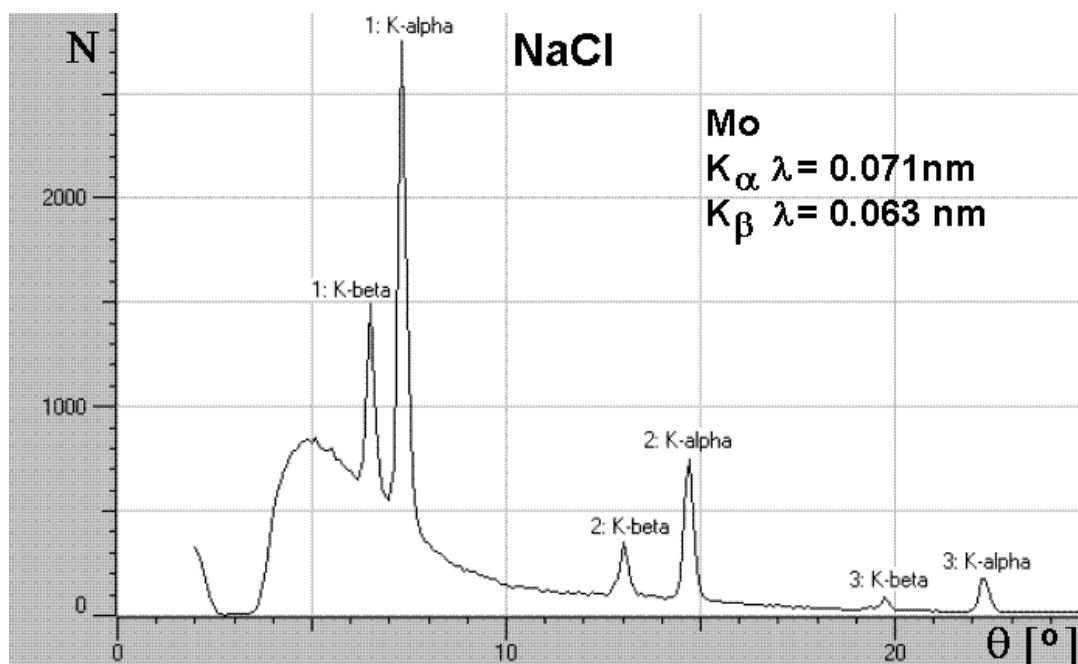
Oglejmo si uklon rentgenskih žarkov na kristalu NaCl.



Z d je označena razdalja med mrežnimi ravninami, ki nas zanimajo. Naslednja slika kaže izvedbo merilnika. Skozi kolimator prihaja curek rentgenske svetlobe. Kristal soli je zasukan za kot  $\theta$ , števec pa za kot  $2\theta$  glede na smer vstopajočega curka rentgenske svetlobe.



Meritev je potekala v korakih  $\delta\theta = 0.1^\circ$ . Pri vsakem kotu so šteli sunke toka v Geiger-Müllerjevem števcu 10 sekund. Kot izvor so uporabili rentgensko cev z molibdenovo anodo in napetostjo 35 kV. Rezultat meritve prikazuje naslednja slika.



V rentgenskem spektru sta izraziti črti  $K_\alpha$  in  $K_\beta$ . V dobljeni odvisnosti števila preštetihih sunkov toka  $N$  od kota  $\theta$  se lepo vidi črte, ki ustrezajo Braggovemu pogoju za  $N = 1, 2$  in  $3$ . Iz dobljenih kotov lahko izračunamo razdaljo med mrežnimi ravninami  $d$ , ki je enaka  $0.282 \text{ nm}$ .

Z uklonom rentgenskih žarkov na kristalih določajo strukturo kristalov: obliko in dimenzije osnovne celice ter lego atomov v osnovni celici. Za določanje lege lahkih atomov uporabljajo uklon nevtronov na kristalih. Tudi materialni delci, na primer nevtroni in elektroni, se obnašajo kot valovanje z de Brogliejevo valovno dolžino  $\lambda = h/G$ , pri čemer je  $G$  gibalna količina delca,  $h$  pa Planckova konstanta  $h$ .



## POLARIZACIJA SVETLOBE

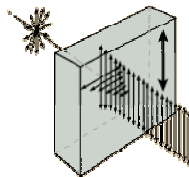
### Polarizacija svetlobe

Svetloba je transverzalno elektromagnetno valovanje. Ko smo govorili o sevanju nihajočega električnega dipola smo spoznali, da v vsaki točki prostora električna poljska jakost niha v določeni smeri. Vzemimo točko na ravnini, na kateri leži dipol in je pravokotna na smer dipola. V tej točki niha električna poljska jakost pravokotno na ravnino, gostota magnetnega polja pa v ravnini. Smer širjenja valovanja se ujema s smerjo vektorja  $\vec{r}$  od sredine dipola do točke na ravnini. To smer ima tudi vektor hitrosti širjenja valovanja  $\vec{c}$ . Spomnimo se, da sta električna poljska jakost in gostota magnetnega polja povezani z enačbo  $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$ .

Elektromagnetno valovanje dipola je linearno polarizirano, ker električna poljska jakost na poljubnem mestu s časom ne spreminja smeri. Drugače je pri svetlobi iz plinskih ali trdnih izvirov. Sestavlja jo množica valovnih potez. Vsako valovno potezo si lahko predstavljamo kot sevanje električnega dipola in je linearno polarizirana. Dipoli pa so v splošnem orientirani v poljubnih smereh, zato je tudi orientacija vektorja električne poljske jakosti v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja valovanja, poljubna. V primeru, ko so vse orientacije vektorja  $\vec{E}$  v tej ravnini enakopravne, govorimo o nepolarizirani svetlobi. Kot smo že omenili, so tudi faze valovnih potez poljubne. Zato je pri nepolarizirani svetlobi gostota energije enaka vsoti gostot energije valovnih potez.

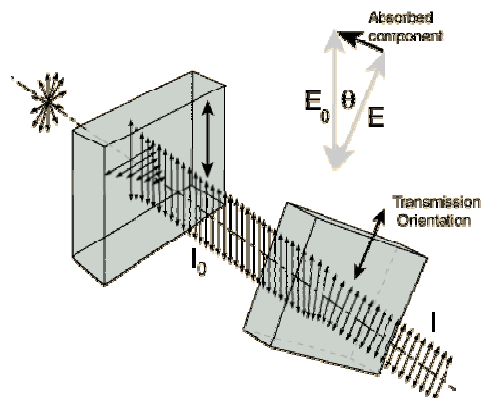
Svetlobo lahko polariziramo. Pri poskusih z linearno polariziranimi mikrovalovi smo opazili, da mreža vzporednih žic ne prepusti valovanja, ko imajo žice smer električne poljske jakosti. Ko mrežo zasukamo za  $90^\circ$  tako, da električna poljska jakost niha v prečni smeri, valovanje prehaja skozi mrežo. Podobno delujejo dikroitični kristali. Naravni dikroitični kristal je kristal turmalina (dokaj zapleten borov in aluminijev silikat), v praksi pa pogosteje uporabljamo umetne dikroitične snovi s trgovskim imenom polaroidi. Znan polaroid je z jodom impregniran polivinilni alkohol. Z raztegovanjem segretega polimera dosežejo, da se polimerne verige uredijo v eni smeri. Atomi joda se vežejo na verige, njihovi elektroni pa se lahko gibljejo vzdolž verig. Svetlobe, ki je polarizirana vzdolž verig polaroid ne prepusti.

Ko na polaroid pravokotno vpada nepolarizirana svetloba, se del svetlobe v polaroidu absorbira, del pa jo polaroid prepusti.



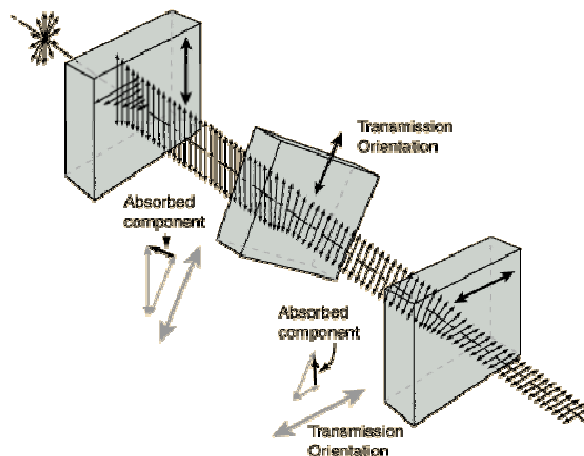
Prepuščena svetloba je linearno polarizirana.

Vzemimo dva polaroida (polarizator in analizator), pri katerih sta prepustni smeri zasukani za kot  $\theta$ .



Gostota energijskega toka se spreminja s kotom  $\theta$ . Največja ( $j = j_0$ ) je pri kot  $\theta = 0$ . Pri kotu  $\theta = 90^\circ$  je enaka nič. Vmes se spreminja kot  $j = j_0 \cos^2 \theta$ .

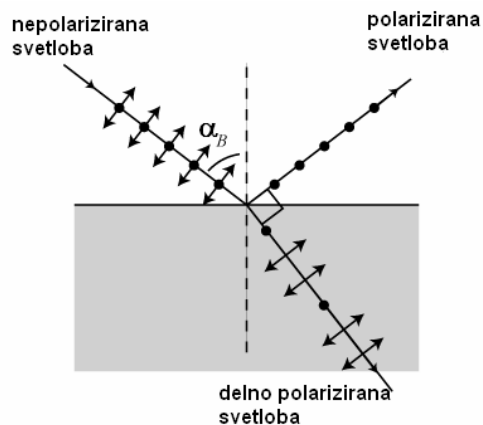
Če med prekrizana polaroida ( $\theta = 90^\circ$ ) damo tretji polaroid, na izhodu iz analizatorja gostota energijskega toka v splošnem ni enaka nič.



Svetlobo lahko polariziramo tudi z odbojem na dielektriku. Ko smo podrobneje obravnavali odboj elektromagnetnega valovanja na meji dveh dielektrikov smo ugotovili, da je pri vpadu pod Brewstrovim kotom  $\alpha_B$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n_2/n_1,$$

odbita svetloba linearno polarizirana. Za mejo zrak-steklo je Brewstrov kot  $56^\circ$ .



Do enakega pojava pride tudi pri prehodu svetlobe iz sredstva z lomnim količnikom  $n_2$  v sredstvo z lomnim količnikom  $n_1$ , ko je lomni kot enak  $\alpha_B$ .

Večji energijski tok polarizirane odbite svetlobe pa tudi boljšo polarizacijo prepuščene svetlobe dobimo z uporabo več zaporednih tankih plasti dielektrika, na primer steklenih ploščic med katerimi je zrak. Pri vsakem odboju se odbije polarizirana svetloba. Zaradi debeline ploščic je odbita svetloba nekoherentna. Pri tem se seštevajo energijski tokovi.

### Optično anizotropne snovi

Pri dielektrikih smo omenili, da vse snovi niso izotropne in, da je v splošnem polarizacija odvisna od smeri električne poljske jakosti. Dielektričnost v splošnem ni skalar, ampak je tenzor. V anizotropnem dielektriku lahko poiščemo tri med seboj pravokotne smeri, ki jih imenujemo lastne smeri tenzorja dielektričnosti. Vzdolž ene od teh smeri je dielektričnost največja, vzdolž druge pa najmanjša. Dielektričnost vzdolž tretje smeri je ponavadi nekje vmes. Poseben primer so enoosni dielektriki, kjer doseže dielektričnost ekstrem (n. pr. maksimum) vzdolž neke osi, drugi ekstrem pa vzdolž katerekoli smeri, ki je pravokotna na os.

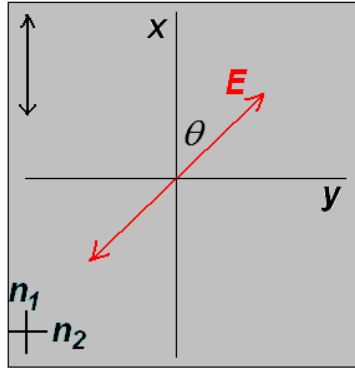
Izotropne so tekočine in kubični kristali, na primer NaCl pa tudi steklo. V nematskih tekočih kristalih so podolgovate molekule urejene vzdolž nematske osi. Nematski tekoči kristal je torej enoosni dielektrik.

Kot vemo, je lomni količnik kvadratni koren iz dielektričnosti pri frekvenci svetlobe. V anizotropnih snoveh je lomni količnik odvisen od smeri električne poljske jakosti, torej od polarizacije svetlobe. Zaradi enostavnosti se bomo ukvarjali le z enoosnimi kristali. Os kristala bomo imenovali optična os. V naslednji tabeli je podan lomni količnik nekaterih enoosnih kristalov za svetlobo, ki je polarizirana vzdolž optične osi ( $n_1$ ) in za svetlobo, ki je polarizirana pravokotno na optično os ( $n_2$ ).

kristal	$n_1$	$n_2$
turmalin	1.638	1.669
kalcit ( $\text{CaCO}_3$ )	1.486	1.658
led	1.313	1.309
kremen ( $\text{SiO}_2$ )	1.553	1.544
natrijev nitrat ( $\text{NaNO}_3$ )	1.337	1.585
rutil ( $\text{TiO}_2$ )	2.903	2.616

V nekaterih kristalih je vzdolž optične osi lomni količnik večji kot v pravokotni smeri, v drugih pa manjši.

Vzemimo ploščico izrezano iz enoosnega kristala tako, kot kaže slika.



Optična os je v ravnini ploščice. Debelina ploščice naj bo  $d$ . Naj na ploščico pravokotno vpada linearno polarizirana enobarvna svetloba, pri čemer naj smer polarizacije oklepa z optično osjo kot  $\theta$ . Situacija je preprosta, ko je  $\theta = 0$  ali  $\theta = 90^\circ$ . V obeh primerih se polarizacija svetlobe ne spreminja. V prvem primeru je hitrost svetlobe v ploščici enaka  $c_0/n_1$ , v drugem primeru pa  $c_0/n_2$ . Oglejmo si primer, ko je  $\theta$  poljuben. V tem primeru zapišemo  $E$  kot vektorsko vsoto projekcij na osi  $x$  in  $y$ . Vzemimo, da je ob vstopu svetlobe v ploščico  $z = 0$ . Pri izstopu iz ploščice je  $z = d$ . Ob vstopu v ploščico velja

$$E_x(0) = E_0 \cos(\theta) \sin(\omega t)$$

$$E_y(0) = E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t).$$

Na mestu, kjer svetloba izhaja iz ploščice dobimo

$$E_x(d) = E_0 \cos(\theta) \sin(\omega t - k_1 d) = E_0 \cos(\theta) \sin(\omega t - \omega n_1 d / c_0)$$

$$E_y(d) = E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - k_2 d) = E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - \omega n_2 d / c_0).$$

Ob izhodu iz ploščice  $E_x$  in  $E_y$  v splošnem nista več v fazi. Fazna razlika  $\Delta\phi$  je po velikosti enaka  $\Delta\phi = (\omega d/c_0)|n_1 - n_2|$ . Posebej zanimiv je primer, ko je  $\theta = \pi/4$  in  $\Delta\phi = \pi/2$ . V tem primeru dobimo za ploščico krožno polarizirano valovanje. Ploščico, s katero spremenimo linearno polarizirano valovanje v krožno polarizirano ali obratno imenujemo ploščica  $\lambda/4$ . Njena debelina je enaka  $d = \lambda/(4|n_1 - n_2|)$ , pri čemer je  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe v vakuumu. V splošnem je valovanje za ploščico eliptično polarizirano.

Krožno polarizirano valovanje zapišemo kot

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$E_y(z, t) = \pm E_0 \cos(\omega t - kz).$$

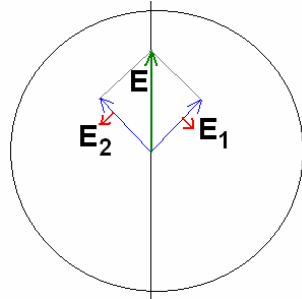
Pri taki izbiri osi  $x$  in  $y$ , kot je na zgornji sliki, ustreza znak  $+$  valovanju, pri katerem se pri fiksnem  $z$  električna poljska jakost velikosti  $E_0$  vrti v nasprotni smeri urinega kazalca. Tako polarizacijo imenujemo leva krožna polarizacija. Znaku  $-$  ustreza desna krožna polarizacija. Ponavadi ločijo med levo in desno krožno polarizacijo na naslednji način. Valovanje, pri katerem se električna poljska jakost vrti v nasprotni smeri urinega kazalca, ko gledamo proti izvoru, je desno krožno polarizirano.

Če pada krožno polarizirano valovanje na polaroid je gostota energijskega toka v prepuščenih svetlobi neodvisna od orientacije polaroida, podobno kot pri nepolarizirani svetlobi.

S krožno polarizacijo je povezan krožni dikroizem, zaradi katerega se valovanje z eno od krožnih polarizacij absorbira v snovi močneje kot valovanje z drugo polarizacijo.

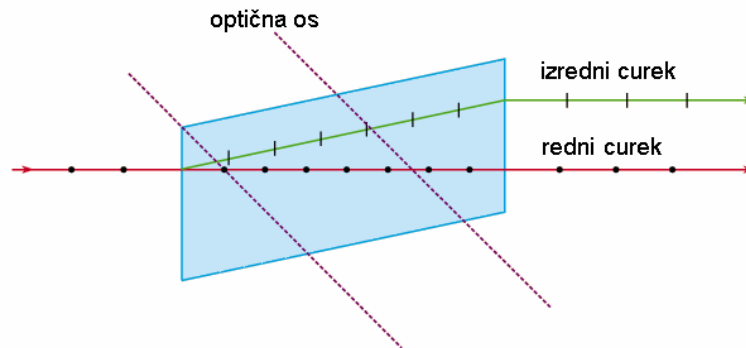
Drug pojav povezan s krožnim valovanjem je optična aktivnost ali sukanje polarizacije. Če med prekržana polarizator in analizator postavimo cev z raztopino

glukoze v vodi, svetlobni tok na izstopu iz analizatorja ni več enak nič. Analizator je treba zasukati za kot, ki je sorazmeren dolžini cevi in koncentraciji sladkorja, da na izhodu ni svetlobnega toka. Prišlo je do zasuka polarizacije svetlobe. Pojav je posledica različnih hitrosti levo in desno polariziranega krožnega valovanja. Linearno polarizirano valovanje namreč lahko vedno zapišemo kot vsoto levo in desno polariziranega krožnega valovanja z enakima velikostma  $E$ .

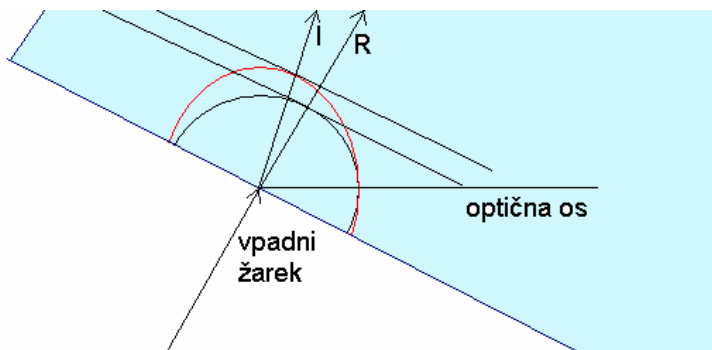


Optična aktivnost je povezana z optično aktivnimi molekulami. Te molekule vplivajo na hitrost krožno polariziranega valovanja. Optično aktivne molekule nastopajo v dveh izomernih oblikah, ki sta povezani z zrcaljenjem. Označujemo jih kot leve in desne izomere. Vse naravne amino kisline so levi izomeri. Če je v raztopini enako število molekul obeh izomerov, ne pride do sukanja polarizacije. Ko je v raztopini več enih molekul kot drugih pride do sukanja smeri polarizacije.

Zanimiv pojav, ki ga opazimo pri optično anizotropnih snoveh je dvojni lom. V določenih primerih vidimo skozi optično anizotropen (dvolomen) kristal dvojno sliko. V takem primeru se curek nepolarizirane svetlobe pri prehodu skozi dvolomno sredstvo razdeli na dva curka linearno polarizirane svetlobe. Curka svetlobe sta polarizirana v med seboj pravokotnih smereh.

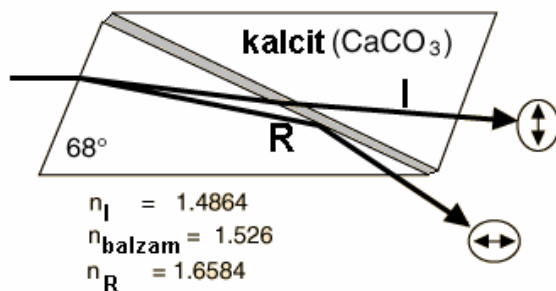


Curek, ki se lomi po lomnem zakonu, imenujemo redni curek. Ta je polariziran pravokotno na optično os. Curek, ki se ne lomi po lomnem zakonu in je polariziran v ravnini, v kateri leži optična os, imenujemo izredni curek. Nastanek obeh curkov lahko razložimo s Huygensovimi načelom.



Za redni curek (R) je lomni količnik neodvisno od smeri širjenja enak  $n_2$ . Za izredni curek (I) je lomni količnik odvisen od smeri širjenja. Pri širjenju vzdolž optične osi je lomni količnik  $n_2$ , pri širjenju v pravokotni smeri pa  $n_1$ . Slika je narisana za primer  $n_1 < n_2$ . Valovne ploskve elementarnih valov imajo za redni curek obliko kroga, za izredni curek pa obliko elipse. Na sliki sta narisani tudi valovni ploskvi, ki predstavljata ovojnico elementarnih valov in smeri širjenja rednega in izrednega curka.

Če ločimo redni in izredni curek, dobimo linearno polarizirano svetlobo. Tako deluje Nicolova prizma.



Izotropne snovi lahko pretvorimo v optično enoosne snovi z močnim električnim poljem. Optična os je vzporedna s smerjo električne poljske jakosti. V kapljevinah (n. pr. nitrobenzenu) je razlika lomnih količnikov sorazmerna kvadratu električne poljske jakosti. Pojav imenujemo Kerrov pojav. V nekaterih trdnih snoveh, primer je litijev niobat, je razlika lomnih količnikov sorazmerna električni poljski jakosti. Pojav se imenuje Pockelsov pojav. Kerrove in Pockelsove celice so uporabne za hitre optične zaklope s preklopnimi časi do  $10^{-10}$  s.

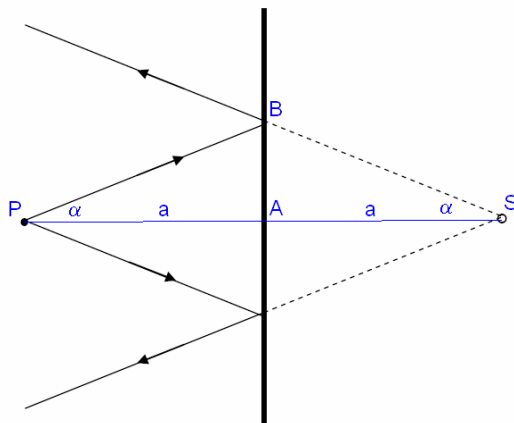
Optično anizotropijo lahko povzročijo tudi mehanske deformacije ali tok kapljevine. Izotropno trdno telo, ki ga mehansko deformiramo v eni smeri, postane optično enoosno z optično osjo v smeri deformacije. Če sestavljajo kapljevino dolge molekule, se te pri toku uredijo v smeri toka. Kapljevina postane optično enoosna z optično osjo v smeri toka.

## ZRCALA IN LEČE

Do sedaj smo obravnavali valovne lastnosti svetlobe. V tem poglavju bomo uklon in interferenco svetlobe zanemarili. Upoštevali bomo le lom in odboj svetlobe. Vemo, da lahko to storimo, ko so dimenzije objektov, ki tu nastopajo, mnogo večje od valovne dolžine svetlobe. Ukvarjali se bomo večinoma s preslikavami. Objekti, ki jih bomo tu srečali so zrcala, leče in njihovo sestavi.

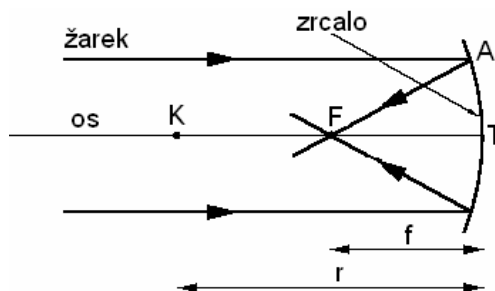
## Zrcala

Zrcala so ravne ali ukrivljene površine, ki odbijajo svetlobo po odbojnem zakonu. Oglejmo si najprej ravno zrcalo in točkast predmet v razdalji  $a$  od zrcala. Predmet naj oddaja svetlobo s sevanjem, ali (pogosteje) odbito svetlobo v vse smeri.



Žarki, ki izhajajo iz predmeta (P), se po odboju na zrcalu razpršijo. Njihovi podaljški se sekajo v točki S. V tej točki tudi vidimo sliko predmeta. Z očesom namreč gledamo tako, da oko zbere svetlobo, ki jo oddaja predmet. V našem primeru je svetloba, ki se odbija od zrcala, taka, kot bi izhajala iz točke S. Zato oko v točki S vidi navidezno sliko predmeta P. Trikotnika PAB in SAB sta enaka. Oba sta pravokotna, imata skupno kateto AB in enak kot  $\alpha$  nasproti te katete. Pravokotna oddaljenost navidezne slike od zrcala je enaka pravokotni oddaljenosti predmeta od zrcala. Če namesto točkastega predmeta vzamemo večji predmet, se vsaka njegova točka preslika v simetrično točko. Slika predmeta je navidezna, pokončna in enako velika kot predmet. Mimogrede omenimo, da slika, ki jo vidimo, ko se gledamo v zrcalu, ni enaka naši sliki na fotografiji. V zrcalu vidimo desno uho na desni, na fotografiji pa na levi. Tudi ko me gleda nekdo drug, bo moje desno uho videl na svoji levi.

Poleg ravnih uporabljamo tudi ukrivljena zrcala. Med temi si oglejmo najprej vbočeno (konkavno) krogelno zrcalo. Zrcalo je del krogle s polmerom  $r$ .

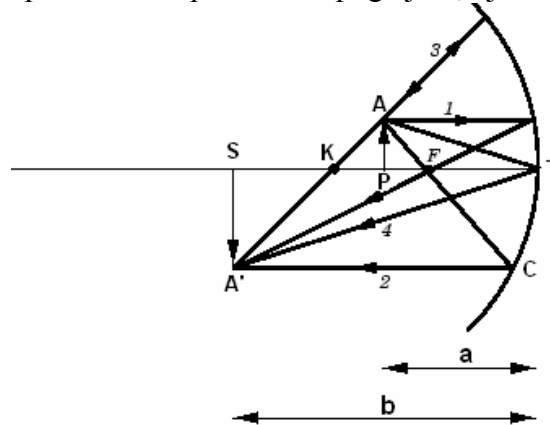


Središče te krogle imenujemo krivišče K. Srednjo točko zrcala imenujemo teme T. Premico skozi krivišče in teme imenujemo os zrcala. Vzemimo žarek, ki je vzporeden z osjo zrcala in zadene zrcalo v točki A. Žarek se odbije po odbojnem zakonu in seka os zrcala v točki F. Izračunajmo razdaljo  $KF=d$ . Trikotnik KAF je enakokrak z vrhom v točki F. Kot pri točki K in kot pri točki A sta enaka vpadnemu oziroma odbojnemu kotu  $\alpha$  v točki A. Po kosinusnem izreku dobimo  $d = r/(2\cos\alpha)$ . V splošnem je razdalja  $d$  odvisna od kota  $\alpha$ , oziroma od oddaljenosti žarka od osi. Če se omejimo na žarke blizu

osi (obosni žarki), za katere je kot  $\alpha$  majhen, lahko vzamemo  $\cos\alpha \approx 1$  in dobimo  $d=r/2$ . Obosni žarki se torej po odboju na konkavnem zrcalu sekajo v točki F, ki jo imenujemo gorišče zrcala. Goriščna razdalja zrcala, to je razdalja  $f$  od gorišča do temena zrcala, je enaka  $r/2$ . V nadaljnjem bomo obravnavali samo obosne žarke. Zavedali se bomo, da se pri večjih oddaljenosih žarkov od osi razdala FT krajša in gorišče ni več dobro definirano. S tem je povezana napaka pasov, ki je ni pri paraboličnem zrcalu.

Če vzamemo snop med seboj vzporednih žarkov, ki niso vzporedni z osjo zrcala in je kot med snopom in osjo zrcala majhen, se po odboju na zrcalu žarki sekajo v goriščni ravnini.

Namesto snopa vzemimo predmet in pogledjmo, kje nastane njegova slika.



Predmet si bomo v optiki predstavljali kot puščico, ki stoji na osi. V našem primeru je predmet v točki P in je od temena zrcala oddaljen za  $a$ . Označimo velikost predmeta  $PA$  z  $X$ . Žarki, ki izhajajo iz točke  $A$  se po odboju na zrcalu sekajo v točki  $A'$ . Slika predmeta nastane med točko  $A'$  in najbližjo točko na osi  $S$ . Velikost slike  $A'S$  označimo z  $Y$ . Na sliki so narisani štirje značilni žarki. Vzporedni žarek (1) se odbije skozi gorišče. Goriščni žarek (2) se odbije vzporedno. Kriviščni žarek (3) pravokotno zadene zrcalo in se odbije vase. Četrti žarek je temenski žarek. Velikost in lego slike izračunamo s primerjavo podobnih trikotnikov. Primerjajmo najprej trikotnika  $APT$  in  $A'ST$ . Velja  $X/a = Y/b$ .

Z  $b$  smo označili oddaljenost slike od temena. Primerjajmo še trikotnika  $AFP$  in  $CFT'$ . Točke  $T'$  ni na sliki. To je točka na osi pravokotno nad točko  $C$ . Če imamo opraviti z obosnimi žarki je  $FT' \approx FT = f$ . V tem primeru velja  $X/(a-f) = Y/f$ .

Izrazimo iz obeh enačb  $X/Y$  pa dobimo enačbo zrcala

$$1/a + 1/b = 1/f.$$

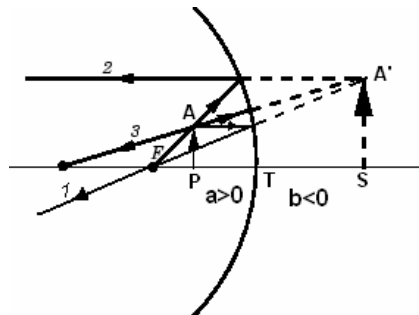
Razmerje  $Y/X$  dobimo iz prve enačbe. Enako je

$$Y/X = b/a.$$

Slika je prava in obrnjena. Lahko jo ujamemo na zaslon. Ko je  $a$  zelo velik, je slika blizu gorišča, pri čemer je  $b > f$ . Slika je manjša od predmeta. Če predmet približujemo zrcalu, se slika oddaljuje od zrcala. Ko je  $a = r = 2f$ , dobimo  $b = a$ . Oddaljenost slike od temena zrcala je enaka oddaljenosti predmeta od temena zrcala. Slika je enako velika kot predmet. Ko je  $f < a < 2f$ , je  $b > a$  in slika je večja od predmeta. V primeru, ko je predmet blizu gorišča, je oddaljenost slike od zrcala zelo velika. V vseh primerih je slika obrnjena.

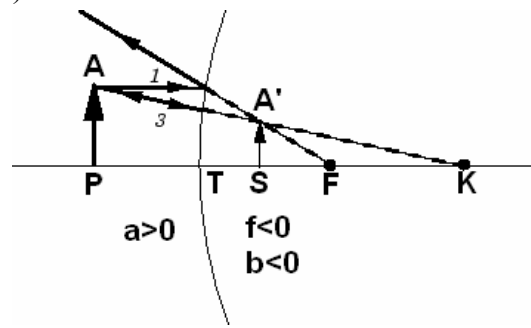
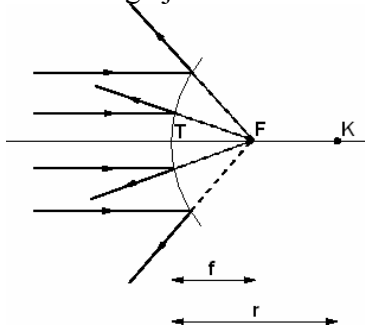


V obravnavanih primerih niti predmeta niti slike ni bilo med goriščem in temenom zrcala. Poglejmo, kaj dobimo, ko postavimo predmet med gorišče in teme zrcala.



Žarki iz točke A se po odboju na zrcalu razpršijo. Njihovi podaljški se sekajo v točki A'. V zrcalu torej vidimo navidezno sliko A'S, ki je pokončna in povečana. Enačba zrcala  $1/a + 1/b = 1/f$  velja tudi v tem primeru, le b je negativen. Razmerje velikosti slike in predmeta  $Y/X$  je tudi v tem primeru enako velikosti razmerja  $b/a$ .

Oglejmo si še izbočeno (konveksno) zrcalo.

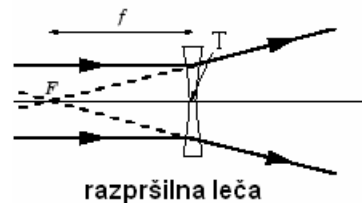
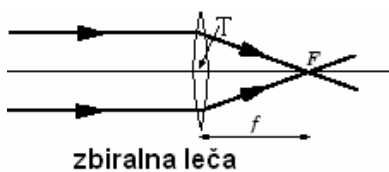


Snop obosnih žarkov, ki so vzporedni z osjo zrcala, se po odboju na zrcalu razprši. Podaljški odbitih žarkov se sekajo v gorišču F. Razdalja od temena do gorišča je enaka  $r/2$ .

Desna slika kaže preslikavo s konveksnim zrcalom. Žarki iz točke A se po odboju na zrcalu razpršijo. Njihovi podaljški se sekajo v točki A'. Slika je torej pokončna, pomanjšana in navidezna. Tudi tu velja enačba zrcala v obliki  $1/a + 1/b = 1/f$ , če vzamemo  $f = -r/2$ . Pri tem pride tudi b negativen. Razmerje velikosti slike in predmeta  $Y/X$  je enako velikosti razmerja  $b/a$ .

## Leče

Leče so ponavadi stekleni objekti omejeni z dvema krogelnima površinama s polmeroma  $r_1$  in  $r_2$ . Ena površina je lahko tudi ravna. Ponavadi je na obeh straneh leče zrak. Obravnavali bomo predvsem tanke leče, katerih debelina je dosti manjša od  $r_1$  in  $r_2$ . Os leče poteka skozi obe krivišči. Ločimo zbiralne in razpršilne leče.



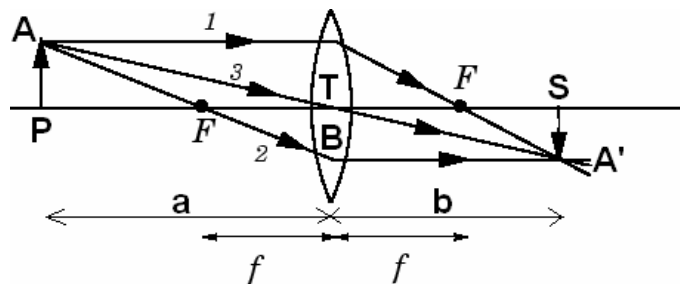
Zbiralne leče so bikonveksna, ki ima dve izbočeni površini, plankonveksna, ki ima eno izbočeno in eno ravno površino in konkavno konveksna, ki ima ubočeno in izbočeno površino, pri čemer je izbočena površina bolj ukrivljena od vbočene oz. ima manjši polmer. Razpršilne leče so bikonkavna plankonkavna in konveksno konkavna.

Snop obosnih žarkov, ki je vzporeden z osjo zbiralne leče, se po lomu na obeh površinah leče zbere v gorišču. Če je leča razpršilna, se žarki po lomu na površinah leče razpršijo, njihovi podaljški pa se sekajo v gorišču. V primeru, ko snop žarkov ni vzporeden z osjo leče, se po lomu na obeh površinah sekajo žarki (zbiralna) ali njihovi podaljški (razpršilna) v goriščni ravnini. Tanka leča ima dve gorišči. Obe goriščni razdalji sta enaki. V primeru, ko obdaja lečo na obeh straneh ista snov z lomnim količnikom  $n'$ , lomni količnik leče pa je  $n$ , je goriščna razdalja leče podana z enačbo

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n}{n'} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Tu se držimo naslednjega dogovora. Polmer izbočene površine je pozitiven, vbočene pa negativen. Zbiralna leča ima pozitivno goriščno razdaljo, razpršilna pa negativno. Ravna površina ima  $r = \infty$ , zato je v izrazu za  $1/f$  člen  $1/r$  za ravno površino enak nič.

Oglejmo si preslikavo z zbiralno lečo, ko je oddaljenost predmeta od temena leče večja od  $f$ .



Vzporedni žarek (1) se pri prehodu skozi lečo lomi skozi gorišče. Goriščni žarek dva se po prehodu skozi lečo lomi vzporedno. Temenski žarek (3) se pri prehodu skozi teme leče samo malo premakne, smeri pa ne spremeni. Ker je leča tanka ta premik zanemarimo. S primerjavo podobnih trikotnikov APT in A'ST ter trikotnikov APF in BTF dobimo enačbo leče

$$1/a + 1/b = 1/f$$

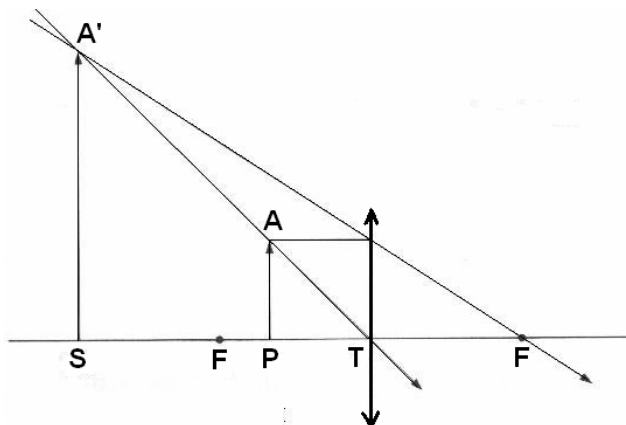
in enačbo za razmerje velikosti slike in predmeta  $Y/X$ :

$$Y/X = b/a.$$

Enačbi sta enaki kot pri zrcalih.

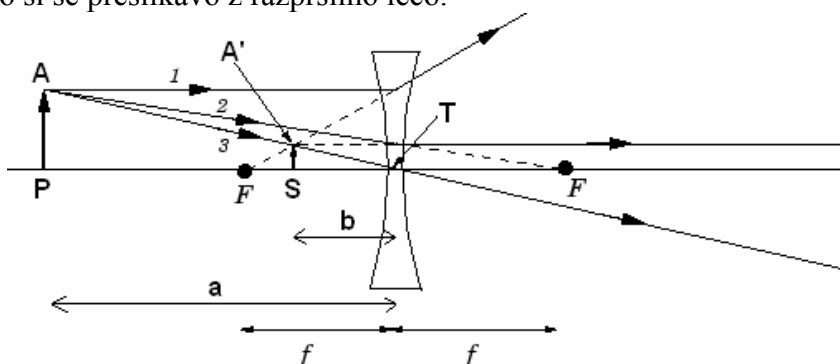
Slika je obrnjena in prava. Ko približujemo predmet gorišču, pri čemer je  $a > f$ , se slika oddaljuje od leče in veča. Ko predmet oddaljujemo od gorišča, se slika približuje gorišču na nasprotni strani leče in se pri tem manjša. Ko je  $a > f$ , je tudi  $b > f$ .

Postavimo predmet med gorišče in teme leče.



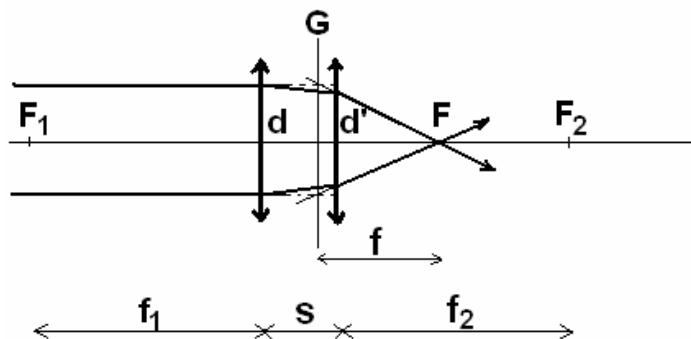
Žarki iz točke A se po lomu na leči razpršijo, njihovi podaljški pa se sekajo v točki A'. Dobili smo povečano, pokončno in navidezno sliko. Enačba leče velja tudi tu, le b pride negativen. Enako je z enačbo za  $Y/X$ .

Oglejmo si še preslikavo z razpršilno lečo.



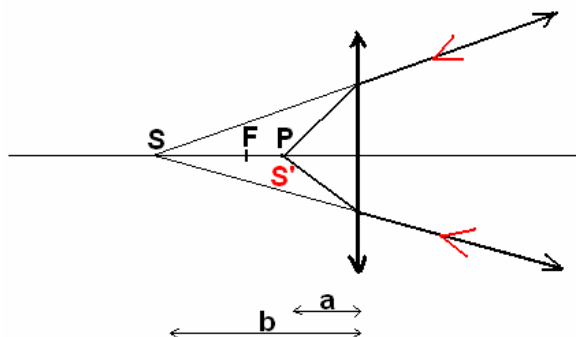
V tem primeru dobimo pomanjšano navidezno pokončno sliko. Tudi tu velja enačba leče, če vzamemo  $f < 0$ . Razdalja b je negativna. Velja tudi enačba za razmerje  $Y/X$ .

Vzemimo dve tanki leči na skupni osi. Zaradi enostavnosti privzemimo, da sta leči zbiralni z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$ . Med njima naj bo razdalja s.



Snop obosnih žarkov, ki so vzporedni z osjo naj pade na prvo lečo. Oglejmo si žarek, ki zadene prvo lečo v oddaljenosti d od osi. Na prvi leči se žarek zlomi in zadene drugo lečo v razdalji d' od os. Na drugi leči se žarek ponovno zlomi in seka os v gorišču sistema leč F. Podaljški vpadnih žarkov in podaljški zlomljenih žarkov po drugi leči se sekajo na ravnini, ki jo imenujemo glavna ravnina. Razdaljo od glavne ravnine do gorišča sistema leč imenujemo goriščna razdalja sistema f. Podobno, kot ima vsaka leča dve gorišči, ima tudi sistem leč dve glavni ravnini in dve gorišči.

Izračunajmo goriščno razdaljo sistema. Po lomu na prvi leči bi se žarki zbrali na osi v oddaljenosti  $f_1$  od leče, če ne bi bilo druge leče. Pri drugi leči upoštevamo obrnljivost žarkov.



Žarki iz točkastega svetila  $P$ , ki je na osi leče med goriščem in temenom, se na leči zlomijo tako, kot da bi izhajali iz točkastega svetila  $S$  (navidezna slika). Če žarke obrnemo, se pri lomu nič ne spremeni. Če torej padajo na lečo žarki, ki bi se, če leče ne bi bilo, zbrali v točki  $S$ , se po lomu na leči zberejo v točki  $S'$ , ki sovpada s točko  $P$ . Med razdaljama  $a$  in  $b$  velja znana zveza  $1/a + 1/b = 1/f$ . Ker je  $S$  navidezna slika predmeta  $P$ , je seveda v enačbi leče  $b$  negativen!

Vrnimo se k sistemu dveh leč. Žarki, ki padajo na drugo lečo, bi se, če te leče ne bi bilo, zbrali v razdalji  $f_1 - s$  od druge leče. Pri tem predpostavljamo, da je razdalja med lečama  $s$  manjša od  $f_1$ . Razdalja  $b$  je torej enaka

$$b = -(f_1 - s).$$

Oddaljenost gorišča sistema od druge leče ( $a$ ) je dana z enačbo

$$1/a = 1/(f_1 - s) + 1/f_2.$$

Goriščno razdaljo  $f$  izračunamo s primerjavo podobnih trikotnikov, katerih hipotenuzi ležita na izbranem žarku po lomu na drugi leči in njegovem podaljšku:

$$d'/a = d/f.$$

Razmerje  $d'/d$  dobimo s primerjavo podobnih trikotnikov, katerih hipotenuzi ležita na izbranem žarku po lomu na prvi leči in njegovem podaljšku:

$$d/f_1 = d'/(f_1 - s).$$

Iz enačb izračunamo goriščno razdaljo:

$$1/f = 1/f_1 + 1/f_2 - s/f_1 f_2$$

V primeru, ko je razdalja med lečama majhna ( $s \ll f_1, f_2$ ), se enačba poenostavi:

$$1/f = 1/f_1 + 1/f_2$$

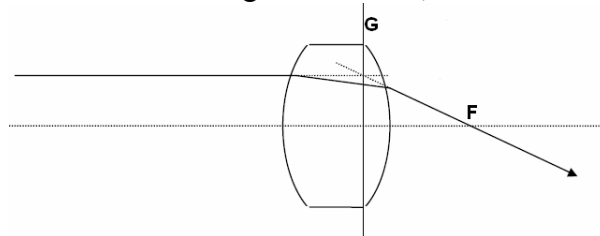
in tudi glavnih ravnin ne ločimo.

Enačbo smo izpeljali za primer dveh zbiralnih leč, velja pa tudi, ko je katerakoli leča razpršilna. Kot zanimivost omenimo kombinacijo zbiralne in razpršilne leče, ki imata vse krivinske polmere enake  $r$ . Ko leči staknemo, dobimo ukrivljeno ploščo, ki ne zbira žarkov. Ker sta goriščni razdalji po velikosti enaki,  $f_1 = -f_2$ , je  $1/f$  zares nič, ko je  $s=0$ . Pri večjem  $s$  deluje sistem kot zbiralna leča z goriščno razdaljo  $f_1^2/s$ .

Na podoben način, kot smo poiskali gorišče dveh leč, lahko obravnavamo tudi preslikavo s sistemom dveh leč v splošnem. Najprej ugotovimo, kje bi nastala slika pri preslikavi s prvo lečo. Če dobimo pravo sliko med lečama ali navidezno sliko na isti strani prve leče, kot je predmet, predstavlja ta slika »realen predmet« za preslikavo z drugo lečo. Oddaljenost tega »predmeta« od druge leče je enaka  $s - b_1$ , pri čemer je  $s$

razdalja med lečama,  $b_1$  pa oddaljenost slike od prve leče. Če nastane slika prve leče za drugo lečo, lahko upoševamo obrnljivost žarkov in si mislimo, da je na tem mestu »navidezna slika«, pri čemer je  $b_2 = -(b_1 - s)$ . Druga leča preslika to »navidezno sliko« v »realen predmet«, ki je na isti strani leče kot »navidezna slika«. Oddaljenost  $a_2$  »realnega predmeta« od druge leče je dana z enačbo leče  $1/f_2 = 1/a_2 + 1/b_2$ . »Realen predmet« v resnici predstavlja pravo sliko predmeta, ki nastane po lomu žarkov na obeh lečah.

(\*)Na kratko omenimo še debele leče. Pri debelih lečah predpostavko o obosnih žarkih še lahko obdržimo, debeline leče pa ne smemo zanemariti. Podobno kot pri dveh lečah tudi pri debeli leči definiramo glavni ravnini,



pri čemer je goriščna razdalja  $f$  od glavne ravnine do gorišča enaka  $f = f_1 f_2 / (f_1 + f_2 - d/n)$ .

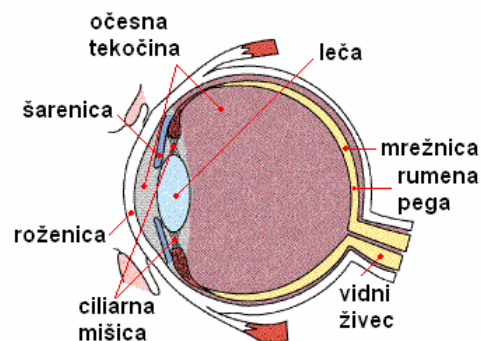
Tu je  $f_1 = (n-1)/r_1$ ,  $f_2 = (n-1)/r_2$ ,  $d$  debelina leče,  $n$  pa lomni količnik leče. Predpostavili smo, da je lomni količnik okolice leče 1. Tudi za debelo lečo lahko uporabimo enačbo leče  $1/a + 1/b = 1/f$ , le da je tu  $a$  razdalja od predmeta do glavne ravnine, ki je bližje predmetu,  $b$  pa razdalja od druge glavne ravnine do slike.

## OPTIČNE NAPRAVE

Optične naprave uporabljamo za opazovanje majhnih predmetov (lupa, mikroskop), oddaljenih predmetov (daljnogled), za zapis slike (fotoaparati, kamera), za projiciranje slik itd. Ker so te naprave povezane s človeškim očesom, si najprej oglejmo nekatere značilnosti človeškega očesa..

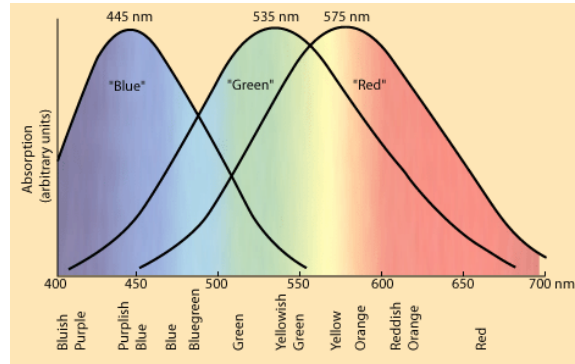
### Oko

Zgradbo očesa podaja naslednja slika.

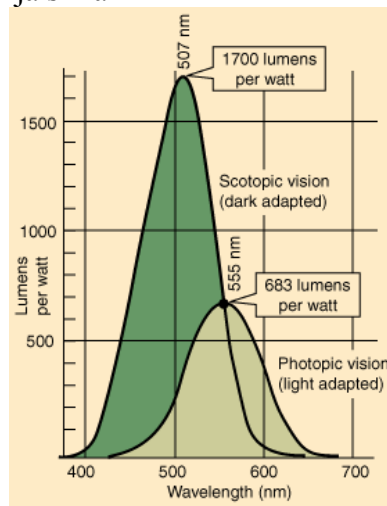


Roženica loči zunanost očesa ( $n=1$ ) od očesne tekočine ( $n \approx 1.33$ ). Ker je zunanja površina približno del izbočene krogelne površine, pride tu do zbiranja žarkov. Od premera zenice je odvisen svetlobni tok skozi oko. Vlaknasta leča ima na obodu mišico. Ko se mišica skrči, se leča odebeli. Pri tem se ji skrajša goriščna razdalja. Za lečo je

steklovina, ki ima lomni količnik praktično enak lomnem količniku vode. Na zadnji steni očesa je mrežnica, na kateri so čutne celice. Slika predmeta, ki ga gledamo, nastane na mrežnici. Na osrednjem delu mrežnice, rumeni pegi, so čutne celice, ki jih imenujemo čepki. Čepki so treh vrst in omogočajo barvno gledanje podnevi pri dovolj velikem svetlobnem toku. Občutljivost čepkov za različne valovne dolžine svetlobe kaže naslednja slika.



Z načinom barvnega gledanja očesa je povezano tudi dejstvo, da (za oko) poljubno barvo lahko sestavimo iz rdeče, zelene in modre svetlobe (RGB). Na ostalem delu mrežnice so čutne celice paličice. Te so bolj občutljive od čepkov, uporabne pa so le za črno-belo gledanje v mraku. Občutljivost paličic in čepkov v odvisnosti od valovne dolžine svetlobe kaže naslednja slika

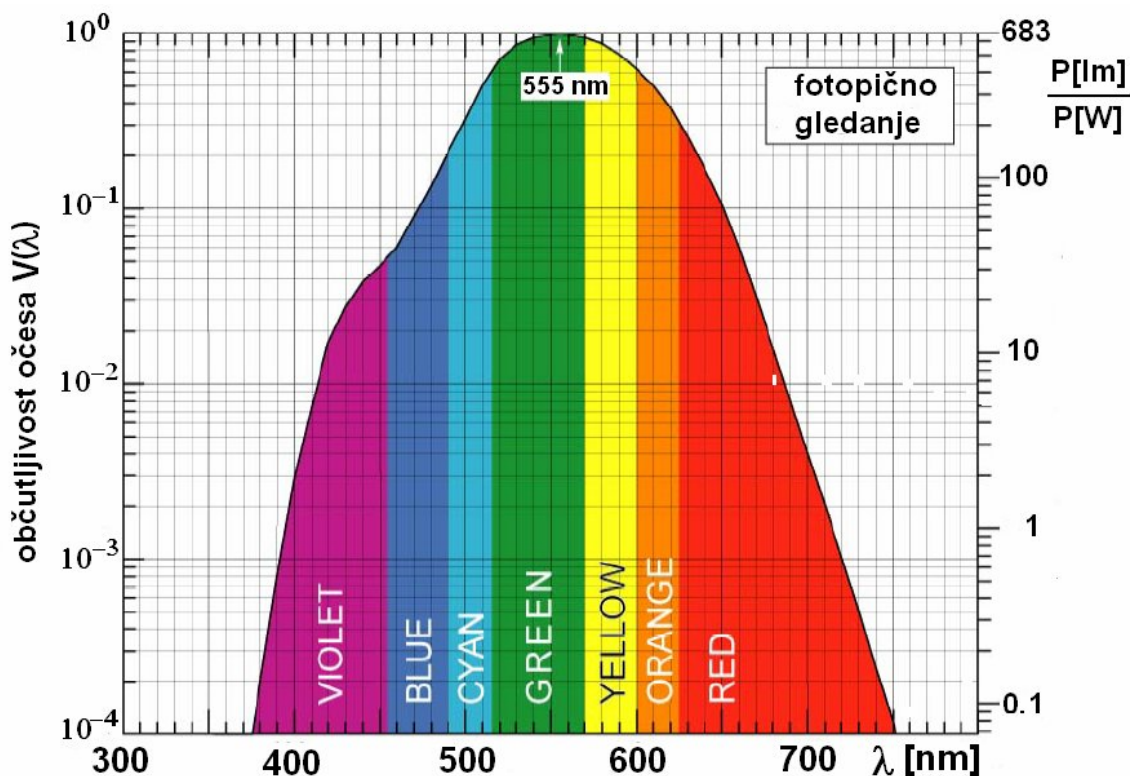


Čepki so najbolj občutljivi pri valovni dolžini 555 nm, paličice pa pri valovni dolžini 507 nm. V splošnem oko zazna vidno svetlobo valovnih dolžin približno od 400 nm do 700 nm. Najmanjša gostota svetlobnega toka, ki jo oko še zazna, je okrog  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ .

Fiziološka enota za svetlobni tok je lumen (lm). Enak svetlobni tok v lumnih povzroči v očesu enak občutek pri vseh valovnih dolžinah vidne svetlobe. Pri valovni dolžini 555 nm ustreza enemu wattu 683 lm. Pri drugih valovnih dolžinah je energijski tok v lumnih enak

$$P[lm] = P[W] \frac{683lm}{W} V(\lambda).$$

Tu je  $V(\lambda)$  občutljivost očesa, ki je za fotopično (dnevno) gledanje pri 555 nm enaka 1. Občutljivost očesa  $V(\lambda)$  in število lumnov na watt pri fotopičnem gledanju kaže naslednja slika.



Z očesom ločimo bliska svetlobe, če je čas med njima vsaj  $1/25$  s. V resnici oko zazna tudi hitrejša spremembe svetlobnega toka, zato je pri televizorjih in računalniških monitorjih frekvenca osveževanja slike 50 Hz ali več.

Z normalnim očesom ostro vidimo predmete od zorne razdalje do velikih razdalj. Zorna razdalja se med ljudmi razlikuje pa tudi s starostjo se spreminja (daljša). Izbrana povprečna vrednost za zorno razdaljo je  $a_0 = 25\text{cm}$ . Ko gledamo predmet v zorni razdalji, je ciliarna mišica na obodu očesne leče najbolj skrčena. Mišica ni skrčena, ko gledamo oddaljene predmete.

Običajni okvari vida sta daljnovidnost in kratkovidnost. Daljnovidno oko vidi ostro od zorne razdalje  $a^*$ , ki je ponavadi precej daljša od  $a_0$ , do velikih oddaljenosti. Okvaro lahko popravimo z zbiralno lečo. Za oceno goriščne razdalje te leče  $f^*$  uporabimo za oko kar enačbo leče  $1/a + 1/b = 1/f$ , pri čemer je  $f$  spremenljiva goriščna razdalja očesne leče in zunanje površine očesa skupaj,  $b$  je fiksna dolžina očesa,  $a$  pa oddaljenost od predmeta do očesa. Naj bo  $f_0$  najkrajša goriščna razdalja spremenljive leče. Tedaj velja  $1/a^* + 1/b = 1/f_0$ .

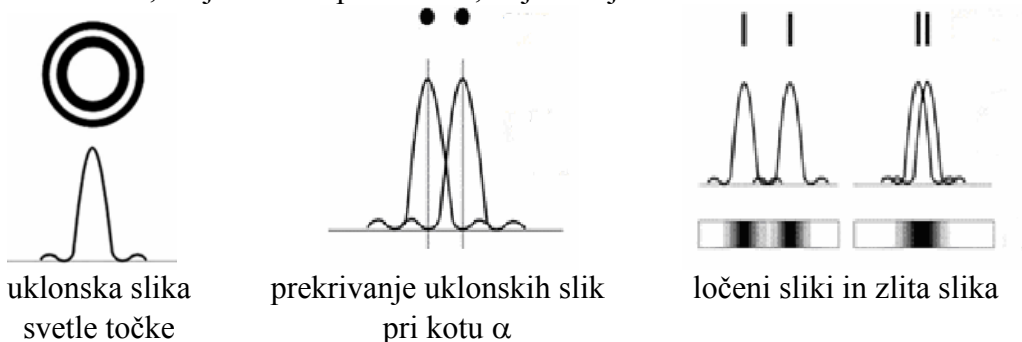
Z zbiralno lečo očal želimo skrajšati zorno razdaljo na vrednost  $a_0$ . Očala in oko obravnavamo kot sistem dveh leč v majhni medsebojni razdalji. Tedaj velja  $1/a_0 + 1/b = 1/f_0 + 1/f^*$ .

Ko enačbi odštejemo, dobimo  $1/f^* = 1/a_0 - 1/a^*$ .

Obratno vrednost goriščne razdalje v metrih imenujemo lomnost leče. Enota zanjo je dioptrija.

Kratkovidno oko vidi ostro od zorne razdalje, ki je ponavadi kratka, do neke razdalje  $d$ . Z uporabo očal želimo ostro videti oddaljene predmete. Goriščna razdalje leče v očalih naj bo  $f^*$ . S podobnim računom kot prej ugotovimo, da potrebujemo lečo z goriščno razdaljo  $f^* = -d$ .

Ločljivost očesa je približno kotna minuta. Če vidimo dve točki pod tem ali večjim kotom, ju bomo z očesom ločili. Razloga za omejeno ločljivost očesa je več: število in velikost čutnih celic, uklon na zenici in neidealnost leče. Oglejmo si podrobneje uklon na zenici. Od oddaljene svetle točke oko zadenejo ravni valovi. Na zenici pride do uklona, zaradi katerega se točka preslika v zaporedje svetlih in temnih krogov na mrežnici. Kot smo že omenili, opazimo prvi temni kolobar pod kotom  $\alpha = 1.22 \lambda/d$ , pri čemer je  $d$  premer zenice. Po Rayleighovem kriteriju slik dveh svetlih točk na mrežnici oko ne loči, ko ju vidimo pod kotom, ki je manjši od  $\alpha$ .



Ocenimo kot  $\alpha$  pri očesu. Za  $\lambda$  vzemimo  $0.5 \mu\text{m}$ , za  $d$  pa  $5 \text{ mm}$ . Pri tem je  $\alpha$  približno  $10^{-4} \text{ rd} \approx 0.3'$ , kar je primerljivo z izmerjeno ločljivostjo očesa. Tudi kot, ki ustreza povprečni razdalji med čutnimi celicami je tega reda velikosti.

## Lupa

Lupo uporabljamo za opazovanje majhnih predmetov. Velikost predmeta, kot ga vidi oko, je odvisna od velikosti slike predmeta na mrežnici. Velikost slike na mrežnici pa je odvisna od kota  $\theta$ , pod katerim vidimo telo. Ta kot imenujemo zorni kot. V resnici je velikost slike na mrežnici enaka  $s \tan \theta$ , pri čemer je  $s$  dolžina očesa. Za majhne predmete, ki jih vidimo pod majhnim zornim kotom, je velikost slike na mrežnici kar  $s\theta$ .

Zorni kot je tem večji, čim bliže je predmet očesu. Zato ponavadi majhne predmete gledamo v zorni razdalji od očesa. V tem primeru je kot  $\theta_0$ , pod katerim vidimo majhen predmet velikosti  $X$  enak

$$\theta_0 = X/a_0.$$

Predmet sicer lahko postavimo bliže, a v tem primeru bi ostra slika nastala za mrežnico, slika na mrežnici pa ni ostra. Pod večjim zornim kotom vidimo majhen predmet, če uporabimo zbiralno lečo z majhno goriščno razdaljo. Tej leči pravimo lupa.

Če damo predmet med gorišče in teme lupe, nastane navidezna slika predmeta na isti strani lupe, kot je predmet. Bliže ko je predmet gorišču, bolj je slika oddaljena od lupe, a je hkrati tudi večja. Oko na drugi strani lupe vidi ostro sliko predmeta, ko je oddaljenost navidezne slike od lupe enaka zorni razdalji očesa ali večja. Kot  $\theta$  pod katerim vidimo predmet skozi lupo je enak



$$\theta = X/a,$$

Pri čemer je  $a$  oddaljenost predmeta od lupe. Ko je slika predmeta zelo oddaljena od lupe je  $a \approx f$ . Tedaj je povečava lupe  $\theta/\theta_0$  enaka

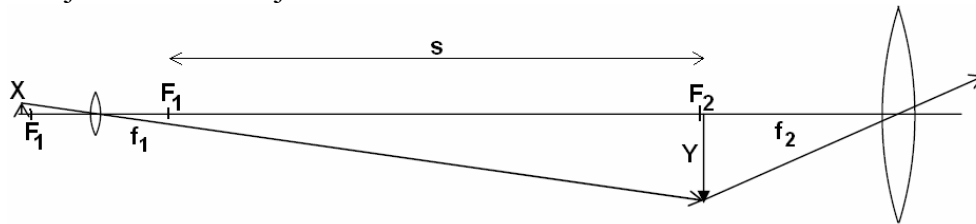
$$\theta/\theta_0 = a_0/f.$$

Manjša ko je goriščna razdalja lupe  $f$ , večja je povečava.

Lupe, ki jih držimo v roki imajo povečavo 2, 5, največ 10. Za večje povečave (n. pr. 30) uporabljajo lupe na stojalu.

### Mikroskop

Večje povečave kot z lupo dosežemo z mikroskopom. Preprost mikroskop sestoji iz dveh leč: objektiv in okularja.



Predmet velikosti  $X$  postavimo pred gorišče objektiv. Prava in obrnjena slika predmeta ima velikost  $Y$ . Ta nastane med goriščem in temenom okularja, v neposredni bližini gorišča. Okular igra vlogo lupe, ki naredi navidezno in povečano sliko predmeta v veliki oddaljenosti od okularja.

Pri mikroskopu premikamo objektiv in okular skupaj, dokler ne dobimo prave slike predmeta tik za goriščem okularja. Tedaj vidimo majhem predmet pod kotom  $\theta = Y/f_2$ .

S prostim očesom bi videli predmet pod kotom

$$\theta_0 = X/a_0.$$

Povečava mikroskopa  $\theta/\theta_0$  je enaka

$$\theta/\theta_0 = (Y/X)(a_0/f).$$

Enaka je torej produktu povečave objektiv  $Y/X$  in povečave okularja  $a_0/f$ . Povečavo objektiv lahko izrazimo tudi s pomočjo razdalje  $s$  med notranjima goriščema. Enaka je  $Y/X = s/f_1$ .

V pravih mikroskopih niti objektiv niti okular ni ena sama leča. Sestavlja ju sistem več leč, ki v splošnem niso tanke. Pri preslikavi z lečami namreč nastajajo napake, med katerimi zlahka razumemo barvno napako ( $f = f(\lambda)$ ) in napako pasov. Kombinacija več leč te napake deloma odpravi. Kako odpravimo napako pasov kaže naslednja slika.



Med optičnimi mikroskopi omenimo še polarizacijski mikroskop, ki ga uporabljamo pri opazovanju dvolomnih snovi in fazno kontrastni mikroskop, ki ga uporabljamo za opazovanje prozornih objektov.

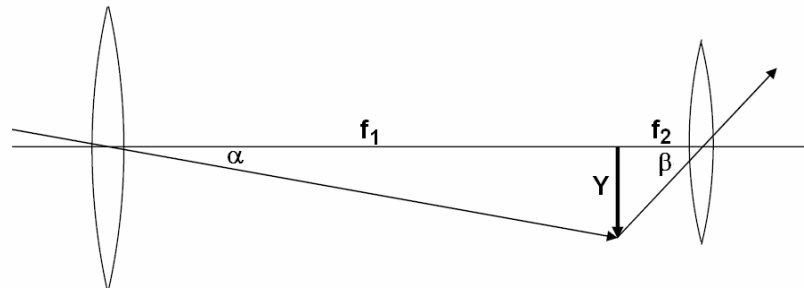
Ločljivost optičnega mikroskopa je povezana z velikostjo opazovanih objektov, kvaliteto optičnega sistema in uklonom na vstopni zenici. V splošnem detajlov, ki so reda velikosti valovne dolžine svetlobe zaradi uklona ne razločimo. Deloma si pomagamo z

uporabo primerne svetila in s tem, da kanemo med preparat in objektiv kapljico kapljevine z velikim lomnim količnikom, ki skrajša valovno dolžino svetlobe.

Manjše objekte in detajle na objektih opazujemo z elektronskim mikroskopom. Še bolj podrobno lahko površine opazujemo s tunnelskim mikroskopom in mikroskopom na atomsko silo, s katerima so dosegli boljše ločljivost od 0.1 nm.

### Daljnogled

Z daljnogledom opazujemo oddaljene predmete pod večjim zornim kotom, kot jih vidimo s prostim očesom. Preprost daljnogled sestavljata dve zbiralni leči: objektiv in okular.

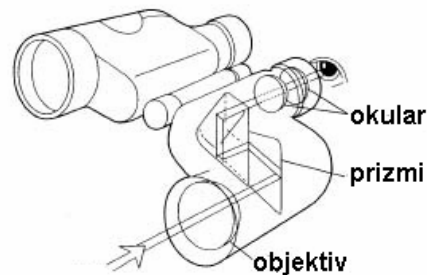
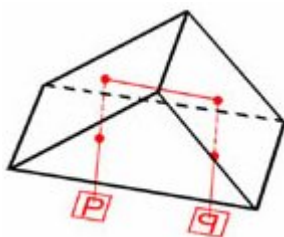


Ko z njim opazujemo oddaljen predmet, nastane slika predmeta, ki jo naredi objektiv, v goriščni ravnini objektiv. Okular ima vlogo lupe. Notranji gorišči objektiv in okularja skoraj sovpadata. Predmet vidimo skozi daljnogled pod zornim kotom  $\beta$ , s prostim očesom pa pod zornim kotom  $\alpha$ . Ko je slika majhna ( $Y \ll f_1, f_2$ ) je povečava daljnogleda kar  $\beta/\alpha$ :

$$\beta/\alpha = (Y/f_2)/(Y/f_1) = f_1/f_2.$$

Tudi v daljnogledih sestavlja objektiv in okular več leč. V astronomskem daljnogledu je namesto leč objektiv pogosto konkavno zrcalo.

Slika, ki jo vidimo z daljnogledom opisane sestave je obrnjena. Pokončno sliko dobimo s kombinacijo dveh prizm s koti  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  in  $45^\circ$ .



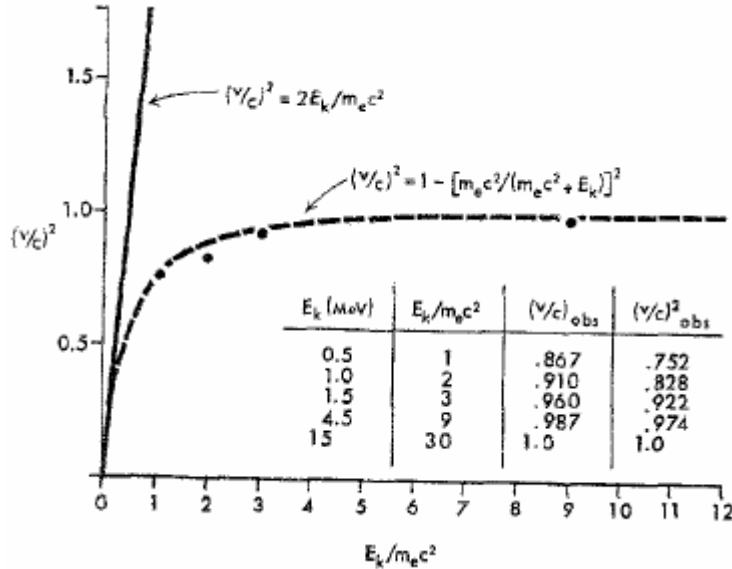
Po dvakratnem totalnem odboju prizma zasuka sliko. V daljnogledu ena prizma zasuka sliko v smeri levo-desno, druga pa v smeri gori-doli.

## POSEBNA TEORIJA RELATIVNOSTI

### Nekaj značilnih meritev katerih rezultate klasična fizika ne pojasni

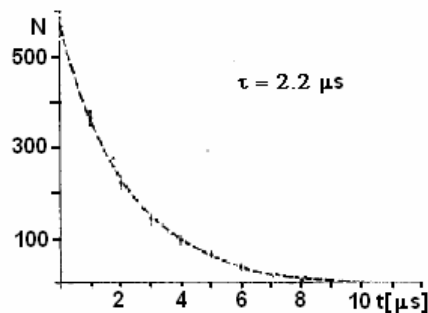
Zakoni klasične fizike dobro veljajo v »običajnem« svetlu. Za opis atomov niso več dobri. Tam jih nadomestijo zakoni kvantne fizike. Odstopanja od zakonov klasične

fizike opazimo tudi pri telesih, katerih hitrost ni majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Omenili smo že, da je treba pri kroženju delcev v pospeševalnikih upoštevati spreminjanje frekvence kroženja s hitrostjo. Zanimiv poskus je naredil Bertozzi (W. Bertozzi, Am. J. Phys. 32, 551 (1964)), ki je meril hitrost elektronov v odvisnosti od energije. Rezultate meritve kaže naslednja slika.



Strma premica ustreza klasičnim predvidevanjem, eksperimentalne točke pa ležijo na krivulji, ki kaže, da se hitrost elektronov pri naraščajoči energiji približuje hitrosti svetlobe v vakuumu, ki jo bomo tukaj označili s  $c$ .

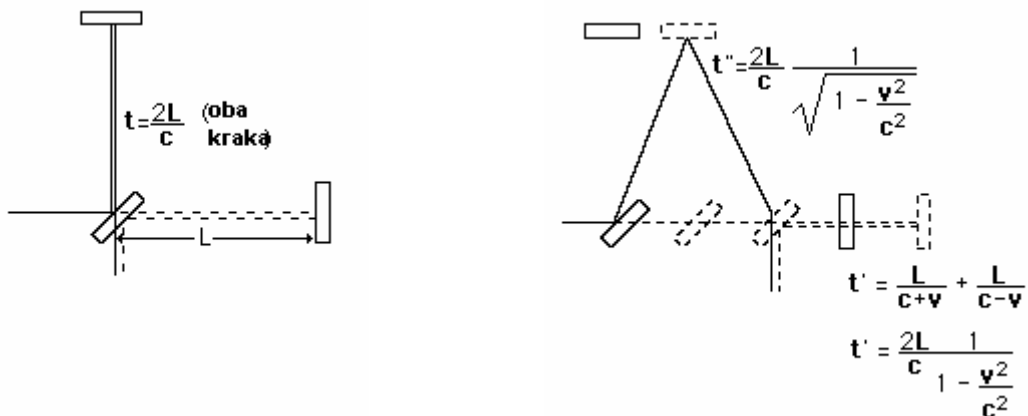
Pri hitrih delcih opazijo tudi podaljšanje časa. Omenimo eksperiment Frischa in Smitha (D. H. Frisch, J. H. Smith, Am. J. Phys. 31, 342 (1964)), ki sta opazovala razpadanje mionov, ki nastanejo visoko v zemeljski atmosferi in letijo z veliko hitrostjo proti zemlji. Razpadanje mionov je naključen proces. Če imamo v nekem trenutku  $N$  mionov, bo sprememba njihovega števila v času  $dt$  enaka  $dN = -Ndt/\tau$ . Pri tem je  $\tau$  značilni čas za razpad mionov, ki mu pravimo tudi življenjska doba miona. Rešitev enačbe je  $N = N_0 e^{-t/\tau}$ . Naslednja slika kaže število mirujočih mionov  $m$  v odvisnosti od časa.



Življenjska doba mirujočih mionov je  $2.2 \mu s$ . Mioni, katerih hitrost je blizu svetlobne hitrost, napravijo v tem času pot 660 m. Frisch in Smith sta izmerila število mionov s hitrostjo  $0.995c$ , ki jih ista naprava izmeri v enakem času na dveh višinah: na vrhu gore in ob morju. Višinska razlika merilnih mest je bila 1900 m. Pokazalo se je, da sta ob morju izmerila dosti več mionov, kot sta pričakovala na osnovi življenjske dobe. Število

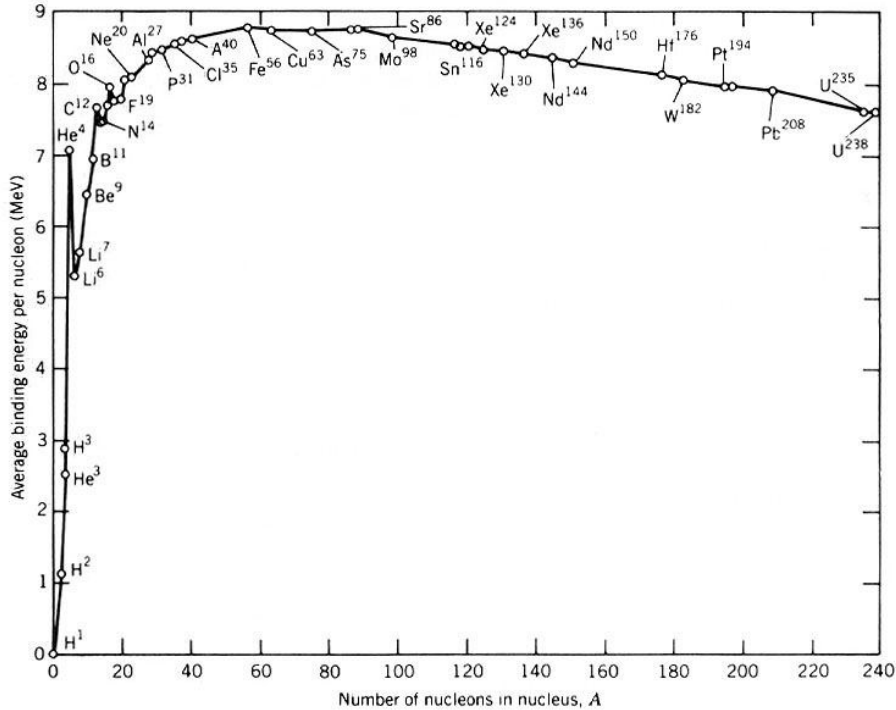
mionov je bilo tako, kot da bi bila življenjska doba približno devetkrat daljša. Ta poskus in še mnogi drugi so pokazali, da se gibajočim delcem življenjska doba za mirujočega opazovalca podaljša in, da je podaljšanje odvisno od njihove hitrosti.

Michelson in Moreley sta pokazala, da za svetlobo ni odlikovanega sistema oziroma snovi (etra), po katerem bi se širila s hitrostjo  $c$ , pri gibanju glede na ta sistem pa bi zaznali drugačno hitrost. Merila sta z Michelsonovim interferometrom. Leva slika kaže situacijo, ko interferometer glede na odlikovani sistem miruje. Tedaj oba žarka potujeta enak čas  $t = 2L/c$  od polprepustne plošče do zrcala in nazaj.



Na desni je narisana primer, ko se interferometer giblje po »odlikovanem« sistem v smeri proti desni. Tedaj čas  $t''$ , ki ga za pot potrebuje žarek, ki se odbije od gornjega zrcala, ni enak času  $t'$ , ki ga potrebuje žarek, ki se odbije od desnega zrcala. Situacija je enaka, kot da bi eno od zrcal premaknili za  $c(t'-t'')$ . Pri tem se premaknejo interferenčni krogi, ki jih vidi opazovalec. Gibanje z dovolj veliko hitrostjo, da bi opazili premik interferenčnih krogov je kroženje zemlje okrog sonca. Hitrost tega gibanja je približno 30 km/s. Pri kroženju se spreminja tudi smer gibanja. Michelson in Moreley sta predpostavila, da se »eter« ne giblje skupaj z zemljo. Njun poskus in tudi bolj izpopolnjeni novejši poskusi so pokazali, da premika interferenčnih krogov ni in da je kljub gibanju zemlje hitrost svetlobe za opazovalca na zemlji v vseh smereh enaka.

Atomska jedra so sestavljena iz protonov in nevtronov. Masa protona je 1.007276 u, masa nevtrona 1.008665u, masa elektrona pa 0.000549 u. Tu je u poenotena atomska masna enota, ki je enaka dvanajstini mase prostega atoma  $^{12}\text{C}$  v mirovanju. Približno velja  $1 \text{ u} = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Masa devterijevega jedra, ki ga sestavljata proton in nevtron, je enaka 2.013553 u, kar je manj od mase protona in nevtrona  $m_p + m_n = 2.015941 \text{ u}$ . V splošnem je masa kateregakoli jedra manjša od vsote mas protonov in nevtronov, ki ga sestavljajo. Razlika v masi deljena s številom nukleonov (protonov in nevtronov) in pomnožena s  $c^2$  je v enotah MeV predstavljena na naslednji sliki.



Pri nekaterih težjih jedrih desno od vrha lahko pride do cepitve. Če jedro  $^{235}\text{U}$  ujame počasen nevtron postane nestabilno in razpade. Pri tem je masa produktov cepitve manjša od mase začetnega jedra. Razlika teh dveh mas pomnožena s  $c^2$  je ravno enaka kinetični energiji produktov cepitve in energiji sevanja gama. Pri lahkih jedrih lahko pride do zlivanja. Pri tem se sprosti energija, ki je enaka razliki mas pomnoženi s kvadratom svetlobne hitrosti.

### Posebna teorija relativnosti

Navedenih opažanj in rezultatov teh in mnogih drugih poskusov klasična fizika ne pojasni. Za njihovo razumevanje je potrebna posebna teorija relativnosti.

Posebna teorija relativnosti temelji na dveh Einsteinovih postulatih:

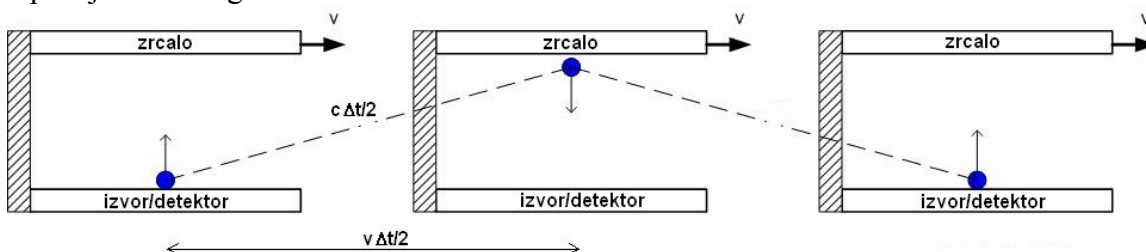
- Zakoni fizike so enaki v vseh inercialnih sistemih.
- Hitrost svetlobe v vakuumu je enaka v vseh inercialnih sistemih.

Zakoni fizike, na primer zakoni mehanike, zakoni elektrodinamike, ohranitveni zakoni itd. so enaki v vseh inercialnih sistemih. V poljubnem inercialnem sistemu opazovalec v katerikoli smeri izmeri enako hitrost svetlobe v vakuumu. Ta hitrost je enaka v vseh inercialnih sistemih.

Posledici Einsteinovih postulatov sta relativnost časa in dolžine. Vzemimo dva inercialna sistema  $S$  in  $S'$ . Sistem  $S'$  naj se giblje glede na sistem  $S$  s hitrostjo  $v$ . V sistemu  $S'$  naj kratek sunek svetlobe potuje od izvora do zrcala in nazaj do detektorja. Za to pot potrebuje čas  $\Delta t_0 = 2d/c$ .



Opazujemo isti dogodek iz sistema S.



Za opazovalca v sistemu S prepotuje sunek svetlobe od izvora do zrcala pot  $c\Delta t/2$ . Pri tem se sistem S' premakne za  $v\Delta t/2$ . Tu je  $\Delta t$  čas trajanja dogodka, ki ga izmeri opazovalec v sistemu S. Predpostavimo, da je razdalja  $d$  za opazovalca v obeh sistemih enaka. Pri tem dobimo

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma \Delta t_0.$$

Za opazovalca v sistemu S traja dogodek dlje, kot za opazovalca v sistemu S', ki izmeri lastni čas  $\Delta t_0$ . Razlika je velika, ko je hitrost  $v$  blizu svetlobne hitrosti  $c$ . To tudi pojasni podaljšanje življenjske dobe hitrih mionov za mirujočega opazovalca.

Mislimo si, da naredimo podoben poskus, le da se sistem S' giblje glede na sistem S s hitrostjo  $v$  v smeri od izvora proti zrcalu (na sliki navpično navzgor). Zanima nas, kakšno razdaljo  $\Delta l$  med izvorom in zrcalom izmeri opazovalec v sistemu S. Opazovalec v sistemu S' seveda izmeri razdaljo  $\Delta l_0 = d$ . Ugotovili smo že, da traja dogodek (let svetlobnega sunka od izvora do zrcala in nazaj do detektorja) za opazovalca v sistemu S' čas  $\Delta t_0 = 2d/c$ , za opazovalca v sistemu S pa  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ . Za opazovalca v sistemu S potuje svetlobni sunek od izvora do zrcala čas  $t_1$ :

$$ct_1 = \Delta l + vt_1.$$

Nazaj potuje sunek čas  $t_2$ :

$$ct_2 = \Delta l - vt_2.$$

Čas  $\Delta t$  je enak

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = t_1 + t_2 = \frac{2c\Delta l}{c^2 - v^2}.$$

Iz te enačbe izračunamo  $\Delta l$  in dobimo

$$\Delta l = \Delta l_0 / \gamma.$$

Opazovalec v sistemu S vidi torej v smeri gibanja sistema S' krajšo razdaljo, kot jo izmeri opazovalec v sistemu S'.

## Lorentzove transformacije

V klasični fiziki koordinate dogodka v dveh inercialnih sistemih povezujejo Galilejeve transformacije. Vzemimo inercialni sistem S, v katerega postavimo pravoktni koordinatni sistem  $x, y, z$  in inercialni sistem S', v katerega postavimo pravoktni koordinatni sistem  $x', y', z'$ . Ob času nič naj koordinatna sistema sovpadata. Sistem S' naj se za opazovalca v sistemu S giblje vzdolž osi  $x$  s hitrostjo  $v$ . V klasični fiziki je čas absoluten in enak v obeh sistemih:  $t = t'$ . Če ob času  $t$  opazovalec v sistemu S opazi dogodek na mestu  $s$  s koordinatami  $x, y$  in  $z$ , bo opazovalec v sistemu S' opazil ob istem času isti dogodek na mestu  $s$  s koordinatami

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z.$$

Te transformacije koordinat imenujemo Galilejeve transformacije

Če uporabimo Galilejeve transformacije, Maxwellove enačbe spremene obliko, ko se preselimo v drug inercialni sistem. H. A. Lorentz je poiskal transformacije med inercialnimi sistemi, ki ne spremenijo oblike Maxwellovih enačb. Transformacije se po njem imenujejo Lorentzove transformacije. A. Einstein je ugotovil, da imajo Lorentzove transformacije globlji pomen. Do Lorentzovih transformacij se da namreč priti tudi na osnovi Einsteinovih postulatov ob upoštevanju simetrije in homogenosti prostora in časa. To so transformacije, ki povezujejo dva inercialna sistema v posebni teoriji relativnosti podobno, kot povezujejo dva inercialna sistema v klasični fiziki Galilejeve transformacije. Zapišimo Lorentzove transformacije za prehod iz sistema S v sistem S' in za obraten prehod.

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) & x &= \gamma(x' + vt') \\y' &= y & y &= y' \\z' &= z & z &= z' \\t' &= \gamma(t - vx/c^2) & t &= \gamma(t' + vx'/c^2)\end{aligned}$$

V teh enačbah čas ni več absoluten. Ko je  $v \ll c$  je  $\gamma \approx 1$  in Lorentzove transformacije preidejo v Galilejeve transformacije.

Vzemimo dogodek, ki se v sistemu S' prične ob času  $t'$  pri koordinati  $x'$  in konča ob času  $t' + \Delta t'$  pri koordinati  $x' + \Delta x'$ . Vprašajmo se, koliko časa traja ta dogodek za opazovalca v sistemu S. Zadnja enačba v desnem stolpcu pove, da je

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + (v/c^2)\Delta x').$$

V primeru, ko se dogodek zgodi v sistemu S' na istem mestu je  $\Delta x' = 0$  in  $\Delta t = \gamma\Delta t'$ . Tak primer je razpad miona, če je sistem S sistem mirujočega opazovalca, sistem S' pa sistem, v katerem mion miruje.

Oglejmo si še skrajšanje dolžin. Vzemimo predmet, ki ima v sistemu S' v smeri osi  $x'$  dolžino  $l_0$ . Opazovalca v sistemu S zanima dolžina tega predmeta vzdolž osi  $x$  v nekem trenutku (torej  $\Delta t = 0$ ). Če je  $\Delta t = 0$ , sledi iz zadnje enačbe v desnem stolpcu  $\Delta t' = -(v/c^2)\Delta x' = -(v/c^2)l_0$ . Dolžino predmeta  $l = \Delta x$  dobimo iz prve enačbe v desnem stolpcu:

$$l = \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma(l_0 - (v^2/c^2)l_0) = l_0/\gamma.$$

Z Lorentzovimi enačbami izračunajmo, kako se pri prehodu med sistemoma S in S' transformirajo hitrosti. Z drugimi besedami nas zanima, kolikšno hitrost nekega objekta izmeri opazovalec v sistemu S', če opazovalec v sistemu S izmeri, da ima ta

objekt hitrost  $\vec{u}$ . Da ne bo zmede pri pisanju bomo za hitrost objekta uporabili črko  $u$ . S črko  $v$  bomo še naprej označevali hitrost sistema  $S'$  glede na sistem  $S$ .

Hitrost  $v$  v sistemu  $S$  definiramo kot  $\vec{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt) = (u_x, u_y, u_z)$ . V sistemu  $S'$  je hitrost  $\vec{u}' = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt') = (u_x', u_y', u_z')$ . Lorentzove transformacije diferenciramo in delimo diferenciale. Pri tem dobimo

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} & u_y' &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)} & u_z' &= \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)} \\ u_x &= \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v / c^2} & u_y &= \frac{u_y'}{\gamma(1 + u_x' v / c^2)} & u_z &= \frac{u_z'}{\gamma(1 + u_x' v / c^2)}. \end{aligned}$$

Oglejmo si preprost primer. Vzemimo, da delec, ki ima za mirujočega opazovalca hitrost  $0.8c$  razpade na dva delca. Eden izmed teh delcev naj odleti v smeri gibanja prvotnega delca s hitrostjo  $0.9c$  glede na prvotni delec. Izračunajmo hitrost tega delca, ki jo izmeri mirujoči opazovalec.

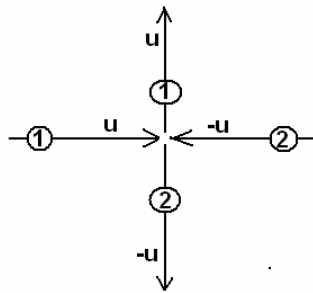
V smeri gibanja prvotnega in novonastalega delca izberimo osi  $x$  in  $x'$ . Sistem  $S$  naj bo sistem mirujočega opazovalca, sistem  $S'$  pa sistem, glede na katerega je prvotni delec miroval. Hitrost  $v$  je enaka  $0.8c$ , hitrost  $u_x'$  pa  $0.9c$ . Komponenti hitrosti  $u_y$  in  $u_z$  sta seveda nič, hitrost  $v$  v smeri osi  $x$  pa je enaka

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v / c^2} = 0.988c.$$

Hitrost novonastalega delca je seveda manjša od  $c$  in ni enaka  $1.7c$ , kot bi izračunali v klasični kinematiki.

### Gibalna količina

V klasični mehaniki je gibalna količina točkastega telesa enaka  $\vec{G} = m\vec{v}$ . Ugotovili smo tudi, da se gibalna količina sistema točkastih teles ohranja, če ni zunanjih sil. Zakon o ohranitvi gibalne količine mora veljati vseh inercialnih sistemih. Da bi ugotovili, kolikšna je gibalna količina točkastega telesa v posebni teoriji relativnosti, analizirajmo preprost poskus.



V sistemu  $S'$  se dve enaki telesi z maso  $m$  gibljeta drugo proti drugemu s hitrostjo  $u$  vzdolž osi  $x$ . Po prožnem trku prvo telo odleti s hitrostjo  $u$  v smeri osi  $y$ , drugo telo pa z enako veliko hitrostjo  $v$  nasprotni smeri. Gibalna količina se seveda ohrani. Začetna je nič in končna prav tako.

Oglejmo si trk iz sistema  $S$ , glede na katerega se sistem  $S'$  giblje v smeri osi  $x$  s hitrostjo  $u$  ( $v=u$ ). Posebej nas zanima ohranitev gibalne količine v smeri osi  $x$ . V sistemu  $S$  je hitrost prvega telesa v smeri osi  $x$  pred trkom enaka  $u_{1x} = 2u/(1+u^2/c^2)$ . Hitrost drugega telesa v smeri osi  $x$  je nič:  $u_{2x} = 0$ . Po trku je hitrost obeh teles v smeri osi  $x$



enaka  $u$ , v smeri osi  $y$  pa  $\pm u/\gamma$ . Če definiramo gibalno količino kot produkt mase in hitrosti, se njena projekcija na os  $x$  v sistemu  $S$  ne ohranja. To pa ni v skladu z Einsteinovim postulatoma. Izkazuje se, da se gibalna količina ohranja, če jo definiramo kot

$$G = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

S to definicijo je v našem primeru projekcija gibalne količine na os  $x$  pred in po trku enaka  $2mu/(1-u^2/c^2)$ . Pri majhnih hitrostih ( $v \ll c$ ) je seveda gibalna količina enaka  $mv$ .

V resnici tudi drugi Newtonov zakon velja v posebni teoriji relativnosti, če ga prepišemo v obliki

$$\vec{F} = d\vec{G}/dt,$$

pri čemer je  $\vec{G}$  relativistična gibalna količina.

### Kinetična energija

Imejmo telo z maso  $m$ , ki v začetku miruje in se začne gibati pod vplivom sile  $F$ . Zanima nas, kako je hitrost telesa odvisna od dela sile. Velja

$$dA = Fds = (dG/dt)ds = dG(ds/dt) = vdG = d(vG) - Gdv.$$

Z integracijo enačbe dobimo

$$A = vG - \int_0^v Gdv = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2.$$

Člen na desni je kinetična energija telesa. Ko je  $v \ll c$ , je prvi člen v razvoju izraza na desni v vrsto po potencah  $(v/c)^2$  enak kinetični energiji telesa v klasični fiziki  $mv^2/2$ .

V posebni teoriji relativnosti definiramo polno energijo telesa  $W$  z izrazom

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Velja tudi zveza

$$W = \sqrt{c^2 G^2 + m^2 c^4}.$$

V primeru, ko je  $v=0$  je polna energija telesa enaka  $W=mc^2$ . To energijo imenujemo mirovna energija telesa. Razlika med polno energijo telesa in njegovo mirovno energijo je enaka kinetični energiji.

Mirovna energija protona je 938 MeV, nevtrona 940 MeV, elektrona pa 0.51 MeV. Pri delcih z veliko gibalno količino v primerjavi z  $mc$  lahko v drugem izrazu za polno energijo kvadrat mirovne energije zanemarimo in dobimo zvezo  $W = Gc$ . Ta zveza velja tudi za kvante elektromagnetnega valovanja: fotone.

V posebni teoriji relativnosti zapišemo zakon o ohranitvi energije na naslednji način.

V zaključenem sistemu delcev se vsota polnih energij delcev ohranja.

Zveza med maso in mirovno energijo tudi pojasni, zakaj je masa devterijevega jedra manjša od vsote mas protona in nevtrona. Proton in nevtron sta v jedru vezana, zato je njuna vezavna energija  $W_{vez}$  negativna. Da bi ju spravili narazen je potrebno dovesti delo, ki je po velikosti enako vezavni energiji. Zmanjšanje mase je enako  $|W_{vez}|/c^2$ . Da je to res potrjuje tudi cepitev in zlivanje jeder. Nekatera težja jedra lahko razpadejo v lažja jedra, v katerih je razlika v masi na nukleon večja. Po drugi strani se nekatera lažja jedra

pri zelo visoki temperaturi zlivajo v težja jedra, ki imajo večjo razliko v masi na nukleon kot lažja jedra.

Izračunajmo naslednji zgled. Nevtralni kaon z mirovno energijo  $m_k c^2 = 498 \text{ MeV}$  in kinetično energijo  $500 \text{ MeV}$  razpade v dva piona z mirovno energijo  $140 \text{ MeV}$ . V sistemu  $S'$ , v katerem kaon miruje, odletita piona v pravokotni smeri glede na smer gibanja kaona. Izračunajmo, kolikšna je hitrost pionov za mirujočega opazovalca in kolikšen je kot  $\phi$  med smerjo gibanja kaona in smerjo, v kateri odleti pion .

Izberimo os  $x$  mirujočega opazovalnega sistema  $S$  v smeri gibanja kaona. V sistemu  $S'$  naj po razpadu kaona piona odletita v smereh  $y'$  in  $-y'$  z enakima hitrostma.

Najprej izračunajmo, kolikšna je hitrost kaona za mirujočega opazovalca. Najlažje jo izračunamo iz polne energije:

$$\frac{m_k c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_k c^2 + W_k = 998 \text{ MeV}.$$

Kot rezultat dobimo  $v = 0.867c$  in  $\gamma = 2.004$ .

Opazujmo razpad kaona v sistemu  $S'$ . Ker se polna energija ohranja velja

$$m_k c^2 = 2\sqrt{G_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}.$$

Pred razpadom kaona je bila polna energija v sistemu  $S'$  kar mirovna energija kaona. Po razpadu kaona je to vsota polnih energij obeh pionov, ki sta seveda enaki. En pion namreč odleti s hitrostjo  $u_y'$  vzdolž osi  $y'$ , drugi pa z enako veliko hitrostjo v nasprotni smeri, da se gibalna količina ohrani. Ker je

$$G_\pi = \frac{m_\pi u_y'}{\sqrt{1 - (u_y'/c)^2}},$$

dobimo  $u_y' = 0.827c$ .

Transformirajmo hitrosti v sistem mirujoči  $S$ :

$$u_x = v = 0.867c$$

$$u_y = u_y'/\gamma = 0.413c$$

$$u_z = 0.$$

Hitrost pionov za mirujočega opazovalca je enaka

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 0.960c,$$

kot  $\phi$  pa je enak

$$\phi = \arctg(u_y/u_x) = 25.5^\circ.$$

Preverimo, da se tudi v sistemu  $S$  polna energija ohranja. Pred razpadom kaona je bila enaka  $998 \text{ MeV}$ . Po razpadu je polna energija enega pionov enaka

$$W_\pi = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 499 \text{ MeV}.$$

Polna energija obeh pionov  $2W_\pi = 998 \text{ MeV}$  je res enaka polni energiji kaona.