ENAČBA GIBANJA ZA VISKOZNE TEKOČINE

1. Napetost
2. Tenzor napetosti
3. Simetrija tenzorja napetosti
4. Enačba gibanja
5. Tenzor napetosti za Newtonijske tekočine
6. Navier-Stokesova enačba
7. Robni pogoji

Vir: ***Ain A. Sonin, Equation of Motion for Viscous Fluids.*** *Department of Mechanical Engineering Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139; 2001 (8th edition).*

Mehanika tekočin

Tekočina se sestoji iz diskretnih delcev - molekul, ki trkajo med sabo in trdnimi predmeti.

- KONTINUUM
  - *Predpostavka KONTINUUMA obravnava tekočino kot zvezno, homogeno (enotno) snov – GOSTOTA, TLAK, TEMPERATURA IN HITROST so določene v "neskončno" majhnih točkah (ref. prostorski element, RPE), velikostnega reda razdalje med sosednjima molekulama tekočine.*
  - *Predpostavlja se, da se lastnosti zvezno spreminjajo od ene točke do druge, vrednost lastnosti v eni točki pa predstavlja povprečenje znotraj RPE.*
  - *Hipoteza kontinuuma je v osnovi predpostavka, katere rezultat je približna rešitev. Za določene pogoje so rešitve na osnovi hipoteze kontinuuma dovolj natančne, v mnogih primerih takšna predstava odpove (npr. zelo razredčeni plini).*
  - *Kriterij veljavnosti kontinuuma je Knudsonovo število, Kn*

Mehanika tekočin

- Knudsenovo število – merilo opisa fluidne dinamike na osnovi mehanike kontinuuma ali statistične mehanike

$$Kn = \frac{l}{L} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P\, L}$$

*l = srednja prosta pot (m)**
L = karakteristična linearna dimenzija (m)
k_B = Boltzmanova konstanta ($1.38\ 10^{-23}$ J/K)
T = temperatura (K)
σ = premer delca (m)
P = absoluten tlak (Pa)

(za dinamiko delcev v atmosferi, ob predpostavki stand. temperature in tlaka (oz. 25°C, 1 atm), je*
***l = 8×10^{-8} m**)*

$$Kn \le 0.01$$

MEHANIKA KONTINUUMA

$$Kn \approx 1$$

drseči tok

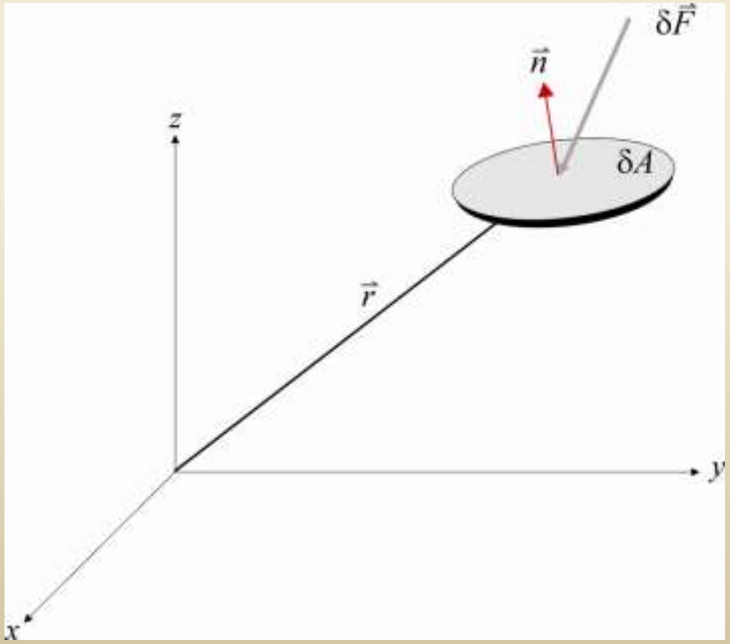
$$Kn \ge 10$$

STATISTIČNA MEHANIKA

1. Napetost

Poznamo že količine kot sta GOSTOTA in HITROST, ki imajo v danem trenutku določeno vrednost v vsaki točki tekočine.

- Gostota $\rho(\underline{\mathbf{r}},t)$ *predstavlja SKALARNO POLJE* – v vsaki točki ima skalarno vrednost.
- Hitrost $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}},t)$ *predstavlja VEKTORSKO POLJE* – v vsaki točki ima določeno tako smer kot tudi velikost.



NAPETOST pa je bolj kompleksna količina. Razlog je v tem, da ne moremo govoriti o napetosti v točki, ne da bi prej definirali določeno površino skozi to točko, na katero deluje napetost.

- Majhen površinski element tekočine, centriran v točki $\underline{\mathbf{r}}$, je določen s površino δA in njenim NORMALNIM vektorjem $\underline{\mathbf{n}}$.

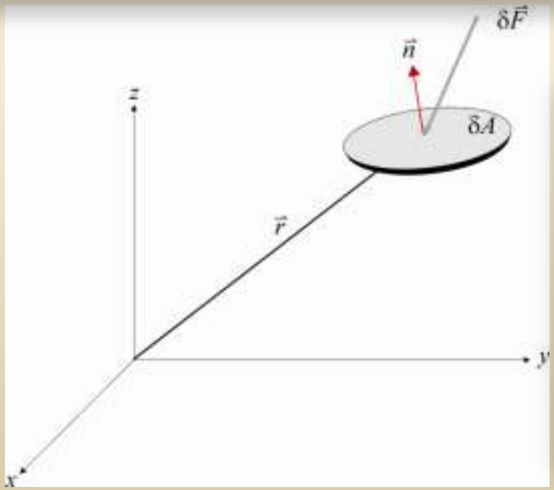
1. Napetost

- Napetost, ki jo vrši tekočina na strani proti kateri kaže ***n*** površinskega elementa, je definirana

$$\vec{\sigma} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta \vec{F}}{\delta A} \qquad (1)$$

kjer je δ***F*** sila, ki jo vrši tekočina na površinski element na tej strani (vključena je samo ena stran). V limiti $\delta A \to 0$ je napetost neodvisna od velikosti površine, a bo odvisna od orientacije površinskega elementa, ki jo določa ***n***. Z drugimi besedami

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{r}, t, \vec{n}) \qquad (2)$$



Slika 1. Površinski element v točki kontinuuma.

- Dejstvo, da ***σ*** zavisi od ***n*** kot tudi *x, y, z* in *t*, na prvi pogled zelo zaplete problem. Vsekakor je pred nami količina, ki zavisi od ***šestih neodvisnih spremenljivk*** (*x,y,z,t* in še dve, ki določata orientacijo ***n***). Na srečo je narava priskočila na pomoč pri spoznanju, da mora biti odvisnost napetosti ***σ*** od orientacije relativno preprosta.

1. Napetost

- Spoznali smo že, da v primeru *odsotnosti strižnih sil*, Newtonov zakon predpisuje za napetost posebno preprosto obliko

$$\vec{\sigma} = -p\vec{n} \qquad (3)$$

kjer je p velikost napetosti (pravokotno na površino - stisljivost) in je funkcija le $\underline{r}$ in t. To je PASCALOVO načelo, ki pravi, da je ob odsotnosti strižnih sil NAPETOST v vsaki točki tekočine vedno pravokotna na delujočo površino in je njena velikost neodvisna od orientacije površine

  - ***Če ni prisotnih strižnih sil je torej napetost katerekoli površine, kjerkoli v tekočini, izražena s preprostim skalarnim poljem $p(\underline{r},t)$. To nam omogoča preprost opis gibanja neviskoznih tekočin.***
  - ***Če pa strižne sile so prisotne, kar praktično vedno so (razen v stanju absolutnega mirovanja tekočine), Newtonov zakon vpeljuje nekoliko bolj kompleksen odnos med $\underline{\sigma}$ in $\underline{n}$.***

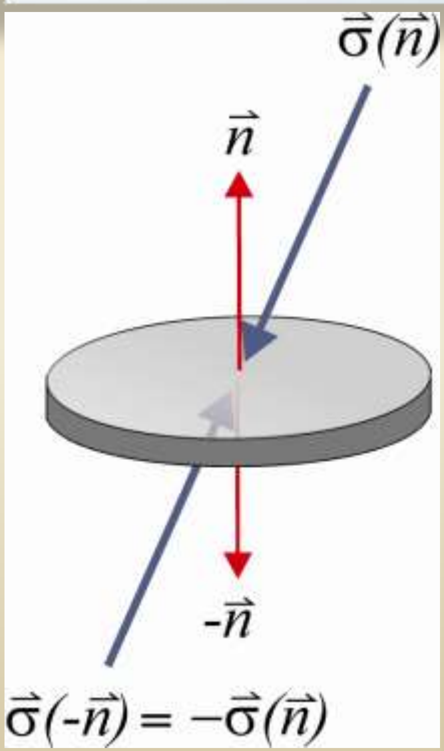
Spoznali bomo, da je ***napetost*** na katerokoli povšino, kjerkoli v tekočini na splošno določena s šestimi skalarnimi funkcijami neodvisnih spremenljivk x, y, z, t.

KOLIČINO, KI JO DOLOČA TEH ŠEST NEODVISNIH KOMPONENT, IMENUJEMO ***TENZOR NAPETOSTI***.

2. Tenzor napetosti

Prva in najpreprostejša stvar, ki jo namiguje Newtonov zakon glede napetosti je ta, da mora biti, za dano točko, ***napetost*** na površinski element orientacije ***n*** enaka po velikosti, toda nasprotno usmerjena glede na površinski element z nasprotno orientacijo ***–n***. Torej:

$$\vec{\sigma}(\vec{r},t,-\vec{n}) = -\vec{\sigma}(\vec{r},t,\vec{n}) \qquad (4)$$



Slika 2. Ilustracija en. 4.

Potrditev: – zamislimo si tanek delec tekočine v obliki diska, centriranega v točki ***r***, z zelo majhno površino δA in debelino δh (slika 2.). Sedaj zapišimo enačbo gibanja za ta delec tekočine:

$$\rho \delta h \delta A \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\sigma}(\vec{n})\delta A + \vec{\sigma}(-\vec{n})\delta A + \rho \delta h \delta A \vec{G} \qquad (5)$$

kjer je ***G*** prostorninska oz. masna sila, definirana na enoto mase (N/kg).

Ko pošljemo $\delta h \to 0$, se obe strani diska združita v eno - inercijski člen na levi in člen masne sile na desni postaneta zanemarljivo majhna v primerjavi z členoma površinskih sil. Tako dobimo enačbo (4).

Nekatere definicije odvodov

- PARCIALNI ČASOVNI ODVOD, $\partial c/\partial t$
  Recimo, da stojimo na mostu in spremljamo, kako se s časom spreminja koncentracija rib pod nami...
  - torej spremljamo spremembo koncentracije s časom pri določeni poziciji v prostoru; $\partial c/\partial t$ zato pomeni delno (parcialno) spremembo glede na čas pri konstantnih x, y in z.
- TOTALNI ČASOVNI ODVOD, ***dc/dt***
  Sedaj se vkrcamo na čoln in se vozimo sem in tja, gor in dol, po reki. Če sedaj spremljamo spremembe koncentracije rib glede na čas, morajo naše ugotovitve odsevati tudi gibanje čolna. Totalni odvod je torej podan

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

  kjer so dx/dt, dy/dt in dz/dt komponente hitrosti čolna.
- MATERIALNI ČASOVNI ODVOD (**Substantial Time Derivative**), ***Dc/Dt***
  Prestavimo se v kanu in se brez volje prepustimo toku... Naša hitrost je torej enaka hitrosti toka $\underline{v}$. Sedaj naše spremljanje koncentracije rib zavisi od hitrosti lokalnega toka s katerim plujemo in

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x\frac{\partial c}{\partial x} + v_y\frac{\partial c}{\partial y} + v_z\frac{\partial c}{\partial z}$$

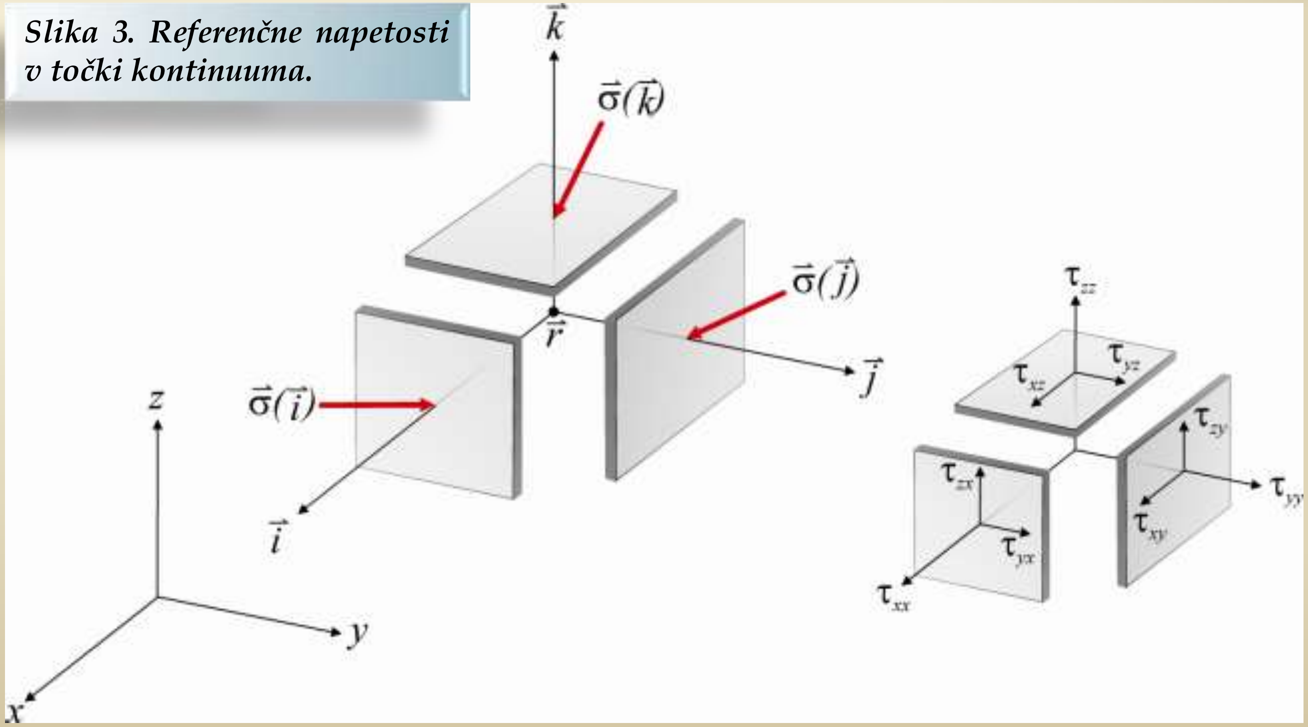
  kjer so v_x, v_y in v_z komponente hitrosti lokalnega toka $\underline{v}$.

2. Tenzor napetosti

Newtonov zakon nosi v sebi še globji pomen, ki vodi do koncepta tenzorja napetosti. Vemo, da napetost v neki točki zavisi od orientacije površinskega elementa na katerega deluje.

- Zamislimo si sedaj, v dani točki $\underline{r}$ in v času *t*, ***"referenčne napetosti"* –** vrednosti napetosti, ki se vršijo na površino orientirano v pozitivni *x-smeri*, na površino orientirano v pozitivni *y-smeri* in na površino orientirano v pozitivni *z-smeri*.

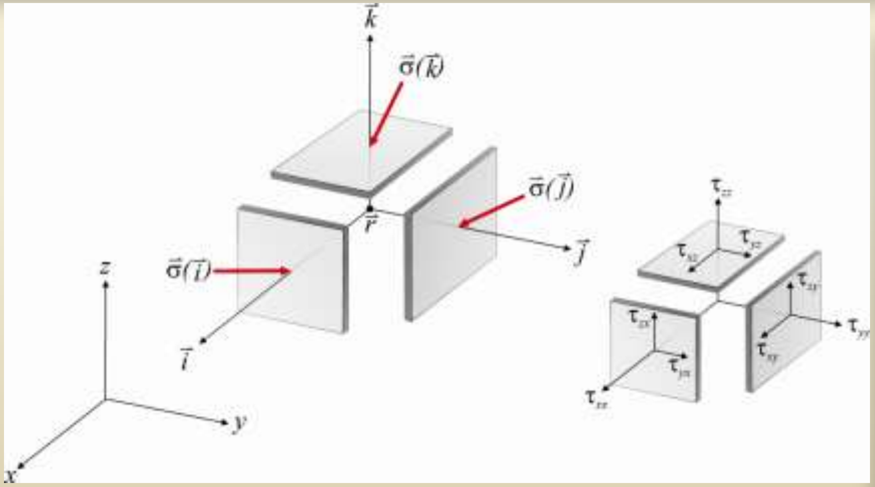
Slika 3. Referenčne napetosti v točki kontinuuma.



2. Tenzor napetosti

Referenčne napetosti, ko so seveda vektorji, lahko sedaj zapišemo kot vsoto njihovih komponent:

$$\vec{\sigma}(\vec{i})=\tau_{xx}\vec{i}+\tau_{yx}\vec{j}+\tau_{zx}\vec{k}$$
$$\vec{\sigma}(\vec{j})=\tau_{xy}\vec{i}+\tau_{yy}\vec{j}+\tau_{zy}\vec{k} \qquad (6)$$
$$\vec{\sigma}(\vec{k})=\tau_{xz}\vec{i}+\tau_{yz}\vec{j}+\tau_{zz}\vec{k}$$



Slika 3. Referenčne napetosti v točki kontinuuma.

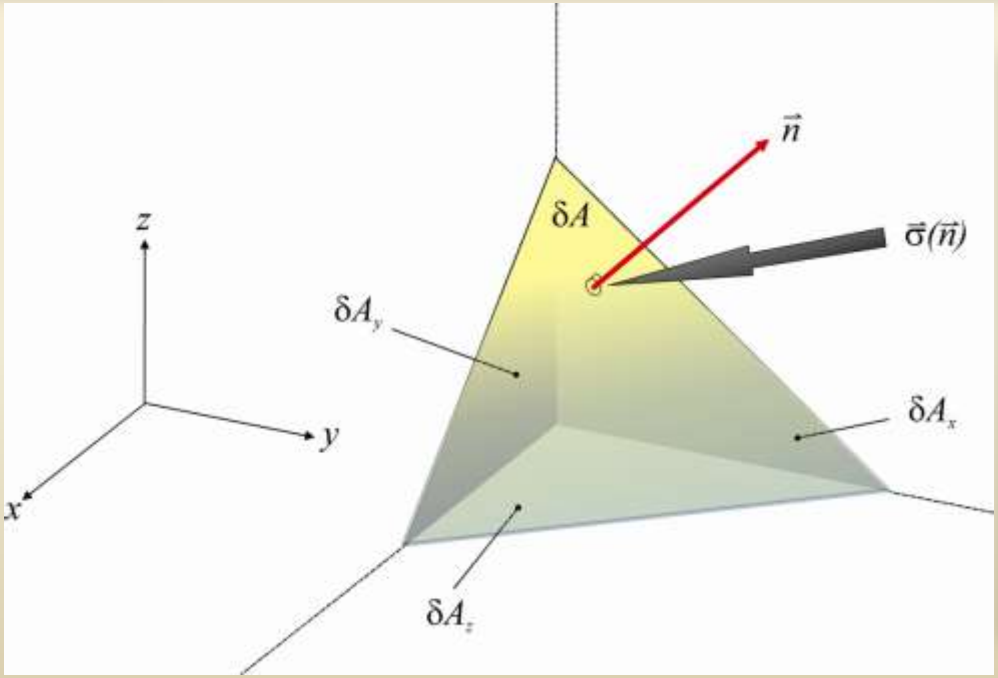
Torej, τ_{xx}, τ_{yx} *in* τ_{zx} predstavljajo *x*, *y* in *z* komponento napetosti, ki deluje na povšino katere izhodni normalni vektor je orientiran v pozitivni *x-smeri*, itd...

Prvi indeks τ_{ij} identificira ***smer napetosti*** in drugi ***izhodno normalo površine***, na katero deluje.

Vsi τ_{ij} v enačbi (6) so seveda tudi funkcije pozicije (x,y,z) in časa (t) - kot tudi same referenčne napetosti.

2. Tenzor napetosti

Sedaj bomo pokazali, ponovno z uporabo Newtonovega zakona, da lahko napetost na površino, ki ima v neki točki ***r*** *katerokoli orientacijo*, izrazimo z referenčnimi napetostmi $\underline{\sigma}(\underline{i})$, $\underline{\sigma}(\underline{j})$ in $\underline{\sigma}(\underline{k})$, oz. bolj specifično, z njihovimi devetimi komponentami τ_{xx}, τ_{yx},…, τ_{zz}.



***Slika 4. Delec tekočine v obliki tetraedra v točki* (x,y,z).**

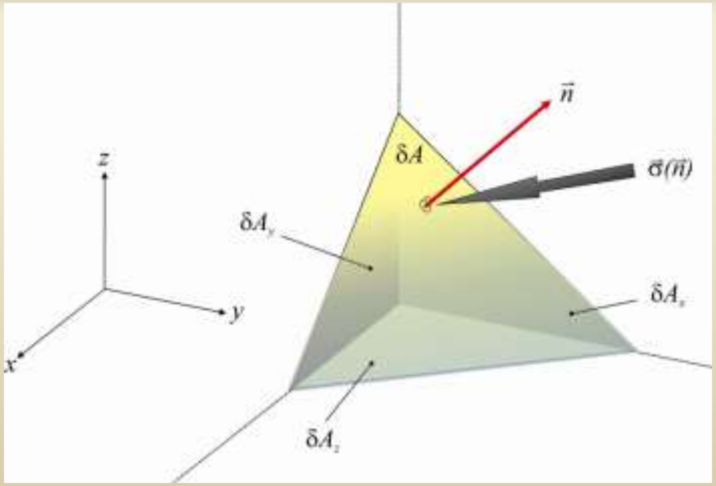
Zamislimo si delec tekočine, ki ima v času *t* obliko malega tetraedra, centriranega v točki *x*, *y* in *z*. Ena od zunanjih stranic ima površino δA s poljubnim zunanjim normalnim vektorjem $\underline{\boldsymbol{n}}$ (slika 4.), izhodne normale površin ostalih treh zunanjih stranic pa so usmerjene v *negativni x*, *y* in *z* smeri.

2. Tenzor napetosti

Površine treh pravokotnih stranic tetraedra so povezane z δA *na naslednji način*:

$$\begin{aligned}
\delta A_x &= \cos\theta_{nx}\delta A = n_x \delta A \\
\delta A_y &= \cos\theta_{ny}\delta A = n_y \delta A \qquad (7)\\
\delta A_z &= \cos\theta_{nz}\delta A = n_z \delta A
\end{aligned}$$

kjer δA_x predstavlja ploskev z izhodno normalo v negativni *x-smeri,* θ_{nx} je kot med $\underline{\boldsymbol{n}}$ in x-osjo in n_x je x-komponenta normale $\underline{\boldsymbol{n}}$, *itd.*



***Slika 4. Delec tekočine v obliki tetraedra v točki* (x,y,z).**

Razmislimo sedaj, kaj nam govori Newtonov zakon o sili, ki deluje na tetraeder, če ga skrčimo v smeri točke $\underline{\boldsymbol{r}}$, okoli katere je tetraeder centriran.

- *Ker je razmerje med maso tetraedra in površino katerekoli njegove stranice sorazmerno z dolžino katerekoli stranice oz. ploskve, bosta tako masa krat pospešek kot tudi masna sila, postala zanemarljivo majhna v primerjavi s površinsko silo, ko v limiti skrčimo tetraeder v točko (glej enačbo 5 in odstavek, ki sledi).*

2. Tenzor napetosti

Torej, ko v limiti skrčimo tetraeder v točko, morajo biti površinske sile na vse štiri stranice v ravnotežju, in velja:

$$\vec{\sigma}(\vec{n})\delta A+\vec{\sigma}(-\vec{i})\delta A_x+\vec{\sigma}(-\vec{j})\delta A_y+\vec{\sigma}(-\vec{k})\delta A_z=0 \qquad (8)$$

Sedaj že vemo (en. 4), da je napetost na površino, ki kaže v $-\underline{i}$ smeri, negativna vrednost napetosti na površino, ki kaže v $+\underline{i}$ smeri, itd. Z upoštevanjem tega dejstva in enačbe *(7)* za površine, zgornja enačba (en. 8) postane:

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\vec{\sigma}(\vec{i})n_x+\vec{\sigma}(\vec{j})n_y+\vec{\sigma}(\vec{k})n_z \qquad (9)$$

Če sedaj izrabimo drugo možnost in na osnovi enačbe *(6)* zapišemo referenčne napetosti v obliki njihovih komponent, dobimo naslednji zapis **komponent $\underline{\sigma}(\underline{n})$**:

$$\begin{aligned}\sigma_x(\vec{n})&=\tau_{xx}n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z\\ \sigma_y(\vec{n})&=\tau_{yx}n_x+\tau_{yy}n_y+\tau_{yz}n_z\\ \sigma_z(\vec{n})&=\tau_{zx}n_x+\tau_{zy}n_y+\tau_{zz}n_z\end{aligned} \qquad (10)$$

2. Tenzor napetosti

Napetost $\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{n}})$, ki pri $\underline{\boldsymbol{r}}, t$ deluje na površino poljubne orientacije $\underline{\boldsymbol{n}}$, lahko torej izrazimo v obliki devetih komponent referenčnih napetosti

$$\begin{matrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{matrix}$$

Teh devet količin, od katerih vsaka zavisi od pozicije in časa, imenujemo KOMPONENTE TENZORJA NAPETOSTI. Ko enkrat te komponente v dani točki poznamo, lahko izračunamo delovanje napetosti *na katerokoli površino* skozi dano točko – *preprosto določimo komponente izhodnega normalnega vektorja* $\underline{\boldsymbol{n}}$ *vpletene površine in uporabimo enačbo (10).*

Enačbo (*10*) lahko zapišemo še bolj zgoščeno v klasičnem tenzorskem zapisu, kjer indeksa *i* in *j* predstavljata *x*, *y* ali *z* in kjer je razumljivo npr. naslednje:
$\sigma_{ii} \equiv \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$. *V tem zapisu enačba (10) postane preprosto:*

$$\sigma_i(\vec{r}, t, \vec{n}) = \tau_{ij}(\vec{r}, t) n_j \qquad (11)$$

2. Tenzor napetosti

Pomen koncepta *TENZORJA NAPETOSTI* v teoriji *KONTINUUMA* je naslednji:

- Dovoljuje nam opis stanja napetosti v kontinuumu s količinami, ki zavisijo od **lokacije** in **časa**, ne pa tudi od ***orientacije površine*** na katero deluje napetost.
- Domnevno je potrebno za opis stanja napetosti devet takšnih količin *(v nadaljevanju bomo ugotovili, da je od teh devetih količin le **šest neodvisnih**).*
- Dejstvo je, da je precej lažje ravnati s temi količinami, kot pa z eno samo količino, ki ima, pri določeni legi in času, dvojni neskončni set vrednosti kot posledica različnih orientacij $\underline{\boldsymbol{n}}$.

V fizikalnem smislu **tenzor napetosti** predstavlja *devet komponent treh referenčnih napetosti* v točki $\underline{\boldsymbol{r}}$ in času t. **Referenčne napetosti** so po navadi izbrane kot napetosti na tri površinske elemente, ki imajo izhodne normalne vektorje v smeri pozitivnih osi izbranega koordinatnega sistema.

2. Tenzor napetosti

Torej,

- v **karteziČnem koordinatnem sistemu** so *referenčne napetosti* definirane kot napetosti na površine, ki kažejo v pozivni *x*-, *y*- in *z*-smeri, in *tenzor napetosti* sestavlja devet komponent teh treh referenčnih napetosti - τ_{ij} *i*-ta komponena napetosti na površino, katere normala kaže v *j*-smeri;
- v **cilindričnem koordinatnem sistemu** bo *tenzor napetosti* vseboval komponente napetosti, ki se vršijo na tri površine z izhodnimi normalami v pozitivni r, θ in z smeri.

Zakaj so količine τ_{ij} "**komponente tenzorja**" in ne samo navadna množica devetih skalarnih količin? *Odgovor leži v posebnem načinu transformacije teh devetih količin pri spreminjanju referenčnega okvirja iz enega koordinatnega sistema v drugega.*
Enačba *(10)* nam pove, da se morajo pri spremembi koordinat tri vsote $\tau_{ij}n_j$, transformirati kot komponente vektorja. **Set devetih količin τ_{ij} , transformiranih na ta način, je po definiciji tenzor drugega reda.**

*(**Tenzor prvega reda je VEKTOR**, katerega transformacije treh komponent so takšne, da ostaneta velikost in smer vektorja nespremenjena; **tenzor ničtega reda je SKALAR**, torej enojna količina, katere velikost ostane nespremenjena pri sprememebmah koordinat.)*