DINAMIKA TEKOČIN

(FLUID DYNAMICS)

Dinamika tekočin

UVOD

- *Razumevanje DINAMIKE TEKOČIN predstavlja enega največjih napredkov **fizike, matematike in inženirskih znanosti** v zadnjih sto letih.*
- *Začetne razlage delovanja letalskih kril se danes nadaljujejo z matematičnimi opisi turbulentnega toka, notranjih in površinskih valov, pojavov kaosa,...*
- *Tehnologija kot tudi inženirstvo izredno močno zavisita od pravilnega razumevanja tekočin: od toka tekočin po ceveh, do iztoka odpadne vode v morje; od gibanja atmosfere, do toka maziv v motorju.*

Dinamika tekočin

UVOD

- *Fluidna dinamika predstavlja ključ do razumevanja nekaterih najpomembnejših pojavov našega planeta in vesolja:*
- ***oceanski tokovi in vremenski sistemi,***
- ***konvektivno gibanje staljenih kamenin v notranjosti Zemlje in gibanje zunanjih plasti Sonca,***
- ***eksplozije supernove,***
- ***vrtinčenje plinov v galaksijah in***
- ***modeliranje nastanka vesolja (v kombinaciji z Einsteinovo relativistično teorijo gravitacije).***

Kronološki pregled razvoja mehanike kontinuuma

1676	Robert Hooke	Elastično obnašanje
1687	Issac Newton	Zakon viskoznosti
1745	Leonhard Euler	Matematični vidiki gibanja neviskoznih tekočin
1820 do 1830	Claude-Louis Navier Augustine Louis Cauchy Siméon Denis Poisson	Napetosti in deformacije Postavitev teorije linearne elastičnosti
1845	George Stokes	Navier-Stokesove enačbe
1848 do 1850	William Thomson, 1st Lord Kelvin Rudolf J.E. Clausius	Termodinamika
1929	E.C. Bingham	Definicija reologije

OPIS TEKOČIN IN TOKA TEKOČIN

1. Uvod
2. Sile – gibanje in ravnotežje
   - 2.1. Fizikalne dimenzije
   - 2.2. Newtonove enačbe gibanja
     - Gibanje v 1D in 3D
     - Matematična orodja - VEKTOR
   - 2.3. Viskoznost
3. Opis tekočine
   - 3.1. Snovne lastnosti (sestava, viskoznost, enačba stanja – *elastične lastnosti, stisljivost,…*)
   - 3.2. Spremenljivke toka tekočin (ρ, $\underline{v}$, p, T)
4. Opis toka tekočin
   - 4.1. Statičen/Dinamičen
   - 4.2. Stacionaren/Nestacionaren

2. Sile – gibanje in ravnotežje

2.1 MKS-sistem fizikalnih dimenzij

$$[dolžina],\ [masa],\ [čas],\ [temperatura]$$

v SI enotah: ***m, kg, s, K****

Npr.:

$$
\begin{aligned}
[hitrost] &= m\,s^{-1}\\
[pospešek] &= m\,s^{-2}\\
[gibalna\ kol.] &= kg\,m\,s^{-1}\\
[sila] &= kg\,m\,s^{-2}\\
[energija] &= kg\,m^{2}\,s^{-2}\\
[entropija] &= kg\,m^{2}\,s^{-2}K^{-1}
\end{aligned}
$$

* ***po Irskem matematiku in fiziku William Thomson Kelvinu [1824-1907]***

2. Sile – gibanje in ravnotežje

2.2. Newtonovi zakoni gibanja

Sir Isaac Newton* je prvi formuliral naslednje zakone mehanike:

I. ***Telo miruje, ali se giblje s konstantno hitrostjo, če nanj ne deluje sila (oz. je rezultanta vseh delujočih sil enaka nič).***

II. ***Ko na telo deluje sila, je hitrost spremembe gibalne količine enaka sili.***

III. ***Kadar dve telesi delujeta s silama eno na drugo, sta sili enaki po velikosti in nasprotno usmerjeni.***

Newtonovi trije zakoni zahtevajo razumevanje dveh količin – SILE IN GIBALNE KOLIČINE ($m\underline{v}$) – kot tudi koncept pozicije in časa. Newtonov II. zakon dejansko predstavlja diferencialno enačbo drugega reda, ki povezuje naslednje količine:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{F}$$

$$kjer\ \ je\ \ pospešek$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{a}$$

******Angleški fizik in matematik Isaac Newton [1642-1727]***

Newtonovi zakoni gibanja

Če na neko telo (objekt), lahko je to "delec" mase *m*, ki se giblje s hitrostjo $\underline{v}$, deluje sila $\underline{F}$, potem Newtonova enačba gibanja:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \qquad (2.1)$$

opiše časovno spreminjanje gibalne količine $\underline{\boldsymbol{p}}$ ***(ali*** $\underline{\boldsymbol{G}}$***)*** in položaja $\underline{\boldsymbol{r}}$ delca. Če je *m* konstantna, je zveza med $\underline{\boldsymbol{p}}$ in $\underline{\boldsymbol{v}}$: $\underline{\boldsymbol{p}} = m\,\underline{\boldsymbol{v}}$ in je sila le $\underline{\boldsymbol{F}} = \underline{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{r}})$, lahko *(2.1)* zapišemo ponovno kot:

$$m \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \qquad (2.2)$$

- **Za dano silo $\underline{F}$ lahko rešimo enačbo gibanja delca, ki nam ob znanih *začetni legi* in *začetni hitrosti* pove, kam se bo delec premaknil v nekem času.**

Newtonovi zakoni gibanja

Vemo – če so sile, ki delujejo na neko telo v ravnotežju (vsota vseh delujočih sil oz. rezultanta sil je enaka nič), potem ostane njegova hitrost nespremenjena; če je njegova začetna hitrost enaka nič, telo ostane v mirovanju.

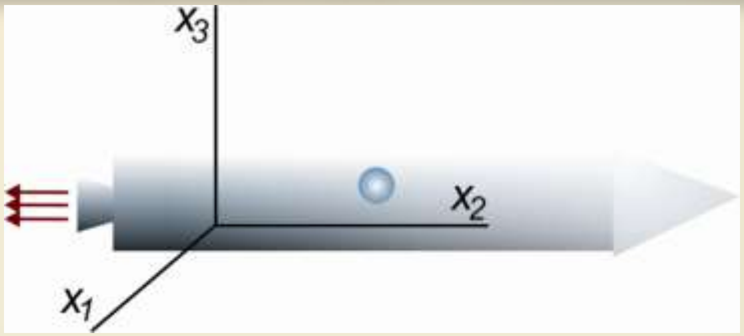
- Torej, ***Newtonovi zakoni gibanja*** nam dovoljujejo opis tako gibanja kot tudi ravnotežnega stanja.

Fluidna dinamika temelji na empirično potrjenih fizikalnih načelih:

- ohranitev *MASE, ENERGIJE in GIBALNE KOLIČINE* v povezavi z zakoni *TERMODINAMIKE*.

Gibanje posameznega delca

Če hočemo določiti lego, hitrost in pospešek delca, moramo definirati KOORDINATNI SISTEM z določenim izhodiščem in orientacijo osi (referenčni okvir).
- Toda, ali *Newtonovi zakoni gibanja veljajo za vse koordinatne sisteme?*

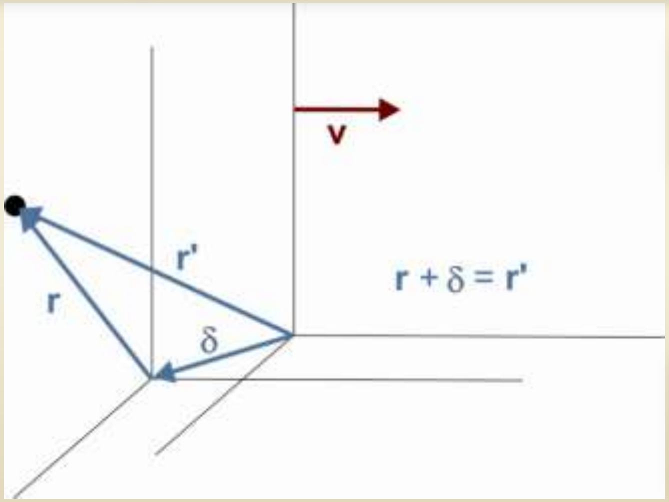


Zamislimo si eksperiment: vesoljsko plovilo v vesolju in naj bo izhodišče koord. sistema fiksirano na plovilo. V plovilu lebdi žoga v stanju mirovanja... in nato vžimo motorje – žoga se bo začela ***pospešeno gibati v –x_2 smeri, čeprav nanjo ne deluje nobena sila!***

Sisteme v katerih veljajo Newtonovi zakoni gibanja imenujemo inercijske (inertial frames).

Gibanje posameznega delca

- Recimo, da imamo takšen koord. sistem, kjer Newtonovi zakoni delujejo, in sedaj kreirajmo še drugega, ki se giblje s konstantno hitrostjo glede na prvi koord. sistem.
- In naj bo $\underline{r}$ lega delca v originalnem koord. sistemu in $\underline{r'}$ lega istega delca v drugem.



- Zapišimo sedaj hitrost in pospešek objekta v obeg sistemih

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\delta}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{a}' = \dot{\boldsymbol{v}}' = \ddot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\delta}$$

- ker se oba koord. sistema gibljeta s konst. hitrostima drug na drugega, velja

$$\ddot{\delta} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}' = \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}$$

Torej, Newtonovi zakoni veljajo tako v drugem kot tudi v izhodiščnem koord. sistemu. Vsak sistem, ki se giblje s konst. hitrostjo glede na inercijski sistem, je tudi inercijski sistem.

Gibanje posameznega delca

- Sedaj lahko za posamezen delec uporabimo Newtonove zakone gibanja. Če je sila, ki deluje na delec konstantna, je enačba gibanja:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

  - v tem primeru lahko vedno izberemo eno od osi, npr. x_1, ki leži v smeri pospeška

$$m\ddot{x}_1 = F = m\frac{dv_1}{dt}$$

$\rightarrow$ dif. enačbo enostavno rešimo z integriranjem

$$Fdt = mdv_1$$

$$v_1(t) = \frac{F}{m}t + v_{1,0} = v_{1,0} + at$$

dodatno integriranje nam daje lego kot funkcijo časa

$$\frac{dx_1}{dt} = v_{1,0} + at$$

$$dx_1 = \left(\frac{F}{m}t + v_{1,0}\right)dt$$

$$x_1(t) = x_{1,0} + v_{1,0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$v_{1,0}$ in $x_{1,0}$ sta konstanti določeni z začetnimi pogoji

Gibanje N delcev

- Zamislimo si *N* običajnih delcev, omejenih v prostoru s prostornino *V*. Delci imajo končno kinetično energijo in so zato v konstantnem gibanju kot posledica medsebojnega delovanja sil (tudi zunanje sile so lahko prisotne).
- V nekem danem trenutku je lega delcev v pravokotnem (kartezičnem) koordinatnem sistemu $\underline{r}_1(t)$, $\underline{r}_2(t)$, …,$\underline{r}_N(t)$. Časovni razvoj lege je podan z II. Newtonovim zakonom gibanja:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i, \qquad i = 1,\dots,N$$

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_i \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \\ m\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N) \end{array} \right)$$

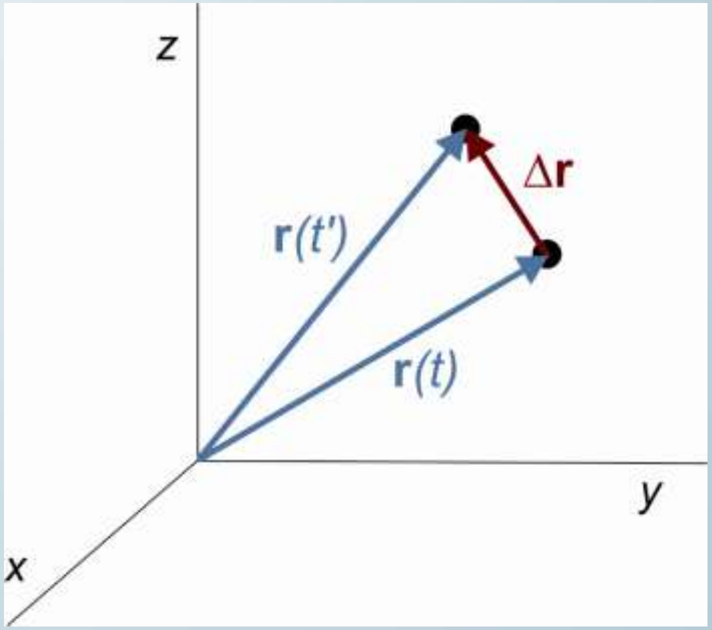
  kjer so $\boldsymbol{F}_1,\dots,\boldsymbol{F}_N$ sile vsakega od *N* delcev glede na ostale delce v sistemu – $\boldsymbol{F}_i$ je sila na *i*-ti delec kot posledica medmolekularnih interakcij in možnih zunanjih polj (gravitacijsko, magnetno,…)
- Tako dobimo sistem ***3N dif. enačb drugega reda*** ($r_i \equiv r_i(x,y,z)$, kjer so *x,y in z* koordinate posameznega delca) ***z robnimi pogoji***:

$$\{\boldsymbol{r}_1(0),\dots,\boldsymbol{r}_N(0),\dot{\boldsymbol{r}}_1(0),\dots,\dot{\boldsymbol{r}}_N(0),\}$$

- … in *N* je na splošno reda Avogadrovega števila – Av ~ 10^{23}!

Gibanje v treh dimenzijah

- Vzemimo delec mase *m*, ki se giblje v prostoru. Njegova lega je v vsakem trenutku določena s položajem vektorja $\underline{\boldsymbol{r}}$ v koordinatnem sistemu.

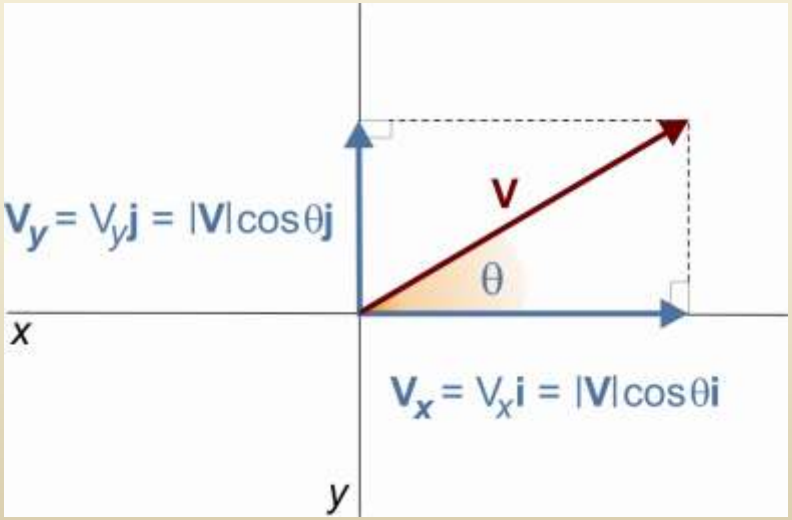


- Njegova povprečna hitrost med časom t in t′ je $\boldsymbol{v}_{povp} = \frac{\boldsymbol{r}(t') - \boldsymbol{r}(t)}{t' - t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$

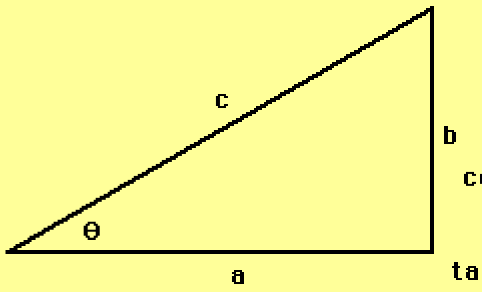
Matematična orodja: VEKTORJI

Oris vektorja kot “puščice”, pooseblja koncept vektorja kot ga potrebujemo – ***velikost*** in ***smer***. Matematična obravnava sloni na komponentah vektorja.

- **2-D primer**



x in y osi si lahko izberemo, kakor nam je prav



sine: $\sin\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{side opposite }\theta}{\text{hypotenuse}}$

cosine: $\cos\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{side adjacent }\theta}{\text{hypotenuse}}$

tangent: $\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{side opposite }\theta}{\text{side adjacent }\theta}$

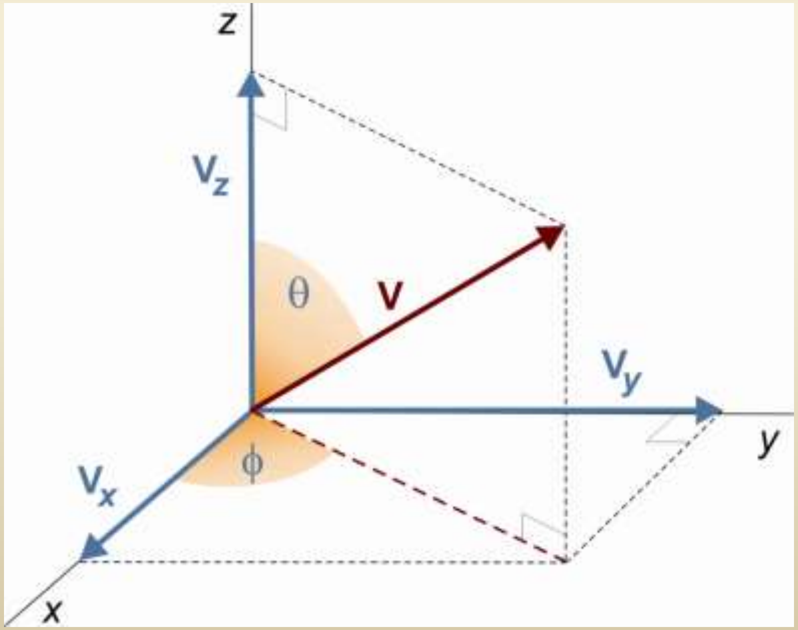
secant: $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

cotangent: $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

cosecant: $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

Matematična orodja: VEKTORJI

- **3-D primer**
  1. Izberimo eno od osi in poiščimo kot med vektorjem in to osjo –(tipično izberemo *z kot* in ga imenujemo kot θ).
  2. Vektor in izbrana os tvorita ploskev. Poiščemo kot med to ploskvijo in ostalima osema –(tipično izberemo *x kot* in ga imenujemo kot ϕ).
  3. 3D vektor lahko sedaj zapišemo



$$\boldsymbol{V} = |\boldsymbol{V}|\left(\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}\right)$$

Matematična orodja: VEKTORJI

- Zveze med komponentami vektorja
  - Velikost vektorja

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

  - Smer je prav tako izključno določena s komponentami

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

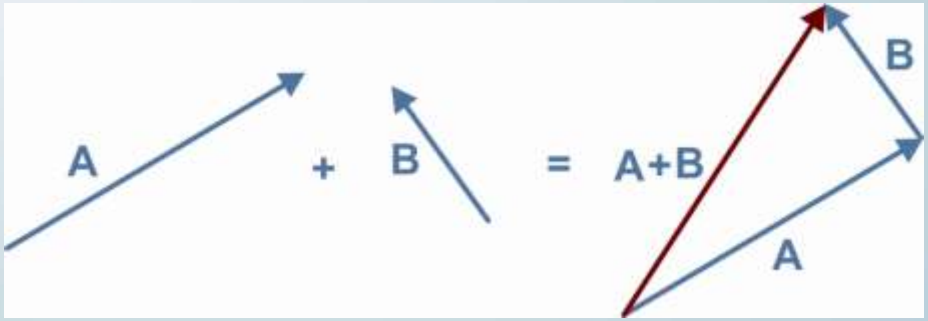
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_z}\right); \quad 0 < \theta < 180^o$$

Matematična orodja: VEKTORJI

- **Seštevanje vektorjev**
  - Pravimo, da je ***V*** **vsota** njegovih komponent

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_x + \boldsymbol{V}_y$$

    - kaj "+" pomeni pri vektorjih
    - grafična predstavitev



$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

Intuitivno
Če nekdo hodi vzdolž **A** in nato še vzdolž **B**, prispe na pozicijo **A+B**

Logično
A + **B** = **B** + **A**
A + (-**A**) = **A** – **A** = 0

  - Rezultat je zopet vektor.

Matematična orodja: VEKTORJI

- **Množenje vektorja s skalarjem**

$$c\mathbf{A} = cA_x\,\mathbf{i} + cA_y\,\mathbf{j} + cA_z\,\mathbf{k}$$

  - Rezultat je zopet vektor.

- **Množenje dveh vektorjev**
  - *SKALARNI PRODUKT*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_k A_k B_k = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$$

    - Rezultat je skalar.
    - Priročen način, kako določiti kot θ med obema vektorjema.

Matematična orodja: VEKTORJI

- **Vektorski račun**
  - Odvajanje vektorja glede na skalar (*s*)

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \frac{dA_1}{ds}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{ds}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{ds}\mathbf{k}$$

    - rezultat je ponovno vektor
    - zelo pogosto v fiziki

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{A}}; \quad \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{A}}$$

Okrajšavo s piko je prvi uvedel Newton

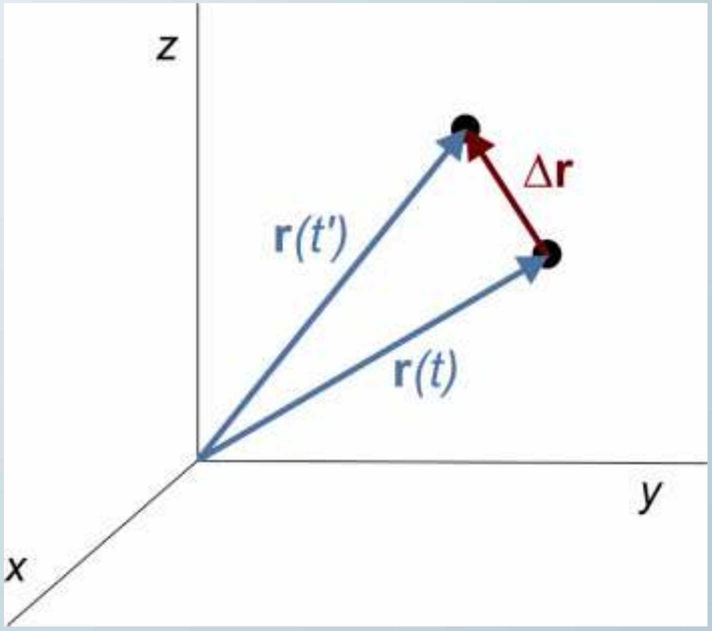
Matematična orodja: VEKTORJI

- **Drugi koordinatni sistemi**
  - Pogosto srečamo probleme pri katerih je bolj primerno uporabljati nekartezične koordinate (npr. simetrični problemi). Vendar pa zapisi vektorjev npr. hitrosti in pospeška v drugih koordinatnih sistemih zahteva precej matematičnih manipulacij.
    - Primer zapisa vektorja hitrosti v sferičnih koordinatah:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$

Gibanje v treh dimenzijah

- Vzemimo delec mase *m*, ki se giblje v prostoru. Njegova lega je v vsakem trenutku določena s položajem vektorja $\underline{r}$ v koordinatnem sistemu.



- Njegova povprečna hitrost med časom t in t′ je $\boldsymbol{v}_{povp} = \dfrac{\boldsymbol{r}(t') - \boldsymbol{r}(t)}{t' - t} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$

Gibanje v treh dimenzijah

- Na osnovi definicije seševanja vektorjev lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \left(r_x(t') - r_x(t)\right)\mathbf{i} + \left(r_y(t') - r_y(t)\right)\mathbf{j} + \left(r_z(t') - r_z(t)\right)\mathbf{k} \\ &= \Delta r_x\mathbf{i} + \Delta r_y\mathbf{j} + \Delta r_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

- in

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta r_z}{\Delta t}\mathbf{k}$$

- Ponavadi želimo poznati tudi hitrost

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dr_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dr_z}{dt}\mathbf{k}$$

- podobno je pospešek podan kot

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} = \frac{d^2r_x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2r_y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2r_z(t)}{dt^2}\vec{k} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Povzetek – vsaka od komponent 3D kinematičnega vektorja sledi pravilom 1D gibanja

Gibanje v treh dimenzijah

- PRIMER
  - Delec najprej miruje pri $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ in je nato podvržen pospešku, ki ga opisuje naslednja zveza

$$\mathbf{a} = At\,\mathbf{i} + B\cos(Ct)\mathbf{j}$$

  - ***Kje bo delec v času t?***

  - Iščemo $\underline{r}(t)$ in prvi korak je poiskati $\underline{v}(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t)dt \\ &= \int [At\,\mathbf{i} + B\sin(Ct)\mathbf{j}]dt \\ &= \left(\frac{1}{2}At^2 + c_1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{B}{C}\sin(Ct) + c_2\right)\mathbf{j}\end{aligned}$$

  - Začetni pogoji nam dajo $c_1 = c_2 = 0$

Gibanje v treh dimenzijah

- PRIMER
  - Dodatno integriranje nam daje

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt$$
$$= \int \left[\left(\frac{1}{2} At^2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{B}{C} sin(Ct) \right) \mathbf{j} \right] dt$$
$$= \frac{1}{6} At^3\, \mathbf{i} - \left(\frac{B}{C^2} cos(Ct) - \frac{B}{C^2} \right) \mathbf{j}$$

A = 1 m/s^3, B = 100 m/s^2 in C = 1/s