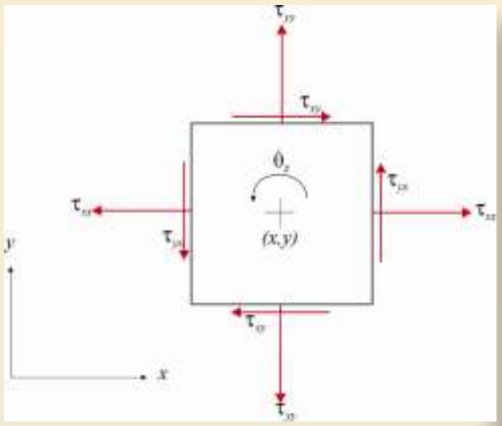
3. Simetrija tenzorja napetosti

Naslednja informacija, ki izhaja iz Newtonovega zakona za gibanje neskončno majhnega delca tekočine je ta, da je TENZOR NAPETOSTI v večini primerov ***SIMETRIČEN*** oz., $\boldsymbol{\tau}_{ij} = \boldsymbol{\tau}_{ji}$ *za* $i \neq j$.



Slika 5. Ilustracija vzroka za simetrijo tenzorja napetosti.

Kot dokaz za to trditev bomo v nadaljevanju obravnavali majhen delec tekočine v točki x, y, z, ki se ***vrti okoli svoje z-osi***. Naj ima delec obliko majhne kocke z neskončno majhnimi stranicami δx, δy in δz (slika 5). Glede na to, da bomo izvedli limito, kjer δx, δy in $\delta z \to 0$, in na ta način delec tekočine skrčili v točko, lahko mirno predpostavimo, da so vrednosti gostote, hitrosti, komponent tenzorja napetosti, itd. praktično uniformne po celotni kocki.

Še več, če naša kockica rotira neskončno počasi, se obnaša skoraj kot trdno telo (s praktično ničnim kotnim zamikom). Namreč, v limiti, δx, δy in $\delta z \to 0$, bo končni kotni zamik zahteval neskončni strig v viskozni tekočini.

3. Simetrija tenzorja napetosti

Če ima kocka kotno hitrost $\dot{\theta}_z$ v z smeri in kot smo omenili, rotira kot trdno telo, lahko na osnovi II. Newtonovega zakona, prirejenega za opis rotacijskega gibanja, povečanje njene kotne hitrosti v danem trenutku opišemo z naslednjo zvezo med **navorom** in **kotnim pospeškom**:

$$I_z \frac{d\dot{\theta}_z}{dt} = T_z \tag{12}$$

kjer je T_z celokupni ***navor***, ki deluje na kocko relativno glede na os, ki teče skozi center kocke in je vzporedna z z-osjo, in I_z

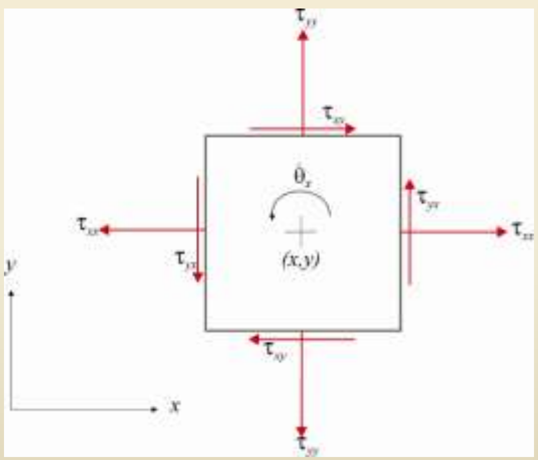
$$I_z = \int_{-\delta x/2}^{+\delta x/2} \int_{-\delta y/2}^{+\delta y/2} \int_{-\delta z/2}^{+\delta z/2} \rho\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right) d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z} = \frac{\rho\left[(\delta x)^2 + (\delta y)^2\right]}{12} \delta x\, \delta y\, \delta z \tag{13}$$

je ***vztrajnostni moment*** kocke. Enačba (13) je izpeljana z upoštevanjem zapisa kotne hitrosti kot $v_\theta = \dot{\theta}(t) r$, kjer je $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$. $\bar{x}$ in $\bar{y}$ sta kartezični koordinati, fiksirani na rotirajočo kocko.

3. Simetrija tenzorja napetosti

Navor v enačbi (*12*) je dobljen z upoštevanjem napetosti, ki se vršijo na kocko (slika 5.).

- Na primer, na stranici z $\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{i}}$ je po definiciji napetost τ_{xx} v pozitivni x-smeri in napetost τ_{yx} v pozitivni y-smeri. Na stranici z $\underline{\boldsymbol{n}} = -\underline{\boldsymbol{i}}$ imajo pripadajoče napetosti enake velikosti, toda nasprotne smeri (glej *(10)* ali *(4)*).



Slika 5. Ilustracija vzroka za simetrijo tenzorja napetosti.

Celokupni navor okoli osi, ki gre skozi center kocke in je paralelna z z-osjo, *povzročajo*

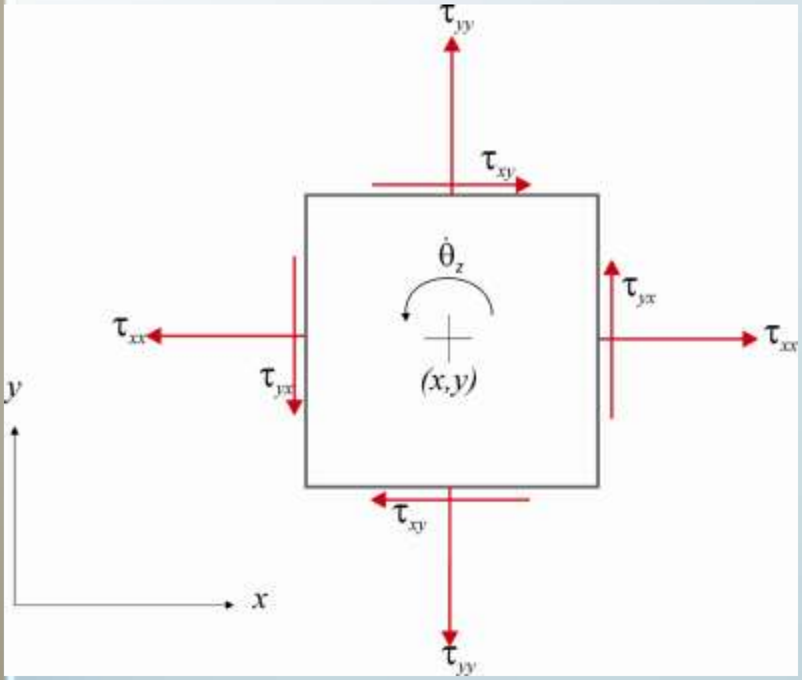
- ***strižne sile*** (tlačne sile delujejo skozi center kocke) in
- ***volumetrični navor*** kot posledica delovanja zunanjih prostorninskih sil.

Gravitacijsko polje, kot primer takšnega polja zunanjih prostorninskih sil, deluje na maso kocke preko njenega centra in seveda ne povzroča nobenega navora okoli te točke. *Volumetrični navor lahko obstaja npr. v magnetnih tekočinah.*

3. Simetrija tenzorja napetosti

Zaradi splošnosti predpostavimo, da polje zunanjih prostorninskih sil lahko povzroči **navor $\underline{t}$ na enoto prostornine** pri poziciji masnega delca tekočine.

- *CELOKUPNI NAVOR v z smeri okoli centra kocke bo potem:*



Slika 5. Ilustracija vzroka za simetrijo tenzorja napetosti.

$$T_z = 2\frac{\delta x}{2}\tau_{yx}\delta y\delta z - 2\frac{\delta y}{2}\tau_{xy}\delta x\delta z + $$
$$+ t_z \delta x\delta y\delta z =$$
$$= \left(\tau_{yx} - \tau_{xy} + t_z\right)\delta x\delta y\delta z \qquad (14)$$

Iz enačb (12) in (14) sledi

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} + t_z = \frac{\rho}{12}\frac{d\dot{\theta}_z}{dt}\left[(\delta x)^2 + (\delta y)^2\right] \qquad (15)$$

Ko se približujemo *točki tekočine*, $\delta x, \delta y \to 0$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} - t_z$$

3. Simetrija tenzorja napetosti

Splošen zapis enačbe

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} - \mathrm{t}_z$$

daje naslednjo zvezo *ne*-diagonalnih komponent tenzorja napetosti

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} + \mathrm{t}_z \qquad (16)$$

$$\begin{matrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{matrix}$$

kjer *i, j, k* tvorijo desno sučno trojico (npr., v pravokotnem koordinatnem sistemu si koordinate sledijo v redu *x,y,z* ali *y,z,x* oz. *z,x,y*).

Omenili smo, da se volumetrični navor lahko pojavi v magnetnih tekočinah in ga lahko zato v našem primeru zanemarimo. Torej nam enačba (16) potrjuje *SIMETRIČNOST ne-diagonalnih komponent tenzorja napetosti*,

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} \quad (i \neq j) \qquad (17)$$

Z drugimi besedami, tri od devetih komponent tenzorja napetosti lahko izpeljemo iz preostalih komponent oz. **tenzor napetosti ima le šest neodvisnih komponent**.

4. Enačba gibanja izražena s tenzorjem napetosti

Splošno ***enačbo gibanja v diferencialni obliki*** lahko izpeljemo z uporabo Newtonovega zakona za majhen delec tekočine končne velikosti.

- Zamislimo si zopet takšen delec tekočine, ki ima v času t obliko kocke, centrirane okoli točke (x,y,z), s stranicami δx, δy in δz, paralelnimi z osmi x, y in z.
- Čeprav so stranice kocke majhne, vendarle niso enake nič. To pomeni, da se bodo tudi vrednosti tistih komponent tenzorja napetosti na *površini kocke*, **rahlo razlikovale** od tistih komponent pri *centru kocke*. Na primer, če so komponente tenzorja napetosti τ_{ij} določene v (x,y,z), torej v centru kocke, bodo njihove vrednosti na stranici, katere *izhodiščna normala* kaže v pozitivni x-smeri

$$\tau_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

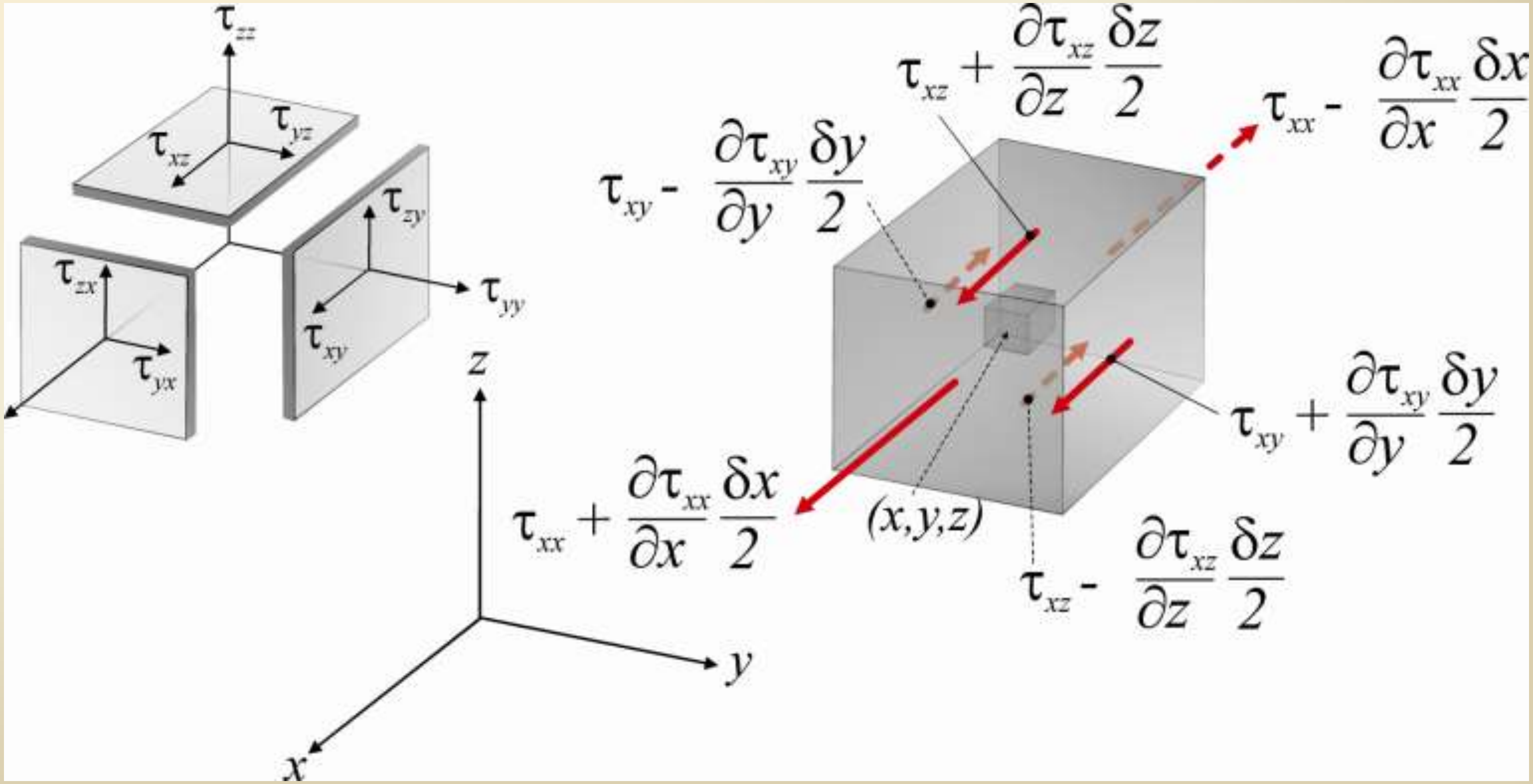
in

$$\tau_{ij} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

na njej nasprotni stranici.

4. Enačba gibanja izražena s tenzorjem napetosti

Slika 6. kaže vse te napetosti, ki delujejo na kocko v *x*-smeri, izražene kot tenzor napetosti. Puščice kažejo smeri napetosti za pozitivne vrednosti (glej enačbo 10).



Slika 6. Napetosti, ki delujejo na delec tekočine v x-smeri.

4. Enačba gibanja izražena s tenzorjem napetosti

Celokupna ***x*-komponenta sile**, ki deluje na kocko, je dobljena z množenjem napetosti s površinami na ketere delujejo in seštevkom:

$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \qquad (18)$$

Ker je $\delta x\delta y\delta z$ prostornina delca tekočine, lahko količino v oklepaju enačbe (18) prepoznamo kot **celokupno *x*-komponento površinske sile na enoto prostornine v točki tekočine**. Izraza za y in z komponento sta podobna, le da je prvi indeks x zamenjan z y oz. z.

Sedaj lahko direktno zapišemo ENAČBO GIBANJA ZA KUBIČNI DELEC TEKOČINE na sliki 6. ***x*-komponenta enačbe** trdi, da je produkt mase in pospeška enak celokupni površinski sili plus prostorninski sili, ki delujeta na delec tekočine:

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{Dv_x}{Dt}=\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z+\rho\delta x\delta y\delta z G_x$$

4. Enačba gibanja izražena s tenzorjem napetosti

V prejšnji enačbi D/Dt predstavlja substančni (materialen časovni odvod) kot smo ga definirali že prej in G_x je x-komponenta zunanje prostorninske sile na enoto mase. Sledi preprosto:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho G_x \qquad (20a)$$

Podobno lahko izpeljemo enačbi y in z komponento

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \rho G_y \qquad (20b)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho G_z \qquad (20c)$$

4. Enačba gibanja izražena s tenzorjem napetosti

... oz. bolj zgoščeno

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial j} + \rho G_i \qquad (20)$$

kjer je upoštevano sumiranje po $j = x, y$ in z.

- Enačba (20) je splošno uporabljiva za VSAKO kontinuirno porazdeljeno snov, bodisi tekočino ali trdno snov in temelji le na *hipotezi kontinuuma*!
- Vendarle, enačba (20) kot je zapisana, še ni dokončna. Da jo izpeljemo do konca, moramo še podrobno opisati oz. specificirati komponente tenzorja napetosti kot tudi komponente prostorninske sile. Opredelitev prostorninske sile je preprosta – v gravitacijskem polju npr., je sila $\underline{G}$ na enoto mase dobro poznana in ima enako obliko za vse snovi.
- Oblika zapisa tenzorja napetosti pa je različne vrste materiala različna.

5. Tenzor napetosti za Newtonijske tekočine

Ostaja nam še zadnja naloga, kako opredeliti zvezo med ***komponentami tenzorja napetosti*** in ***tokom oz. poljem deformacij***.

- Najbolj preprost model izhaja iz kontinuuma elastičnih trdnih snovi, kjer so napetosti in deformacije linearno odvisne!

- Po drugi strani pa lahko tudi za preproste tekočine definiramo njeno lastnost in sicer to, da se še naprej deformira, vse dokler se na tekočino vrši strižna napetost neglede na to, kako majhna je.

  Očitno je, da ne obstaja enkratna zveza med strižno napetostjo in strižno deformacijo, če lahko deformacija pri konstantnem strigu neomejeno narašča.

- Pokazalo se je, da se tekočina poskuša upirati hitrosti deformacije: ***večja kot je strižna napetost, večja je hitrost strižne deformacije.***

- V mnogih tekočinah velja pri normalnih pogojih, da je ***zveza med napetostjo in hitrostjo deformacije v delcu tekočine*** **linearna.**

5. Tenzor napetosti za Newtonijske tekočine

Newtonov model odziva tekočine na strižno napetost sloni na treh predpostavkah:

a) ***Strižna napetost v delcu tekočine je proporcionalna hitrosti strižne deformacije;***

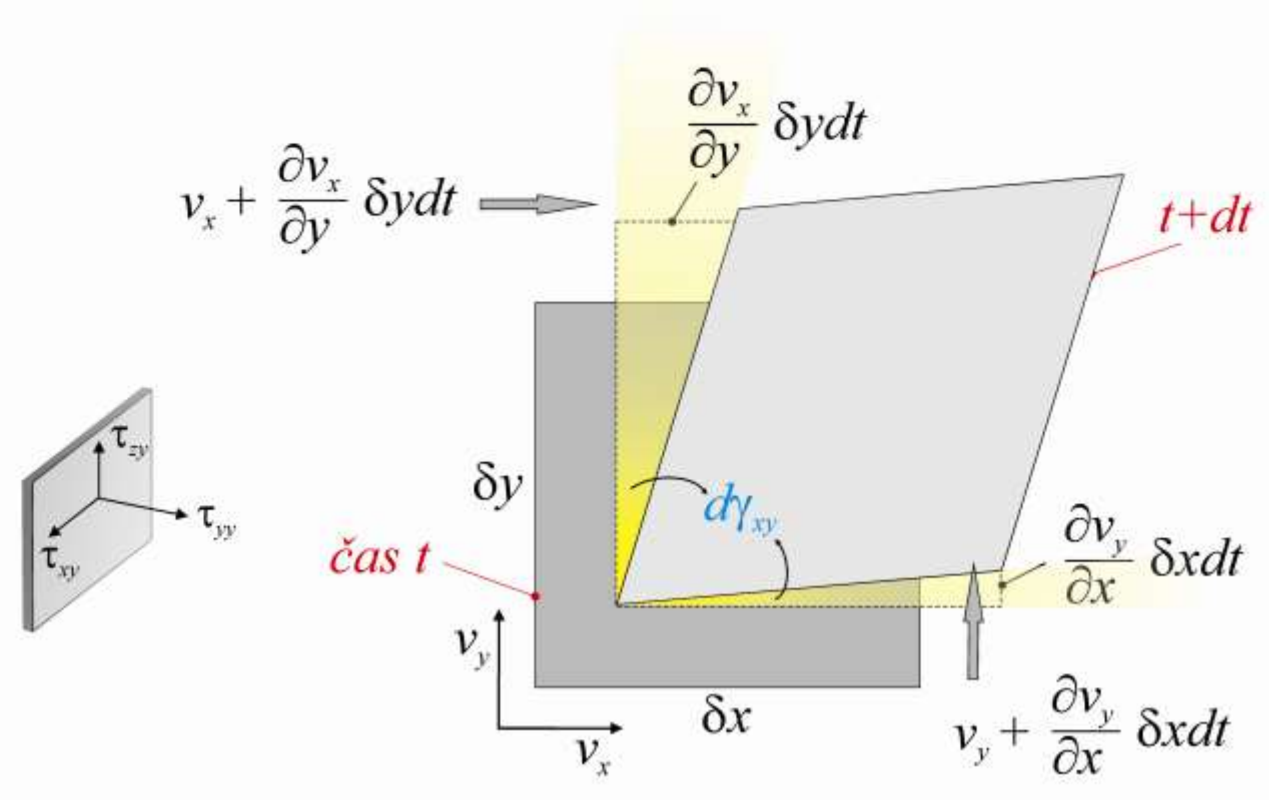
b) ***Strižna napetost je enaka nič, kadar je hitrosti strižne deformacije enaka nič;***

c) ***Zveza med napetostjo in hitrostjo deformacije je IZOTROPNA – se pravi, ne obstaja prioritetna orientacija v tekočini.***

Newtonova tekočina je najbolj proprost tip viskozne tokočine, tako kot to velja za elastično trdno telo (kjer so napetosti proporcionalne deformacijam).

Strižna napetost in viskoznost

Da bomo lahko izpolnili Newtonove predpostavke, obravnavajmo najprej tipično strižno komponento tenzorja napetosti τ_{xy}. Slika 7. opisuje deformacijo delca tekočine med gibanjem od časa t do $t+dt$.



Slika 7. Strižne deformacije v delcu tekočine.

Strižna napetost in viskoznost

V tem časovnem intervalu je strižna napetost v delcu tekočine povzročila strižno (kotno) deformacijo $d\gamma_{xy}$

$$d\gamma_{xy} = \frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y dt\right)}{\delta y} + \frac{\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\delta x dt\right)}{\delta x}$$

Hitrost strižne (kotne) deformacije v delcu tekočine kot jo vidi opazovalec, ki sedi na delcu tekočine je potemtakem

$$\frac{D\gamma_{xy}}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \qquad (21)$$

Strižna napetost in viskoznost

Newtonovi predpostavki ***a)*** in ***b)*** potemtakem zahtevata, da

$$\tau_{xy} = \mu \frac{D\gamma_{xy}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad (22a)$$

kjer koeficient proporcionalnosti μ imenujemo koeficient viskoznosti, ki je lastnost tekočine. Podobno

$$\tau_{xz} = \mu \frac{D\gamma_{xz}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad (22b)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{D\gamma_{yz}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \qquad (22c)$$

Strižna napetost in viskoznost

Splošno lahko enačbe 22a,b in c zapišemo

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i}\right) \qquad (i \neq j) \qquad (22)$$

Koeficient proporcionalnosti μ je enak v vseh primerih, saj je Newtonova tekočina izotropna.