

MATEMATIČNO MODELIRANJE

Osnove



Zakaj modelirati?

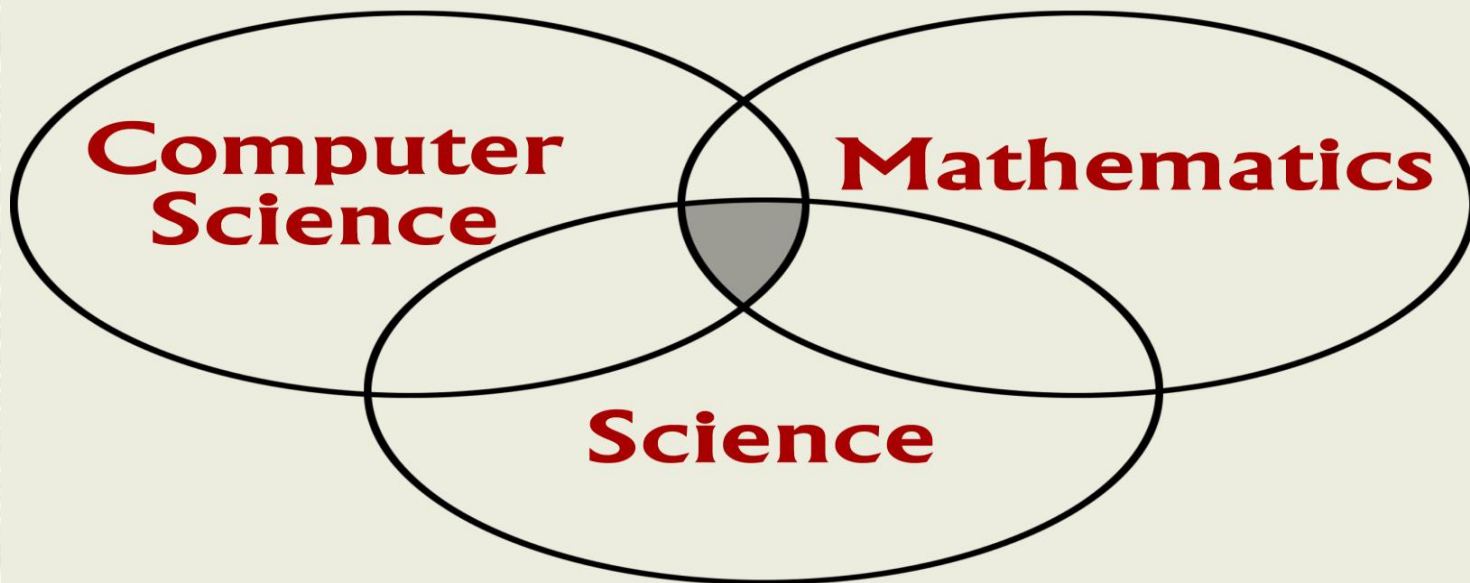
- # Osnovni in kvantitativni način za razumevanje in vrednotenje zahtevnih sistemov in pojavov
 - # Dopolnilo k teoriji in meritvam, saj ju pogosto vsebuje
 - # Postaja vseprisotno v: Computational Physics, kemiji, mehaniki, materialih, ..., biologiji
-

Kaj so rezultati modelnih raziskav?

- # Prepoznavanje široke uporabnosti modeliranja
 - # Neposredna izkušnja s simulacijskimi metodami
 - # Razvoj sposobnosti dvogovora pri delu z za to usposobljenimi posamezniki
-

Matematično modeliranje?

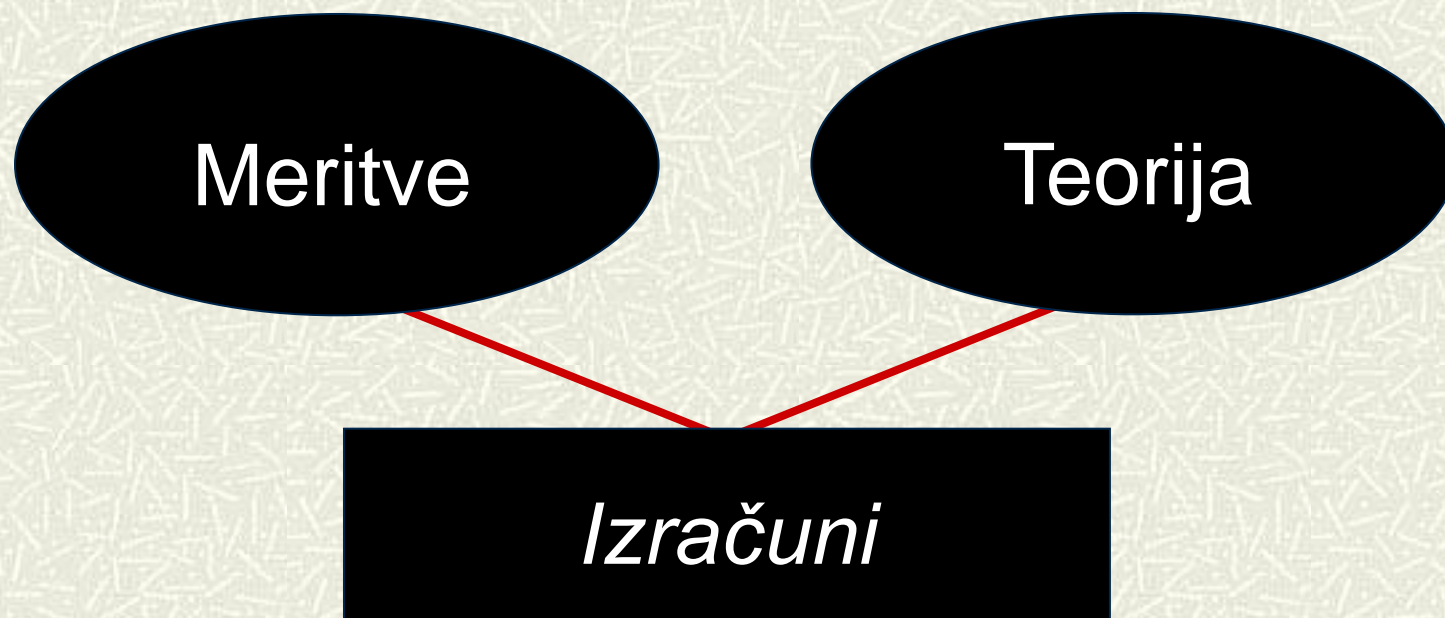
Matematično modeliranje stremi k pridobivanju razumevanja znanosting preko uporabe matematičnih modelov z uporabo osebnih računalnikov.



Matematično modeliranje vključuje skupinsko delo

Matematično modeliranje

Dopolnjuje, a ne zamenjuje teorije in meritev pri znanstvenih raziskavah.



Matematično modeliranje

- # Se pogosto uporablja namesto meritev, če so le-te *preobsežne, predrage, prenevarna* ali *dolgotrajne*.
 - # Je lahko uporabno v „kaj bi se zgodilo“ raziskavah, npr. za preiskave uporabe patogenov (virusi in bakterije) za nadzor nad populacijo mrčesa.
 - # Je sodobno orodje za *znanstvene preiskave*.
-

Matematično modeliranje

Se je pojavilo kot močno neobhodno orodje pri raziskavah številnih problemov v znanstvenih preiskavah in razvoju ter proizvodnji procesov in produktov.

- Seizmologija
- Modeliranje podnebja
- Ekonomija
- Okolje
- Raziskave materialov
- Načrtovanje zdravil
- Proizvodnja
- Medicina
- Biologija

Vrednoti - Napovej

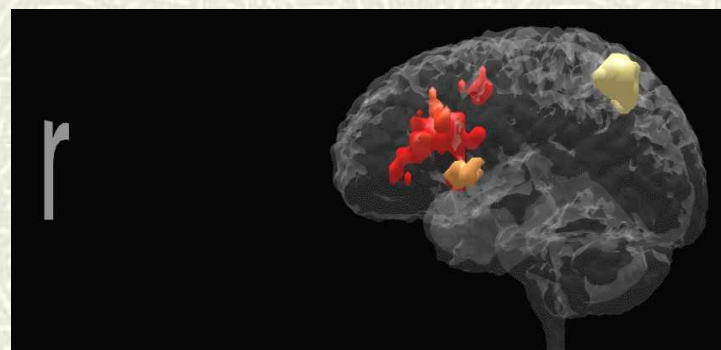
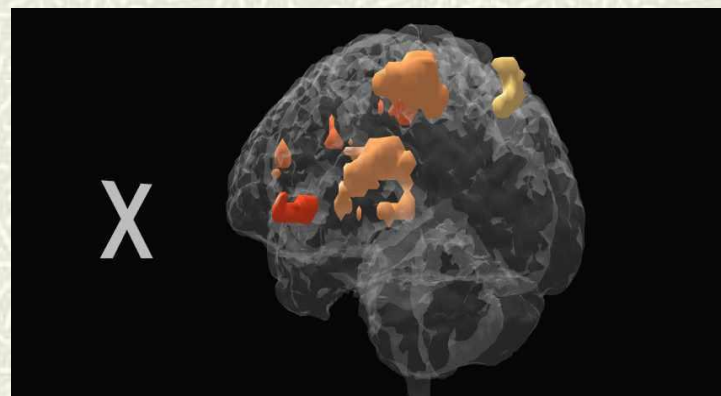
Primer: Industrija ➔



- ✦ Prvo potniško letalo, ki je bilo digitalno načrtovano, „sestavljeno“ na računalniku, s čimer je bila odpravljena potreba po dragem fizičnem modelu v polni velikosti.
- ✦ Računsko modeliranje je izboljšalo kakovost dela in zmanjšalo spremembe, napake ter ponovitve.

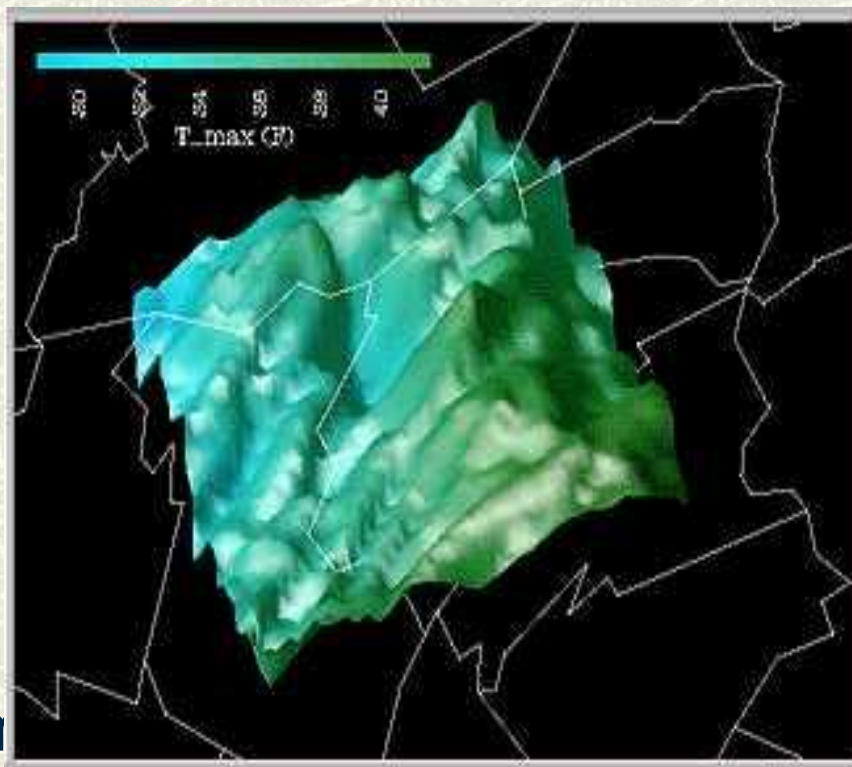
Primer: Zemljevidi človeških možganov

- # Možganska področja, ki se aktivirajo, ko oseba pomisli na črki x in r.
- # Tehnologija prikaza magnetne resonance (NMR) v realnem času bo kmalu vključena v posebne komponente, ki bodo povezane z NMR instrumenti, kar do omogočilo uporabo NMR pri preizkušanju zdravil, psihiatriji in načrtovanju nevrokirurgije.

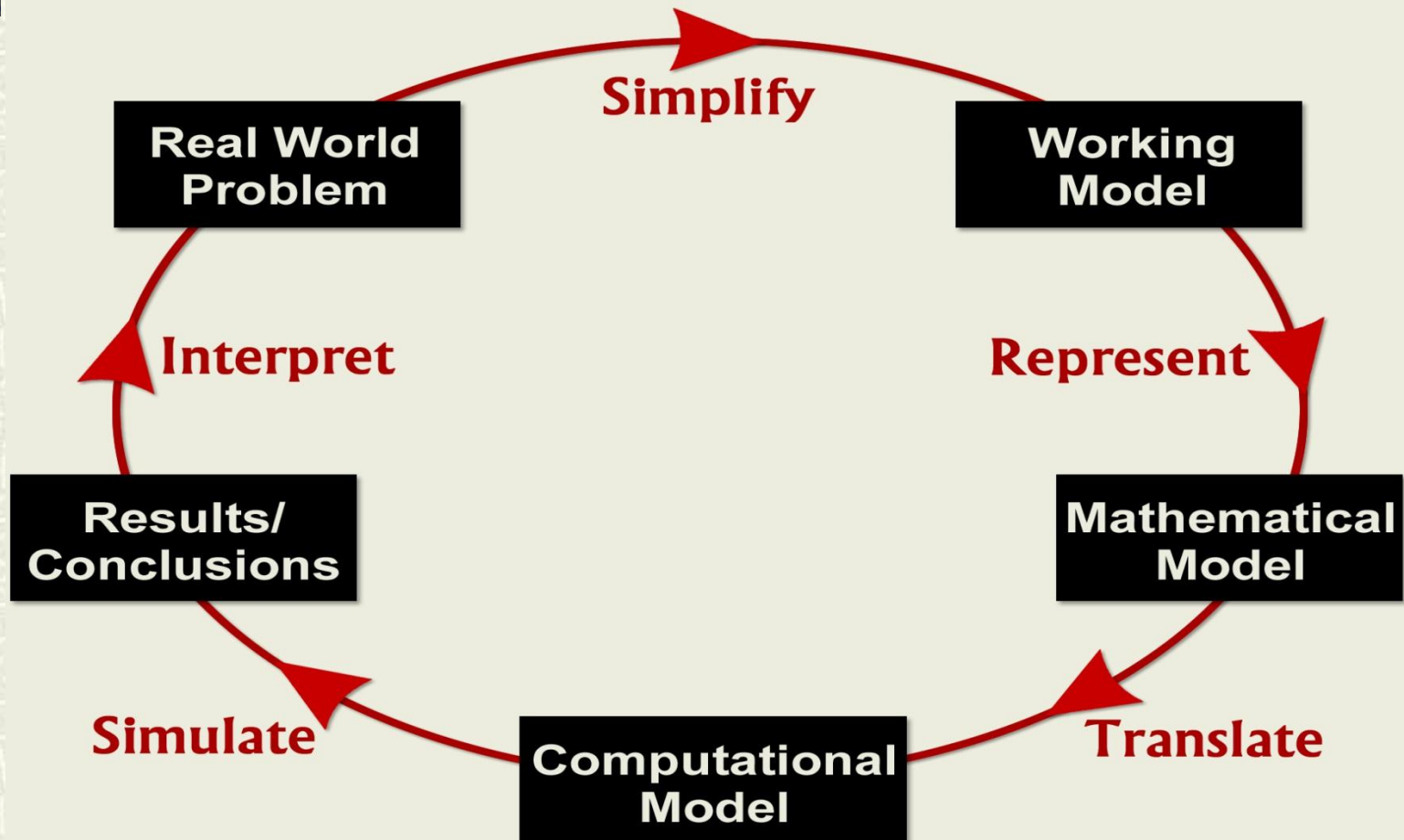


Primer: Modeliranje podnebja

- # 3D osenčena površina, ki predstavlja del zemeljske površine, barva pa prikazuje najvišje dnevne temperature.
- # Prikaz več nizov podatkovnih na enkrat zagotavlja uporabnikom hiter vpogled v in vrednotenje njihovih rezultatov.



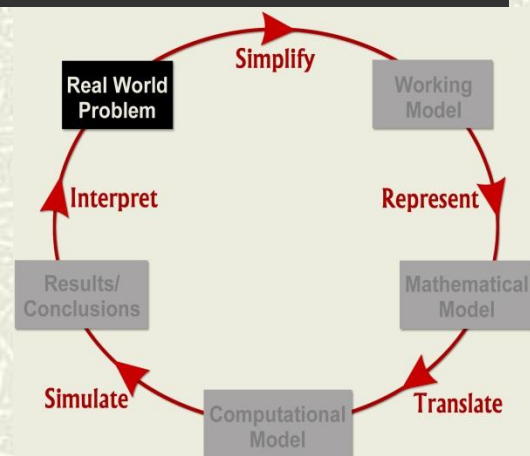
Postopek matematičnega modeliranja



Dejanski primer

Pooščemo *Dejanski primer*:

- Izvedemo raziskave ozadja, osredotočimo se na primer, ki ni preobsežen.
- Izvedemo preiskave (laboratorij), če so na mestu.
- Naučimo se uporabe računskega orodja: Matlab, Mathematica, Excel, Java.



Razumi trenutno delovanje in napovej prihodnje obnašanje.

Primer: Padajoči kamen

Določimo gibanje kamna, ki ga spustimo z višine H nad tlemi z začetno hitrostjo V .

Diskretni model: Poiščimo položaj in hitrost kamna nad tlemi pri enakih časovnih razkorakih, t_0, t_1, t_2, \dots ; npr. $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, itd.



Delujoč model

Poenostavi → *Delujoč model*:

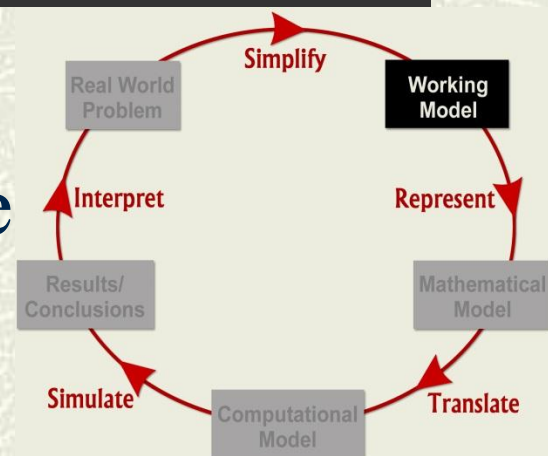
Določimo in izberemo dejavnike

Za popis pomembnih vidikov

Dejanskega primera; določimo

tiste dejavnike, ki jih lahko zanemarimo.

- Navedemo poenostavitvene predpostavke.
- Določimo vplivne mehanizme, fizikalne zakone.
- Določimo spremenljivke modela in soodvisnosti.

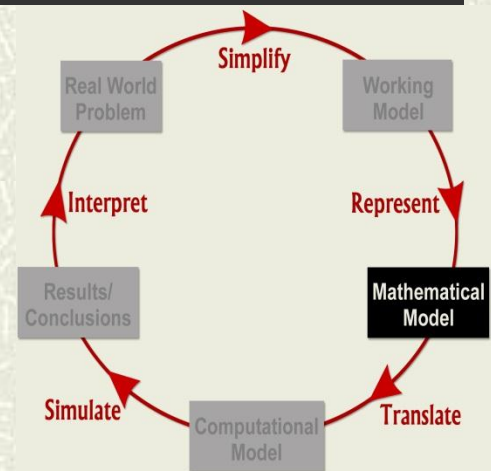


Primer: Padajoči kamen

- # Vplivni mehanizmi: $\mathbf{d} = \mathbf{v} * t$ in $\mathbf{v} = \mathbf{a} * t$.
 - # Poenostavitvene predpostavke:
 - Težnost je edina sila, ki deluje na telo.
 - Ploska zemlja.
 - Ni striga (zračni upor).
 - Modelne spremenljivke so $H, V, g; t, x,$ in v
 - Položaj kamna in hitrost nad tlemi bosta modelirana pri diskretnih časih (t_0, t_1, t_2, \dots) dokler kamen ne pade na tla.
-

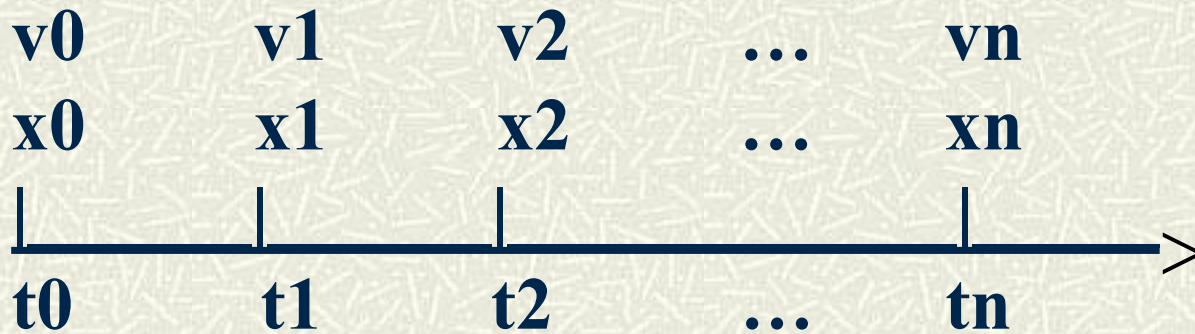
Matematični model

Predstavimo → Matematični model: Izrazimo Delujoč model na matematični način; zapišemo matematične enačbe, katerih rešitev opiše Delujoč model.



V splošnem uspeh matematičnega modela zavisi od enostavnosti njegove uporabe in natančnosti njegovih napovedi.

Primer: Padajoči kamen



$$t_0 = 0; \quad x_0 = H; \quad v_0 = V$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

$$x_1 = x_0 - (v_0 * \Delta t)$$

$$x_2 = x_1 - (v_1 * \Delta t)$$

$$v_1 = v_0 + (g * \Delta t)$$

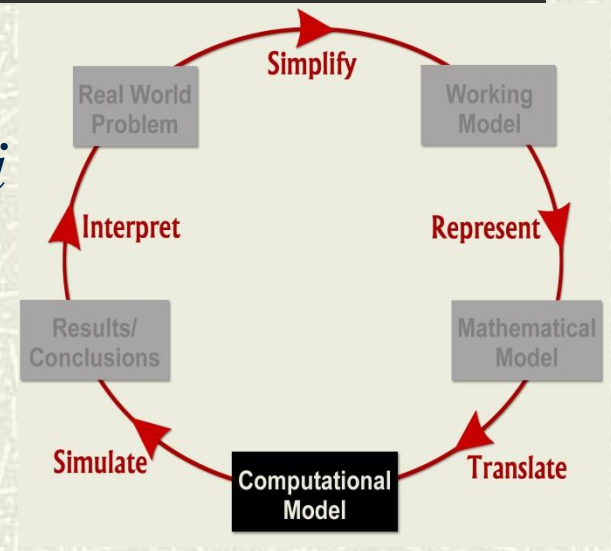
$$v_2 = v_1 + (g * \Delta t)$$

\dots

Računski model

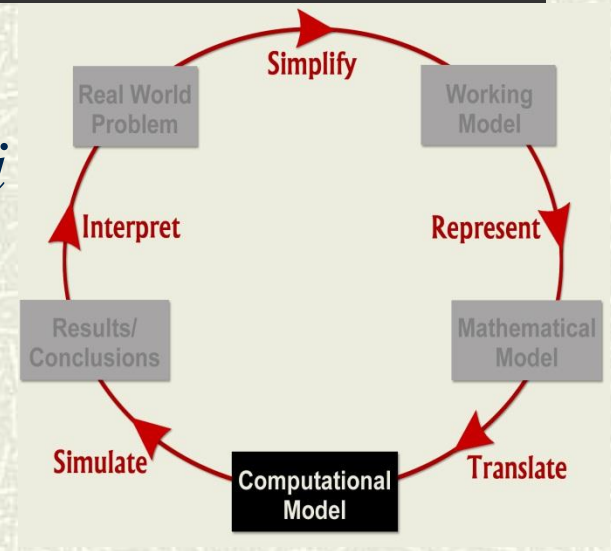
Prestavimo → *Računski model*: Spremenimo *Matematični model* v ustrezno obliko izračun rešitve.

- # Obstoje enoznačne rešitve
- # Izbira numeričnega postopka
- # Izbira algoritma
- # Programska oprema



Računski model

Prestavimo → *Računski model*: Spremenimo *Matematični model* v ustrezno obliko izračun rešitve.



Računski modeli zahtevajo programsko opremo, kot je Matlab, Excel ali Mathematica, oziroma jezike kot so Fortran, C, C++ ali Java.

Primer: Padajoči kamen

Splošni zapis

Vhod

V, začetna hitrost; **H**, začetna višina

g, pospešek kot posledica težnosti

Δt , časovni korak; **imax**, največje število korakov

Izhod

ti, vrednost časa pri koraku **i**

xi, višina pri času **ti**

vi, hitrost pri času **ti**

Primer: Padajoči kamen

Začetek

Nastavi $t_i = t_0 = 0$; $v_i = v_0 = V$; $x_i = x_0 = H$

izpiši t_i , x_i , v_i

Časovni koraki: $i = 1, \text{imax}$

Nastavi $t_i = t_i + \Delta t$

Nastavi $x_i = x_i - v_i * \Delta t$

Nastavi $v_i = v_i + g * \Delta t$

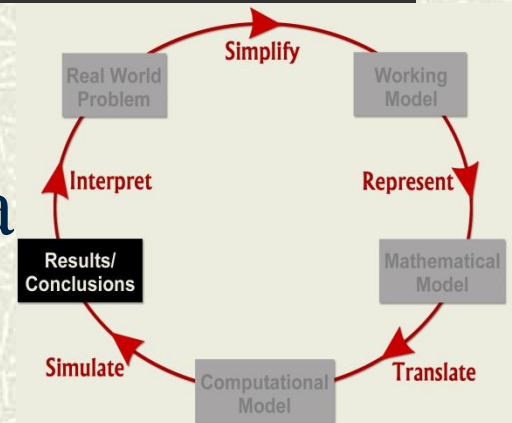
izpiši t_i , x_i , v_i

če ($x_i \leq 0$), Nastavi $x_i = 0$; ustavi

Razultati/Zaključki

Napovej → *Rezultati/Zaključki*:

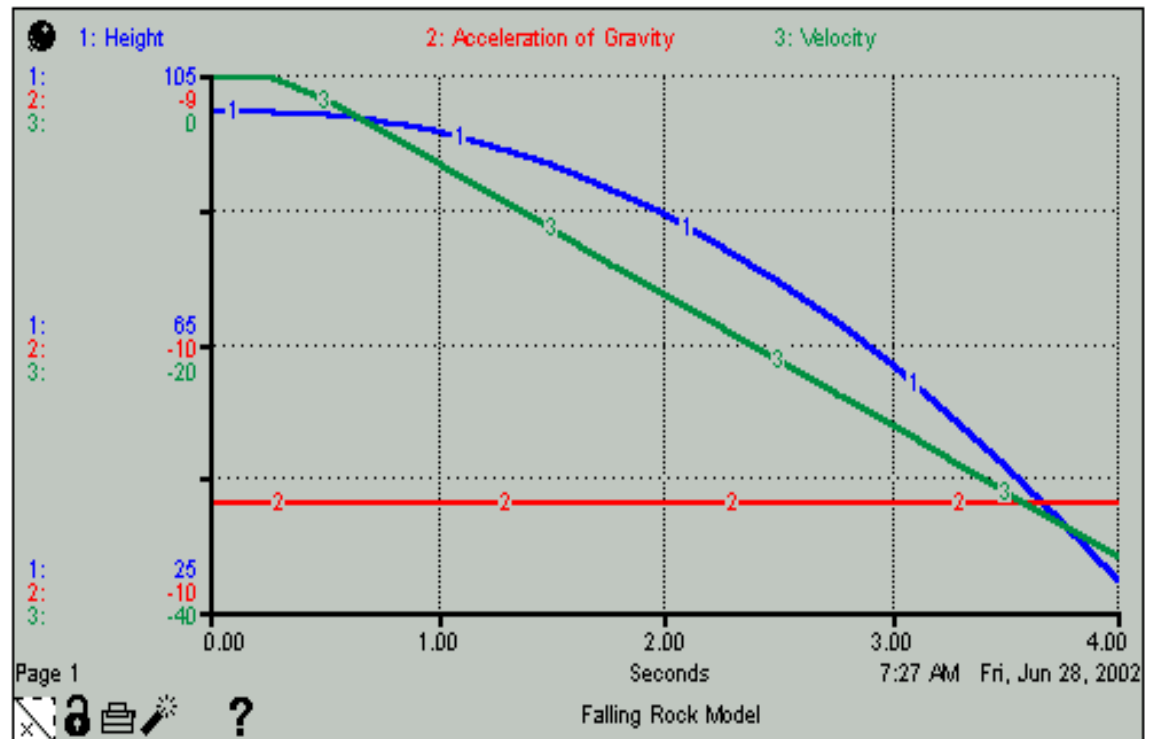
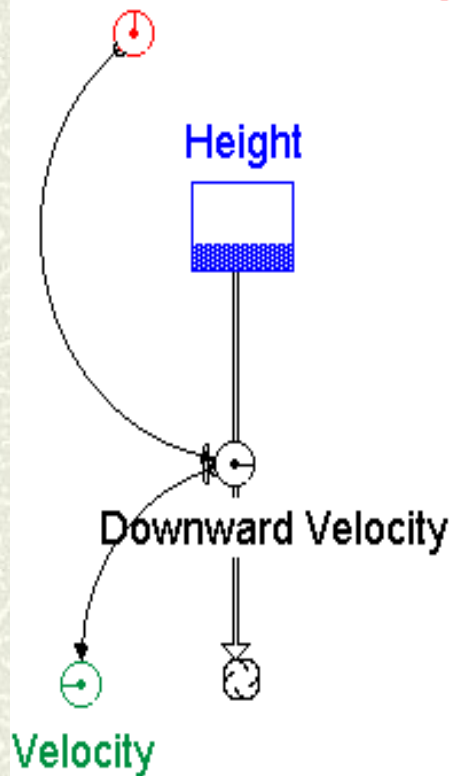
Zaženemo “Računski Model”, da dobimo *Rezultate* in potegnemo *Zaključke*.



- Preverimo računalniški program; uporabimo primere za preverjanje; določimo območja veljavnosti.
- Grafi, preglednice in druga prikazna orodja so uporabna pri povzemanju rezultatov in ugotavljanju zaključkov.

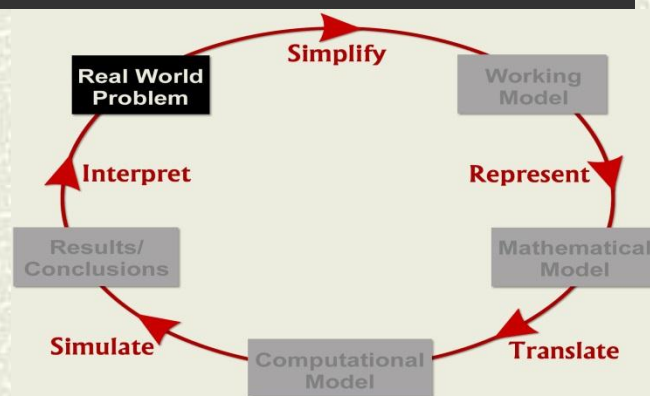
Padajoči kamen: Model

Acceleration of Gravity



Dejanski primer

Razložimo *Zaključke*:
Primerjamo z obnašanjem
Dejanskega primera.

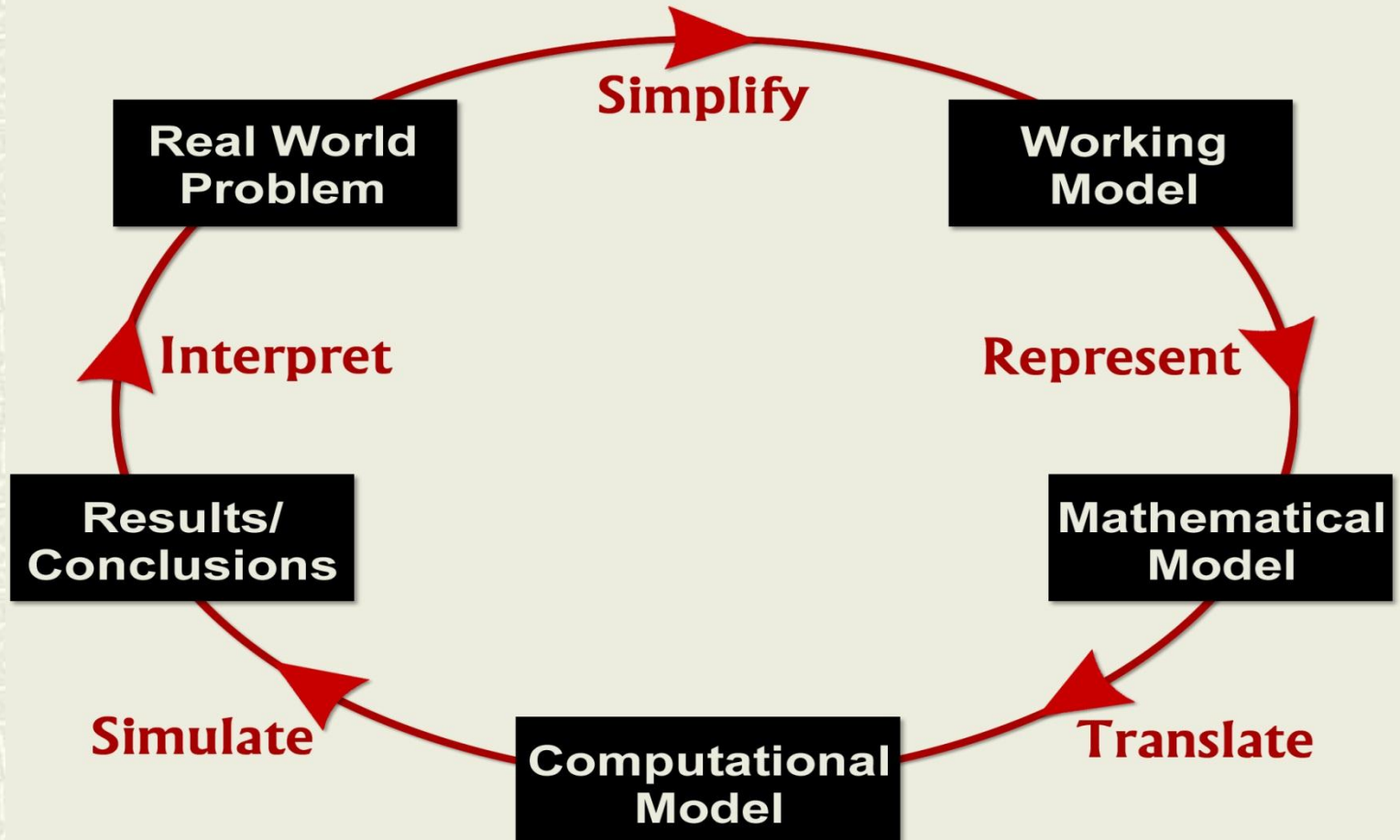


- Če se rezultati modela ne “ujemajo” z dejansko stvarnostjo ali izmerjenimi podatki, ponovno pregledamo Delujoč model (opustimo poenostavitve) in ponovimo korake modeliranja.
- Pogosto gre postopek modeliranja preko številnih ponovitev, preden je model „zadovoljiv“.

Primer: Padajoči kamen

- # Da bi naredili model padajočega kamna bolj blizu resničnosti, lahko opustimo nekatere izmed poenostavitvenih predpostavk, npr. vključimo strig – odvisen je od oblike kamna in je sorazmeren s hitrostjo.
 - # Izboljšave nezveznega modela:
 - Hitrosti računamo na sredini časovnega koraka namesto na začetku.
 - Zmanjšamo velikost Δt .
-

Postopek matematičnega modeliranja



Zgradba predavanj

- # Osnove modeliranja
 - # Energijske bilance
 - # Osnovni numerični postopki:
 - Interpolacija in iskanje ničel
 - Postopki najmanjših kvadratov
 - Numerično določanje površine
 - ODE's – Navadne diferencialne enačbe
 - PDE's – Parcialne diferencialne enačbe
 - # Zaključek
-

Literatura

Cleve Moler, Numerical Computing with MATLAB, 2004.

(<http://www.mathworks.com/moler>)
