

DOMAČA NALOGA

Limita funkcije. Definicija in računanje z limitami. Odvod in diferencial funkcije. Definicija odvoda in njegov pomen. Pravila za odvajanje in odvodi elementarnih funkcij. Diferencial funkcije in uporaba. L'Hospitalovo pravilo.

1. Izračunaj naslednje limite:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)^2}{(x^2-9)(x+5)},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+5)}{x^2+4},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3}{x+3},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}},$$

$$(h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right),$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x},$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2},$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}.$$

2. Izračunaj naslednje limite:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - a^3},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

- (d) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$,
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$,
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \right)$,
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

3. Določi a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x > 0, \end{cases}$$

zvezna.

4. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} + 2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\sin ax}{x}, & -1 < x < 0, \\ 4 - 2x, & 1 < x < \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Določi a tako, da bo f zvezna v 0. Ali je f zvezna?

5. Izračunaj levo in desno limito

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

tam, kjer funkcija ni zvezna. Skiciraj graf.

6. Odvajaj:

- (a) $y = x \operatorname{tg} x + \pi$,
- (b) $y = x^n \ln x + 2 \cdot e^x$,
- (c) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$,
- (d) $y = \frac{2^x}{3^x}$,
- (e) $y = \frac{a}{x^3 - 1}$,
- (f) $y = \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}$,
- (g) $y = e^{\cos x}$,
- (h) $y = \sin x^2$,
- (i) $y = \ln \sqrt{\operatorname{tg} x}$,
- (j) $y = \arcsin e^{\operatorname{ctg} x}$,
- (k) $y = \sqrt[3]{\arcsin \operatorname{tg} x^4}$,
- (l) $y = x^x$,
- (m) $y = 2^{x^{\sin x}}$,
- (n) $y = \arcsin(\sin x)$, določi še kje odvod obstaja,
- (o) $y = \frac{x(x^2 + 1)^2}{\sqrt{1 - x^2(2 - x)}}$.

7. Določi y' za naslednji implicitno podani funkciji:

(a) $x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0$,

(b) $e^{x+y} = x \cdot y$.

8. Pokaži, da funkcija $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ zadošča enačbi

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

9. Izračunaj odvode funkcij $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$ in $y = \operatorname{th} x$.

10. Izračunaj odvod:

(a) $y = (\sin x)^{\cos x}$,

(b) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$,

(c) $y = \frac{(1+x)^2}{(2+x)^3(3+x)^4}$,

(d) $x = y \cdot e^{-y}$,

(e) $y = \operatorname{cth} x$.

11. Pokaži, da funkcija $y = \ln \frac{1}{1+x}$ zadošča enačbi $xy' + 1 = e^y$.

12. Nariši $y = \operatorname{ch} x$ in $y = \operatorname{sh} x$.

13. Izračunaj odvod inverznega hiperboličnega kosinusa.

14. Izračunaj odvod $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

15. Odvajaj $y = |x|$. Ali je funkcija povsod odvedljiva?

16. Odvajaj $y = x \cdot |x|$. Ali je funkcija povsod odvedljiva?

17. Določi a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

zvezno odvedljiva.

18. Izračunaj četrti odvod $y = x^6 - 4x^3 + 4$ in $y^{(4)}(1)$.

19. Izračunaj $y^{(5)}$ za $y = \frac{1}{1-x}$.

20. Izračunaj $y^{(3)}$ za $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

21. Izračunaj $y^{(2)}$ za $y = x^x$.

22. Zapiši enačbo normale in tangente za $y = \sqrt{\ln x}$ v $x = e$.

23. Zapiši enačbo tangente na krivuljo $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$ v točki $(1, 1)$.

24. Določi normalo na krivuljo $y = x \ln x$, ki je pravokotna na premico $p: 2x - 2y - 3 = 0$.

25. Pod kakšnim kotom seka $y = \sin x$ os x v točki $x = 0$?

26. Pod kakšnim kotom se na intervalu $[0, \pi]$ sekata sinusoida in kosinusoida?

27. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $x^2 + y^2 - 4x = 1$ in $x^2 + y^2 + 2y = 9$?

28. Določi ekstreme funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$.

29. Dana je funkcija $f(x) = e^{2x^3+3x^2-36x}$. Definijsko območje te funkcije je interval $[0, 3]$. Določi njeno zalogo vrednosti.
30. Za funkcijo $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$ določi zalogo vrednosti.
31. Za funkcijo $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, definirano na $[0, 2]$, določi zalogo vrednosti.
32. Iz kvadratnega kosa papirja izrežemo kvadratne robove dolžine x . Koliko mora biti x , da bo volumen škatle največji?
33. Med krivulji $y_1 = |x|$ in $y_2 = 1 - x^2$ včrtamo pravokotnik s stranicami vzporednimi z osmi. Koliko je največja ploščina takega pravokotnika?
34. Dan je krog polmera R . Iz njega izrežemo krožni izsek, katerega kot meri α . Kolikšen mora biti kot α , da bo volumen stožca, ki ga sestavimo iz zrezanega kroga, maksimalen?
35. Skozi točko $T(1, 4)$ potegni premico z negativnim naklonom tako, da bo vsota odsekov na koordinatnih oseh čim manjša.

36. Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 - x)}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$,
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$,
- (f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$,
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$,
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.

37. Nariši funkcijo $f(x) = x \ln x$.

38. Nariši $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

39. Nariši $y = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+1}}$.

40. Nariši

- (a) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$,
- (b) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$,
- (c) $y = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$.

DOMAČA NALOGA – rezultati

Limita funkcije. Definicija in računanje z limitami. Odvod in diferencial funkcije. Definicija odvoda in njegov pomen. Pravila za odvajanje in odvodi elementarnih funkcij. Diferencial funkcije in uporaba. L'Hospitalovo pravilo.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} = -\frac{4}{3}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)^2}{(x^2-9)(x+5)} = \frac{1}{3}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+5)}{x^2+4} = 0$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3}{x+3}$ ne obstaja,
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} = e^4$,
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$,
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$,
- (h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$,
- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1$,
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}$,
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$,
- (l) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2} = \pi$,
- (m) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = -\frac{1}{56}$.
2. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}} = 2$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - a^3} = \frac{a-1}{3a^2}$ za $a \neq 0$, sicer je $-\infty$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = 3$,

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} = \frac{1}{3},$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \right) = \pi,$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

3. Funkcija je zvezna povsod razen morda v točki $x = 0$. Leva limita je 1, desna je a , zato je $a = 1$.

4. Izračunamo levo in desno limito, dobimo $a = 2$. Ni zvezna, ker ni definirana v 1.

5. Funkcija ni zvezna v 0. Leva limita je 1, desna je 0. Skicirali na vajah...

6. Odvajaj:

$$(a) y' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x},$$

$$(b) y' = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} + 2 \cdot e^x,$$

$$(c) y' = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x},$$

$$(d) y' = \frac{2^x}{3^x} \cdot \ln \left(\frac{2}{3} \right),$$

$$(e) y' = \frac{-3ax^2}{(x^3-1)^2},$$

$$(f) y' = \frac{23}{24} x^{-\frac{1}{24}},$$

$$(g) y' = e^{\cos x} (-\sin x),$$

$$(h) y' = 2x \cdot \cos x^2,$$

$$(i) y' = \frac{1}{2 \sin x \cos x},$$

$$(j) y' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2 \operatorname{ctg} x}}} \cdot e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$(k) y' = \frac{1}{3} (\arcsin x^4)^{-\frac{2}{3}} \frac{4x^3}{1+x^8},$$

$$(l) y' = x^x (\ln x + 1),$$

$$(m) y' = 2^{x^{\sin x}} \cdot x^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}),$$

$$(n) y' = -\frac{\cos x}{|\cos x|} \text{ in obstaja za } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$(o) y' = \frac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x)} \left(\frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} + \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{2-x} \right) \text{ (odvajamo prek logaritma)}.$$

7. (a) $y' = \frac{3+6xy^2-3x^2y}{x^3-6x^2y+15y^2},$

(b) $y' = \frac{y(1+x)}{x(y-1)}.$

8. Vstavimo in preverimo.

9. Odvodi so $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

10. (a) $y' = (\sin x)^{\cos x} (-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}),$

(b) $y' = \sqrt{1-x^2} \left(-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} - \frac{2}{1-x^2} \right),$

(c) $y' = \frac{(1+x)^2}{(2+x)^3(3+x)^4} \left(\frac{2}{1+x} - \frac{3}{2+x} - \frac{4}{3+x} \right),$

(d) $y' = \frac{y}{x(1-y)},$

(e) $y = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

11. Vstavimo...
12. Predavanja...
13. Enak je $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
14. Enak je $\frac{1}{1+x^2}$.
15. Ni odvedljiva v 0. Sicer je $y' = 1$ za $x > 0$ in $y' = -1$ za $x < 0$.
16. Odvod je $2x$ za $x > 0$, $-2x$ za $x < 0$ in 0 za $x = 0$. Je povsod odvedljiva.
17. Iz primerjave leve in desne limite v 1 sledi $a + b = 1$. Levi in desni limiti odvoda v 1 sta a in 2 . Zato je $a = 2$ in $b = -1$.
18. $y^{(4)} = 360x^2$ in $y^{(4)}(1) = 360$.
19. $y^{(5)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (1-x)^{-6}$.
20. $y^{(3)} = -\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$.
21. $y^{(2)} = x^x (1 + \ln x + (1 + \ln x)^2)$.
22. Normala $y = -2ex + 1 + 2e^2$, tangenta $y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}$.
23. Tangenta $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 1)$.
24. Normala $y = -x + 1$.
25. Pod kotom 45° .
26. Pod kotom $\arctg(2\sqrt{2})$.
27. V obeh presečiščih pod kotom 45° .
28. Maksimum v 0, minimum v -1 in 1 .
29. Zaloga vrednosti je $[e^{-44}, 1]$.
30. Zaloga vrednosti je $(-\infty, 27e^{-3}]$.
31. Zaloga vrednosti je $[0, \frac{\pi}{2}]$.
32. Šestina dolžine robu.
33. Največja ploščina je $\frac{1}{3}$.
34. $\alpha = 2\pi(1 - \sqrt{\frac{2}{3}})$.
35. Premica $2x + y = 6$.
36. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$,
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1-x)} = -1$,
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{\sqrt{x+6} - 3} = \frac{\sqrt[3]{5} - 2}{\sqrt{6} - 3}$,

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})} = 2,$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = 1,$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = 1,$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 1.$$

37. Nariši funkcijo $f(x) = x \ln x$.

38. Nariši $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

39. Nariši $y = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+1}}$.

40. Nariši

$$(a) y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x},$$

$$(b) y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}},$$

$$(c) y = e^{-\frac{1}{1-x^2}}.$$