Kemijsko inženirstvo, 1. letnik

Matematika 1

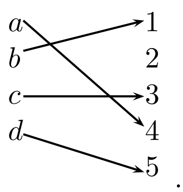
Predavatelj: Peter Legiša
Asistent: Irena Majcen

DOMAČA NALOGA

Funkcija ene spremenljivke. Definicija in načini podajanja funkcij. Osnovne operacije s funkcijami. Inverzna funkcija. Pregled, grafi in lastnosti elementarnih funkcij. Parametrično dana krivulja. Zveznost in enostranska zveznost. Računske operacije z zveznimi funkcijami in lastnosti zveznih funkcij.

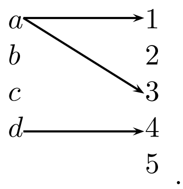
1. Dane so množice $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $C = \{x, y, z, w\}$.

   (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f\colon A \to B$, podane z

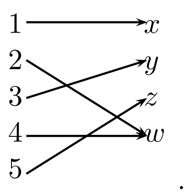
   Ali je injektivna, surjektivna, bijektivna?

   (b) Naj bo $h\colon A \to B$ podana z

   Zakaj h ni funkcija?

   (c) Naj bo $g\colon B \to C$,

   Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, injektivnost, surjektivnost, bijektivnost.

   (d) Določi preslikavo $g \circ f\colon A \to C$, njeno zalogo vrednosti, injektivnost, surjektivnost in bijektivnost.

2. Za $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ določi definicijsko območje in pokaži, da je f injektivna.

3. Naj bo $f(x) = x^4$. Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti in ugotovi ali je injektivna.

4. Za $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, dokaži, da je bijektivna.

5. Za $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^4$, dokaži, da je bijektivna.
6. Poišči inverz funkcije $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\frac{x}{2})$ in pokaži, da je surjektivna.
7. Naj bosta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ injektivni. Pokaži, da je $g \circ f$ injektivna.
8. Naj bosta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ surjektivni. Pokaži, da je $g \circ f$ surjektivna.
9. Naj bo
$$f(x) = \begin{cases} 2; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -2; & x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$
Določi definicijski območji in zalogi vrednosti kompozitumov $f \circ g$ in $g \circ f$.
10. Pokaži, da je funkcija $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = (x-1)^2$ bijektivna.
11. Izračunaj $f \circ g$ in določi definicijsko območje te funkcije, če je
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+5}; & x \geq -1 \\ \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{2}); & x < -1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x - 1; & x \geq 0 \\ x - \frac{\pi}{2}; & x < 0 \end{cases}.$$
12. Določi definicijsko območje in približno nariši graf funkcije. Določi še zalogo vrednosti in ali je funkcija injektivna ali surjektivna.
   (a) $y = \sin(x^2)$,
   (b) $y = x + \sin x$,[1]
   (c) $y = \log(|x| - 2)$,
   (d) $y = e^{\frac{1}{1-x^2}}$,
   (e) $y = \frac{1}{\sin x}$,
   (f) $y = \arcsin \frac{x}{2}$,
   (g) $y = \arcsin \frac{1}{x}$,
   (h) $y = \arccos(\cos x)$.
13. Iz zveznosti sledi:

   Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, $a < b$, in velja $f(a) < 0$ ter $f(b) > 0$, ima f na intervalu (a,b) ničlo.

   Uporabi to lastnost za reševanje naslednjih nalog.
   (a) Pokaži, da ima enačba $x \cdot 2^x = 1$ rešitev na intervalu $(0,1)$.
   (b) Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[0,5]$, ki ima ničlo. Če je 1 v zalogi vrednosti funkcije f pokaži, da je tudi $\frac{1}{2}$ v zalogi vrednosti. Dokaži še, da zaloga vrednosti f vsebuje interval $[0,1]$.
   (c) Naj bo $g\colon [0,1] \to [0,1]$ zvezna funkcija. Pokaži, da obstaja $x \in [0,1]$, da je $g(x) = x$.
14. Naj bo
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$
Skiciraj grafe f, g, $f \circ g$ in $g \circ f$. Ali sta $f \circ g$ in $g \circ f$ zvezni?

[1] Injektivnosti še ne znamo dokazati.

15. Skiciraj parametrično podano krivuljo $x = 2\sin t$, $y = 3\cos t$.

16. Skiciraj parametrično podano krivuljo $x = \sin t + 2$, $y = \cos t + 3$.

17. Skiciraj krivuljo, podano z $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

Kemijsko inženirstvo, 1. letnik

Matematika 1

Predavatelj: Peter Legiša
Asistent: Irena Majcen

DOMAČA NALOGA – rezultati

Funkcija ene spremenljivke. Definicija in načini podajanja funkcij. Osnovne operacije s funkcijami. Inverzna funkcija. Pregled, grafi in lastnosti elementarnih funkcij. Parametrično dana krivulja. Zveznost in enostranska zveznost. Računske operacije z zveznimi funkcijami in lastnosti zveznih funkcij.

1. (a) Definicijsko območje je A, zaloga vrednosti $\{1, 3, 4, 5\}$, je injektivna, saj v nobeno točko iz B ne vodita dve puščici. Ni surjektivna, saj se nič ne slika v 2, zato tudi ni bijektivna.

   (b) Ker ni definirana povsod in ker ni dobro definirana, kajti $h(a) = 1$ in $h(a) = 3$.

   (c) Definicijsko območje je B, zaloga vrednosti C. Je surjektivna (v vsako točko iz C vodi vsaj ena puščica), ni injektivna (2 in 4 se slikata v isto točko w). Ni bijektivna.

   (d) Funkcija je

   $$g \circ f(a) = w, \quad g \circ f(b) = x, \quad g \circ f(c) = y, \quad g \circ f(d) = z.$$

   Definicijsko območje je A, zaloga vrednosti C, je injektivna, surjektivna in bijektivna.

2. Definicijsko območje je $(-\infty, \frac{1}{2}]$. Pokažemo, da iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$.

3. Definisijsko je $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti $[0, \infty)$, ni injektivna zaradi $f(1) = 1 = f(-1)$.

4. Inverz je $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

5. Preverimo injektivnost in utemeljimo surjektivnost z inverzom.

6. $f^{-1}(x) = 2e^x$.

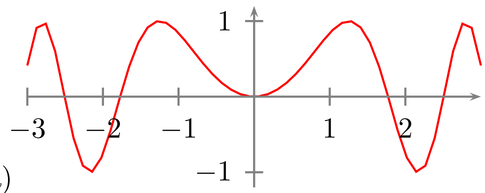
7. Preverimo...

8. Preverimo...

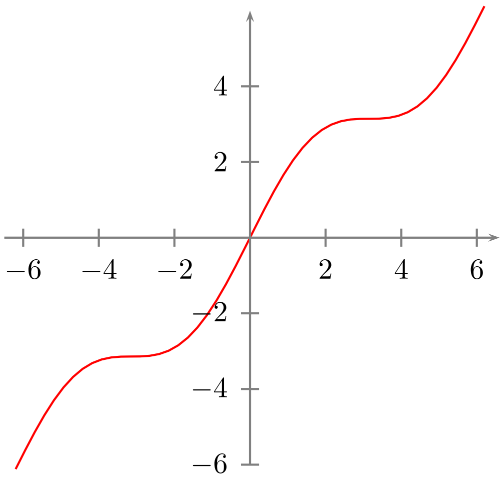
9. Izračunamo obe funkciji. Definicijsko območje $f \circ g$ je $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, zaloga vrednosti $\{-2, 2\}$. Definicijsko območje $g \circ f$ je $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, zaloga vrednosti $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

10. Pokažemo injektivnost in poiščemo inverz.

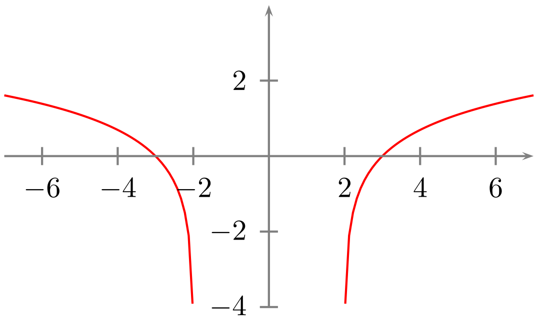
11. Definirana je povsod, $f \circ g(x) = \frac{x}{x+4}$ za $x \geq 0$ in $f \circ g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ za $x < 0$.

12. (a) 

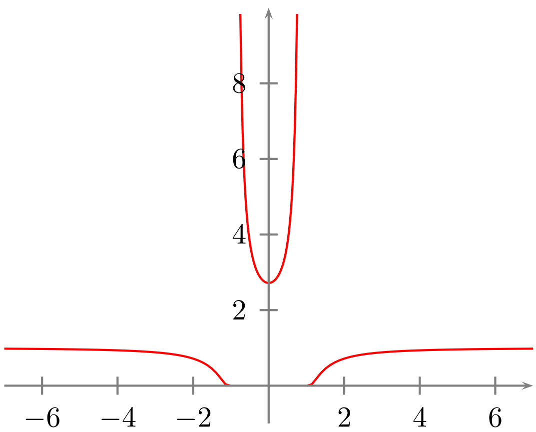
Definirana povsod, ni injektivna, zaloga vrednosti $[-1, 1]$.

(b) 

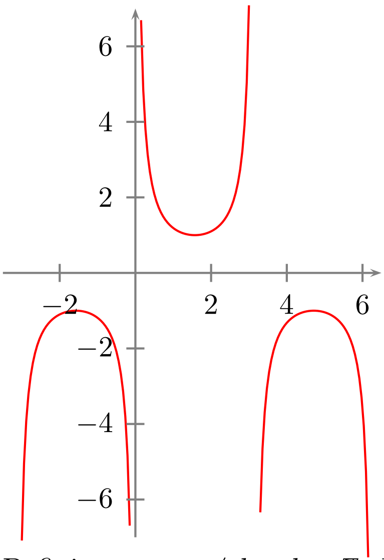
Definirana povsod, je surjektivna.

(c) 

Definirana za $x > 2$ in $x < -2$, ni injektivna, je surjektivna.

(d) 

Definirana za $x \neq 1$ in $x \neq -1$. Ni injektivna in ne surjektivna.

(e) 

Definirana za $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ni niti injektivna niti surjektivna.

(f) Definicijsko območje je $-2 \leq x \leq 2$.

(g) Definirana za $x \geq 1$ ali $x \leq -1$.

(h) Definirana povsod.

13. (a) Uporabimo lastnost v okvirju za $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ in interval $[0, 1]$.

    (b) Ker ima f ničlo, obstaja $a \in [0, 5]$, da je $f(a) = 0$. Ker je 1 v zalogi vrednosti, obstaja $b \in [0, 5]$, da je $f(b) = 1$. Naj bo $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. Ločimo dva primera.

    Če je $a < b$ uporabimo lastnost v okvirju za g in interval $[a, b]$. Velja namreč $g(a) = -\frac{1}{2} < 0$ in $g(b) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. Torej ima g ničlo na intervalu (a, b): $g(c) = 0$. To pa ravno pomeni $0 = g(c) = f(c) - \frac{1}{2}$ oziroma $f(c) = \frac{1}{2}$. Jasno je $0 \leq a < c \leq b \leq 5$, zato je $c \in [0, 5]$.

    Če je $b > a$ postopamo podobno.

    Naj bo $t \in (0, 1)$ poljubno realno število. Ponovimo sklep kot zgoraj za funkcijo $h(x) = f(x) - t$. Ugotovimo, da ima h ničlo $x_t \in [0, 5]$, kar nam da $0 = h(x_t) = f(x_t) - t$, torej je $f(x_t) = t$ in je t v zalogi vrednosti f. Zato je v zalogi vrednosti f cel interval $(0, 5)$.

    (c) Uporabimo izrek za $f(x) = g(x) - x$ in upoštevamo, da je zaloga vrednosti g podmnožica intervala $[0, 1]$.

14. Iz grafov vidimo, da sta f in g zvezni. Zato sta zvezni tudi $f \circ g$ in $g \circ f$. Račun pokaže $f(g(x)) = g(x)$ in
$$g \circ f(x) = \begin{cases} 0, & x > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$
Grafe smo narisali na vajah...

15. Graf je elipsa v središčni legi, ki seka abciso v točkah $(2, 0)$ in $(-2, 0)$, ordinato pa v $(0, 3)$ in $(0, -3)$.

16. Krivulja je krožnica, saj velja $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$. Središče ima v točki $(2, 3)$, njen radij pa je 1.

17. Skicirali na vajah.