

Normalne napetosti

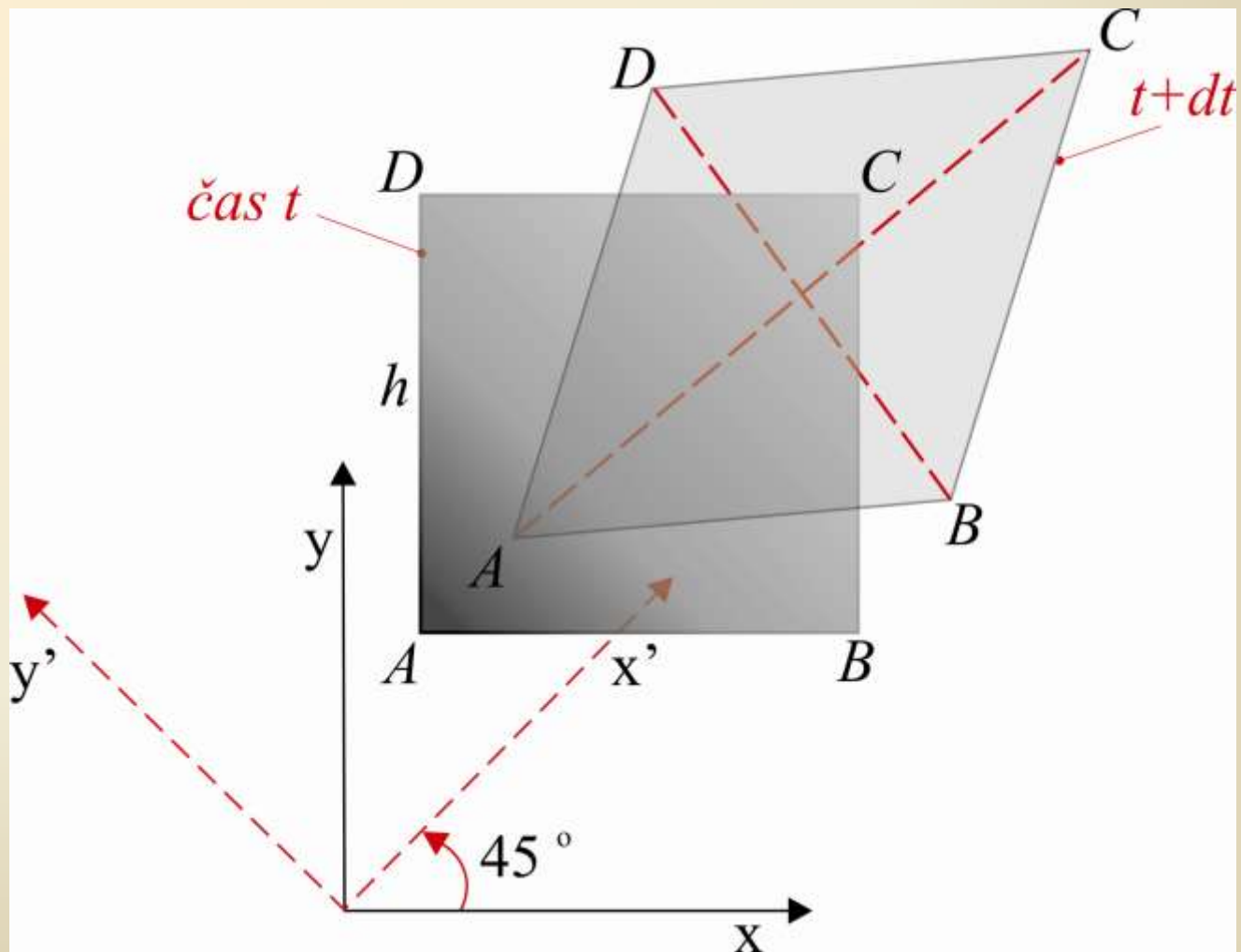
V nadaljevanju bomo obravnavali normalne napetosti, torej *diagonalne komponente tenzorja napetosti* – τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} .

Izpeljava ni preprosta. Zavedati se moramo, da se *linearna in strižna deformacija* v splošnem dogajata hkrati. *Trik je v tem, da poiščemo kako so linearne napetosti in deformacije povezane s strižnimi napetostmi in deformacijami!*

Zamislimo si majhen delec tekočine, ki ima v času t obliko majhne kocke s stranicami dolžine h , ki so vzporedne z x , y in z osjo. Zopet bomo v limiti obravnavali delec tekočine “v točki”, torej v limiti bo $h \rightarrow 0$. V času t je rob kocke A v točki (x, y, z) . Med časom t in $t + dt$, se kocka premakne in deformira kot je prikazano na sliki 8. Strani AB in AD bosta na splošno zarotirali z neenako količino, kar se bo posledično odrazilo v strižni deformacije delca tekočine.

Strižna deformacija bo povzročila raztegnitev diagonale AC in skrčenje diagonale BD (glej sliko 8), oz. bo povzročila linearne deformacije v x' in y' smereh, ki so zavrtene 45° glede na x in y osi.

Normalne napetosti



Slika 8. Kako so povezane linearne in strižne deformacije.

Normalne napetosti

Poznamo že zvezo med strižnimi komponentami tenzorja napetosti in hitrostjo kotne deformacije delca tekočine v (x,y) ravnini (enačba 22).

Če sedaj lahko povežemo

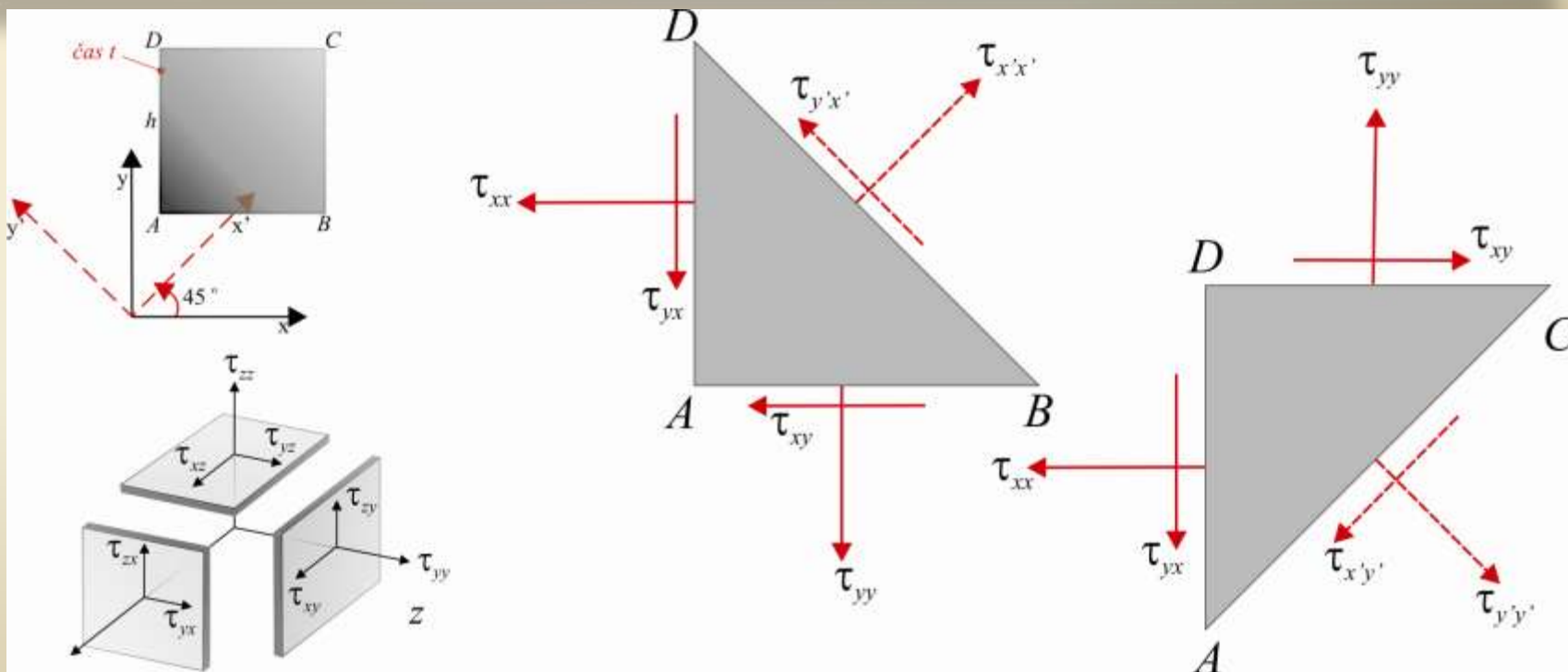
- *strižne napetosti v (x,y) koordinatnem sistemu in napetosti v rotiranem (x',y') koordinatnem sistemu, ter*
- *hitrosti strižne deformacije v (x,y) koordinatnem sistemu in hitrosti deformacije v rotiranem (x',y') koordinatnem sistemu,*

bomo prišli do zveze med napetostmi in hitrostjo deformacij v (x',y') koordinatnem sistemu.

Glede na to, da je izbira referenčnega koordinatnega sistema naključna, bo zveza veljala tudi na splošno!

Normalne napetosti

Začnimo z obravnavanjem sil, ki delujejo na eno polovico kockastega delca tekočine (prikazanega na sliki 8.) - *tristraničen delec tekočine ABD* kot je prikazan na sliki 9.



Slika 9. Napetosti na dve polovici delca tekočine v obliki kocke s slike 8.

Normalne napetosti

Ker upoštevamo limito $h \rightarrow 0$, kjer razmerje med prostornino in površino izgine, se bo *enačba za gibanje delca tekočine* skrčila na izjavo, da morajo biti vse površinske sile v ravnotežju. Na sliki 9. so prikazane vse površinske sile na polovičen delec tekočine ABD , izražene kot komponente tenzorja napetosti, v originalnem in zavrtenem referenčnem koordinatnem sistemu.

Bilanca sil v x' -smeri na ta delec zahteva, da je

$$\tau_{x'x'} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} + \tau_{yx} \quad (23)$$

In podobno, bilanca sil v x' -smeri na tristranični delec ACD zahteva

$$\tau_{y'y'} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} - \tau_{yx} \quad (24)$$

Normalne napetosti

Seštevek enačb (23) in (24) nam daje

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} = 2\tau_{yx} \quad (25)$$

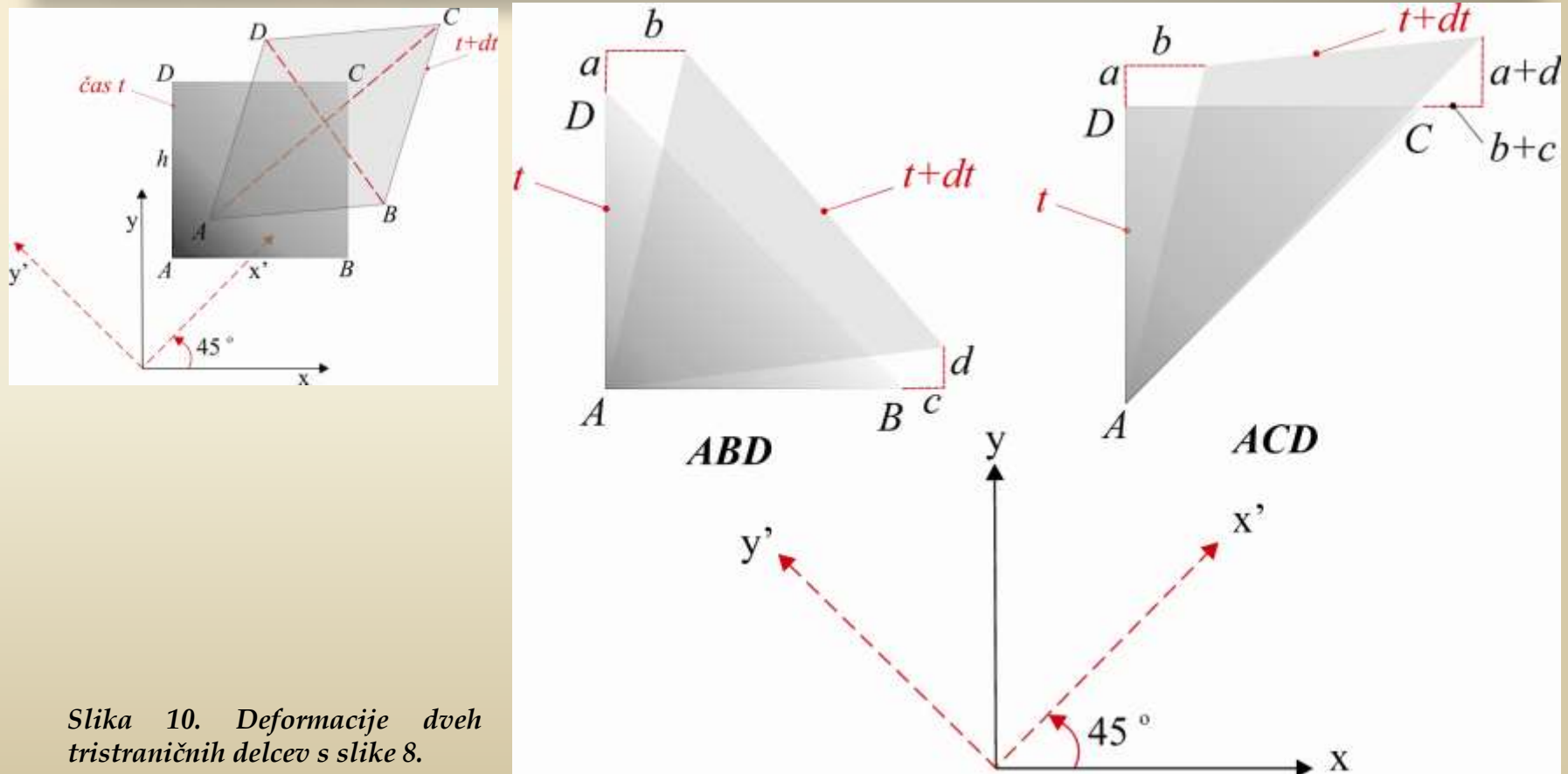
Sedaj lahko uporabimo zvezo med strižnimi napetostmi in hitrostjo deformacije, podano v enačbi (22a), in dobimo

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} = 2\mu \frac{D\gamma_{xy}}{Dt} \quad (26)$$

ki povezuje diagonalne komponente tenzorja napetosti v (x',y') koordinatnem sistemu s hitrostjo kotne deformacije v (x,y) koordinatnem sistemu.

Normalne napetosti

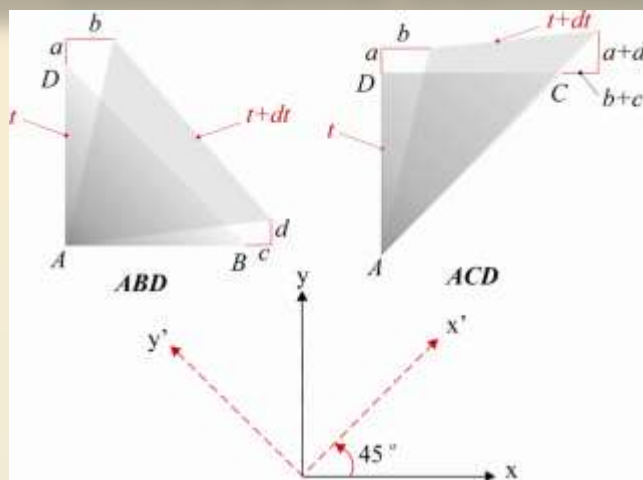
Za zaključek moramo poiskati še zvezo med hitrostjo strižne (kotne) deformacije v (x,y) okvirju in hitrostjo deformacije v (x',y') koordinatnem sistemu. Slika 10 prikazuje deformacije tristraničnih polovic kockastega delca tekočine ABD an ACD med časom t in $t+dt$.



Slika 10. Deformacije dveh tristraničnih delcev s slike 8.

Normalne napetosti

Deformacije a , b , c in d na sliki 10 so povezane z naraščajočim LINEARNIMI deformacijami $d\varepsilon$ in KOTNIMI deformacijami $d\gamma$ v (x,y) koordinatnem sistemu z



$$\begin{aligned}d\varepsilon_x &= \frac{c}{h} \\d\varepsilon_y &= \frac{a}{h} \\d\gamma_{xy} &= \frac{b+d}{h}\end{aligned}\quad (27)$$

Slika 10. Deformacije dveh tristraničnih delcev s slike 8.

V enačbi (27) je $d\varepsilon_x$ linearna deformacija (narasla dolžina deljena s prvotno dolžino) delca v x -smeri in $d\varepsilon_y$ njegova linearna deformacija v y -smeri. Linearna deformacija v x' -smeri je lahko izračunana iz ulomka raztezka diagonale AC , ki je orientirana v x' -smeri.

Normalne napetosti

Če upoštevamo, da je ACD v času t pravokotni trikotnik, z diagonalo AC je $h\cdot\sqrt{2}$, in da so deformacije med časom t in $t+dt$ neskončno majne, dobimo

$$d\varepsilon_{x'} = \frac{d(AC)}{(AC)} = \frac{\frac{a+d}{\sqrt{2}} + \frac{b+c}{\sqrt{2}}}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{h} + \frac{a}{h} + \frac{b+d}{h} \right) = \frac{1}{2} (d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\gamma_{xy}) \quad (28)$$

Linearne deformacije v y' -smeri dobimo podobno iz ulomka skrčenja diagonale BD trikotnega delca ABD

$$d\varepsilon_{y'} = \frac{d(BD)}{(BD)} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{d}{\sqrt{2}}}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (d\varepsilon_x + d\varepsilon_y - d\gamma_{xy}) \quad (29)$$

Enačbo (29) odštejemo od enačbe (28) in dobimo zvezo, ki pove, da je razlika linearnih deformacij v x' -smeri in y' -smeri enaka strižni (kotni) deformaciji v ravnini (x,y)

$$d\varepsilon_{x'} - d\varepsilon_{y'} = d\gamma_{xy} \quad (30)$$

Normalne napetosti

Diferenciali v enačbi (30) se nanašajo na spremembe, ki sledijo delcu tekočine. **Hitrosti deformacij**, ki sledijo delcu tekočine, so torej v naslednji zvezi

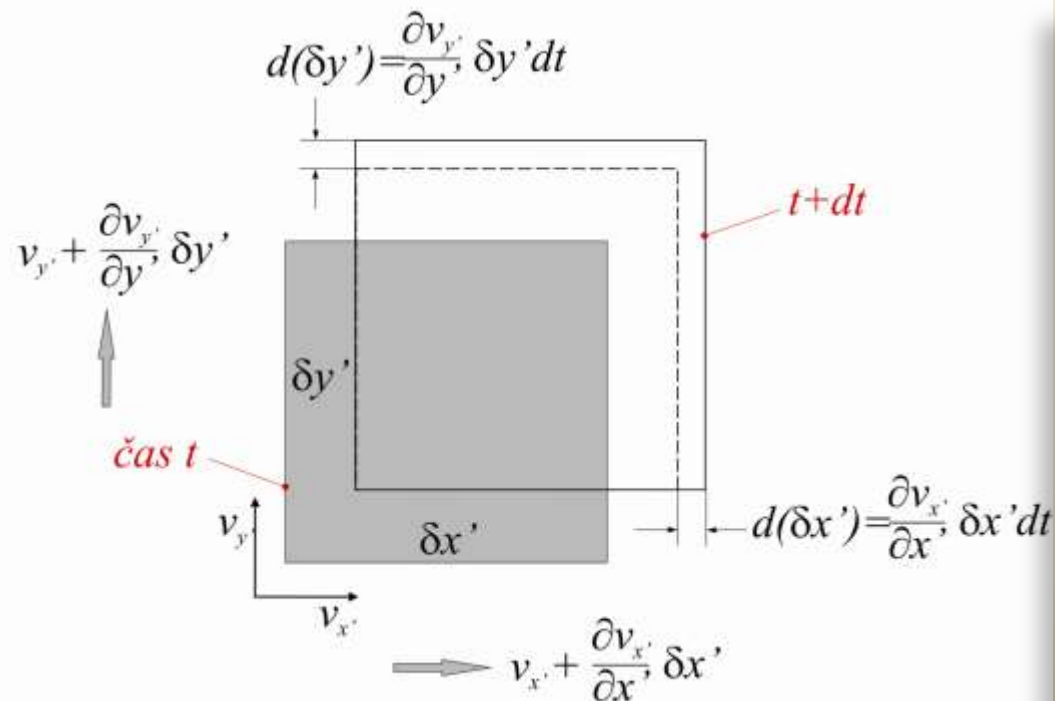
$$\frac{D\varepsilon_{x'}}{Dt} - \frac{D\varepsilon_{y'}}{Dt} = \frac{D\gamma_{xy}}{Dt} \quad (31)$$

Če sedaj odstranimo sklicevanje na (x,y) okvir z upoštevanjem enačbe (26), dobimo

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} = 2\mu \left(\frac{D\varepsilon_{x'}}{Dt} - \frac{D\varepsilon_{y'}}{Dt} \right) \quad (32)$$

Normalne napetosti

Opredelimo sedaj še *hitrosti linearne deformacije*, ki nastopajo v oklepaju prejšnje enačbe (en. 32) in jih zapišimo v obliki *hitrostnih gradientov*, kot so poenostavljeno shematsko prikazani na sliki 11.



Slika 11. Linearna deformacija delca tekočine v x', y' smeri.

Med časom t in $t+dt$, je linearna deformacija na strani delca tekočine, vzporedni z x' -osjo, enaka:

$$d\varepsilon_{x'} = \frac{\frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} \delta x' dt}{\delta x'} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} dt$$

tako, da velja

$$\frac{D\varepsilon_{x'}}{Dt} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} \quad (33)$$

Normalne napetosti

Podobno enačbo lahko izpeljemo za *hitrost linearne deformacije* v y' -smeri. Z upoštevanjem teh zvez in enačbe (32), dobimo:

$$\tau_{x'x'} - \tau_{y'y'} = 2\mu \left(\frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} \right) \quad (34)$$

Če bi opazovali delec tekočine v (x',z') ravnini, bi po enakem postopku dobili naslednjo zvezo:

$$\tau_{x'x'} - \tau_{z'z'} = 2\mu \left(\frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} - \frac{\partial v_{z'}}{\partial z'} \right) \quad (35)$$

Vsota zgornjih enačb (en. 34 in 35) nam daje:

$$\tau_{x'x'} = \frac{\tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'}}{3} + 2\mu \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial v_{z'}}{\partial z'} \right) \quad (36)$$

Normalne napetosti

Ker smo koordinatni sistem (x',y') izbrali naključno, mora prejšnja zveza (en. 36), veljati za katerikoli koordinatni sistem. Torej lahko končno zapišemo:

$$\tau_{xx} = -p_m + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \quad (37)$$

kjer je količina

$$p_m = -\frac{(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})}{3} = -\frac{\tau_{ii}}{3} \quad (38)$$

“mehanski” tlak, ki ga moramo ločiti od “termodinamskega” tlaka.

Mehanski tlak je negativna povprečna vrednost treh *diagonalnih komponent tenzorja napetosti* in služi kot merilo lokalne normalne napetosti pri stiskanju oz. zgoščevanju viskoznih tokov, kjer ta napetost ni enaka v vseh smereh. **Mehanski tlak** je definirana *fizikalna količina* in je pravi *skalar* (sled tenzorja ostaja nespremenljiva od koordinatnih transformacij).

Normalne napetosti

Čeprav je p_m po definiciji opredeljen z normalnimi napetostmi na površine, ki kažejo v x, y in z -smer, se da pokazati, da je p_m dejansko enak *povprečni kompresijski napetosti na sferično površino*, centrirano okoli točke opazovanja, ko gre v limiti radij te sfere proti nič.

Izraze, podobne en. (36) oz. (37) dobimo tudi za τ_{yy} in τ_{zz} , le da je $\partial v_x / \partial x$ zamenjan z $\partial v_y / \partial y$ oz. $\partial v_z / \partial z$. Iz teh izrazov in en. (22) za nediagonalne komponente tenzorja napetosti je razvidno, da lahko vsako od komponent tenzorja napetosti predstavimo z naslednjo enačbo:

$$\tau_{ij} = -\left(p_m + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) \quad (39)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{če } i = j \\ &= 0 \quad \text{če } i \neq j \end{aligned}$$

Kronecker delta (simbol je vpeljal Leopold Kronecker (1823-1891)).

Splošna oblika tenzorja napetosti

Mehanizem, pri katerem prihaja do napetosti zaradi delovanja enega območja tekočine na drugega, se dejansko vrši na **molekularnem nivoju**. Posamezna molekula tekočine se med potovanjem v glavni smeri toka tekočine *naključno termično giba* in "poskakuje" z drugimi molekulami, ki sledijo toku.

- **Normalna napetost** na površino tako nastane kot posledica *prenosa povprečne gibalne količine molekul tekočine ob njihovem naključnem termičnem gibanju, ko molekule trčijo na površino in se odbijejo*. Normalna napetost je zato prisotna, oz. se vrši, tudi v primeru statične, nedeformirane tekočine.
- **Strižna napetost** na površino nastane, ko se pojavi hitrostni gradient v prečni smeri glede na tok tekočine. Molekule, ki se premikajo s povprečnim termičnim gibanjem v prečni smeri na smer toka z *območja z višjo srednjo hitrostjo proti področju z nižjo srednjo hitrostjo*, nosijo s sabo več *gibalne količine* kot tiste, ki se premikajo v nasprotni smeri. *Ta celokupni prenos molekularne gibalne količine se odraža kot strižna napetost na makroskopskem nivoju s katerega opazujemo tekočino.*
- *Molekularna teorija koeficienta strižne viskoznosti se močno razlikuje za pline in kapljevine.*

Splošna oblika tenzorja napetosti

- Molekule plina so redko porazdeljene in porabijo večino svojega časa v prostem letu kot pa v trčenjih med sabo. V tekočinah, po drugi strani, pa se molekule večino svojega časa porabijo za trke s svojimi sosedami zaradi kratkih razdalj.
- STRIŽNA VISKOZNOST je v glavnem funkcija temperature tako za pline kot kapljevine, njena odvisnost od tlaka je relativno majhna. Vendar pa obstaja med plini in kapljevini velika razlika: *viskoznost plinov s temperaturo narašča, medtem ko viskoznost tekočin s temperaturo pada*. Viskoznost zraka, npr., naraste za 20% pri dvigu temperature od 18 do 100 °C. Po drugi strani pa pade viskoznost vode pri istem temperaturnem območju skoraj za faktor 4!

Splošna oblika tenzorja napetosti

- Enačba (39) vsebuje le en empirični koeficient, *strižni* oz. *navadni koeficient viskoznosti* μ . Drugi koeficient se pojavi pri iskanju odgovora na vprašanje, v kakšnem odnosu sta *“termodinamski” tlak*, ki nastopa v enačbi stanja, in *mehanski tlak* p_m .
 - Enačba stanja izraža gostoto tekočine kot funkcijo temperature in tlaka pri *ravnotežnih pogojih*. *“Termodinamski” tlak je torej hipotetični tlak, ki bo obstajal, ko bo statična tekočina v ravnotežju pri lokalni gostoti in temperaturi.*
 - *Ugotovitve statistične termodinamike pa navajajo, da se lahko ta ravnotežni tlak razlikuje od mehanskega tlaka, kadar tekočino sestavljajo kompleksne molekule z notranjim številom prostorskih stopenj in da ta razlika zavisi od hitrosti spreminjanja gostote ali tlaka tekočine s časom.*
 - *Količina, ki zagotavlja najbolj preprosto merjenje hitrosti spremembe gostote je divergenca vektorja hitrosti, $\nabla \cdot \vec{v}$. Le-ta opisuje hitrost spremembe prostornine tekočine na enoto prostornine kot jo vidi opazovalec, ki se giblje s tokom tekočine.*

Splošna oblika tenzorja napetosti

- Zapišimo to preprosto linearno zvezo v duhu z originalnimi Newtonovimi domnevami, čeprav realno ne temelji na močnem eksperimentalnem ozadju:

$$p_m = p - \lambda \nabla \cdot \vec{v} \quad (40)$$

kjer je λ empirični koeficient (slučajno ima enake enote kot strižna (navadna) viskoznost, μ) in se imenuje "ekspanzijska" viskoznost (Angl.: *expansion viscosity*; alternative terms: "*secund coefficient of viscosity*" and "*bulk viscosity*").

- Drugi zakon termodinamike zahteva, da je λ **pozitiven!** Iz tega sledi, da termodinamski tlak teži k višjim vrednostim od mehanskega tlaka, kadar mehanski tlak pada (\rightarrow prostornina narašča, $\nabla \cdot \vec{v} > 0$), in nižjim vrednostim od mehanskega tlaka kadar le-ta narašča (\rightarrow prostornina pada, $\nabla \cdot \vec{v} < 0$).
- Z drugimi besedami, termodinamski tlak ob spremembah ves čas "zaostaja" za mehanskim tlakom, velikost razlike med njima pa zavisi tako od
 - **hitrosti ekspanzije**, $\nabla \cdot \vec{v}$
 - kot tudi od **molekularne sestave tekočine** (ki se odraža v λ).

Splošna oblika tenzorja napetosti

- Če sedaj Newtonski tenzor napetosti zapišemo z upoštevanjem termodinamskega tlaka, dobimo:

$$\tau_{ij} = - \left[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \lambda \right) \nabla \cdot \vec{v} \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) \quad (41)$$

kjer je člen $\nabla \cdot \vec{v}$ povezan z raztezanjem tekočine. Fizikalna interpretacija **divergence vektorja hitrosti** opisuje hitrost spremembe prostornine delca tekočine, kot jo sledi opazovalec, ki "sedi" na delcu, deljeno z trenutno prostornino delca tekočine.

- Dokazano je, da je za razredčene monoatomne pline $\lambda=0$. Za vodo je λ približno 3x večji od viskoznosti μ , za bolj kompleksne tekočine kot npr. benzen pa celo 100x večji.
- Kljub vsemu pa je vpliv člena, ki vsebuje "ekspanzijsko" viskoznosti λ in $\nabla \cdot \vec{v}$ na tok tekočine zelo majhen tudi v primeru **toka stisljivih tekočin**.

Splošna oblika tenzorja napetosti

Za večino tokov, vključno s tokom stisljivih tekočin spremenljive gostote, lahko *tenzor napetosti* aproksimiramo z:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) \quad (42)$$

oziroma:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \tau_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Enačbe (42) in (43) natančno veljajo v limiti *nestisljivih tokov* ($\nabla \cdot \vec{v} \approx 0$).

6. Navier-Stokesova enačba

Navier-Stokesovo enačbo dobimo z vnosom enačbe za opis Newtonovega tenzorja napetosti (41) v splošno gibalno enačbo (20):

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[p + \left(\frac{2}{3} \mu - \lambda \right) \nabla \cdot \vec{v} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] + \rho G_i \quad (44)$$

Za konstantna μ in λ , se zgornja enačba v vektorskem zapisu poenostavi v

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \left(\frac{1}{3} \mu + \lambda \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{G} \quad (45)$$

kjer je simbol *nabla*

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \quad (46)$$

skalarni operator na vektorju \underline{v} , podobno kot je D/Dt na levi strani poznani skalarni operator, prav tako na \underline{v} .

6. Navier-Stokesova enačba

Za tok **nestisljivih tekočin** konstantne viskoznosti velja

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

in z upoštevanjem enačb (44) in (45), dobimo

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho G_i, \quad (47)$$

oz., v vektorskem zapisu

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{G} \quad (48)$$

Kot smo že omenili, sta enačbi (47) (48) zelo dobri aproksimaciji tudi za opis toka stisljivih tekočin.

6. Navier-Stokesova enačba

Zapis enačbe (47) za vse komponente hitrosti v *kartezičnih koordinatah*:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho G_x \quad (49a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho G_y \quad (49b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho G_z \quad (49c)$$

Navier-Stokesovo enačbo gibanja tekočin je izpeljal **Claude Louis Marie Navier** leta 1827 in neodvisno tudi **Simeon Denis Poisson** leta 1831. Njuna utemeljitev tenzorja napetosti je slonela na molekularnem vidiku opisa napetosti zaradi medsebojnega delovanja delcev tekočine. Kasneje sta **Barre de Saint Venent** (1843) in **George Gabriel Stokes** (1845) izpeljala enačbo na osnovi opredelitve odnosa linearne napetosti in hitrosti deformacije.

A. Navier-Stokesova enačba in kontinuitetna enačba

A1. Kartezične koordinate

Navier-Stokesove enačbe - *ohranitev gibalne količine*

- tok nestisljive Newtonske tekočine

vztrajnost *hitrost gibalne količine*
(na enoto prostornine)

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\vec{v} \nabla \cdot \vec{v}} \right) = -\nabla p + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{v}} + \rho \vec{G} \quad (\text{kg/m}^2 \text{ s}^2)$$

nestacionarno pospeševanje *konvektivno pospeševanje* *tlačni gradient* *viskoznost* *prostorninske sile (na enoto prost.)*

Kontinuitetna enačba - *ohranitev mase*

- splošna oblika

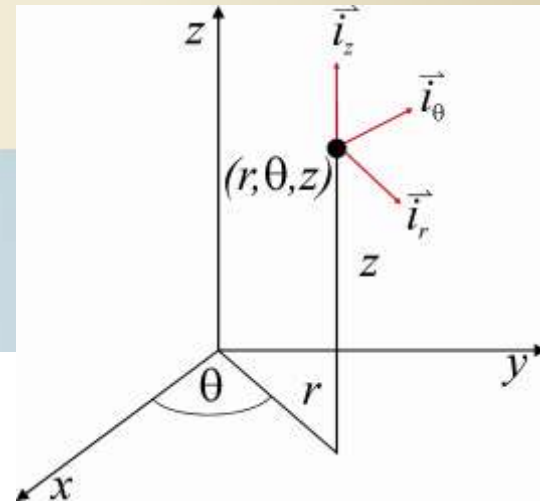
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (A1)$$

A. Navier-Stokesova enačba in kontinuitetna enačba

A2. Cilindrične koordinate

Navier-Stokesove enačbe

- tok nestisljive Newtonske tekočine



$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \rho G_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) =$$
$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho G_\theta$$

A. Navier-Stokesova enačba in kontinuitetna enačba

A2. Cilindrične koordinate

Navier-Stokesove enačbe

- tok nestisljive Newtonske tekočine

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho G_z$$

Kontinuitetna enačba

- splošna oblika

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

A. Navier-Stokesova enačba in kontinuitetna enačba

A2. Cilindrične koordinate

**Komponente
tenzorja napetosti:**

$$\tau_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\tau_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$