Naloga. Odvajaj $y = |x|$. Ali je funkcija povsod odvedljiva?

Rešitev. Funkcija $y = |x|$ je sestavljena iz dveh predpisov in sicer

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Odvod tako podane funkcije izračunamo tako, da odvajamo vsak predpis posebej. Toda, na tak način lahko odvajamo le funkcije na odprtih intervalih. Tako dobimo

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ ?, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Kako je z odvodom v točki 0? Izračunamo ga po definiciji. Spomnimo se, da je odvod v točki x_0 enak

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

V našem primeru je $x_0 = 0$ in $f(x) = |x|$ zato bo odvod, če obstaja, enak limiti (upoštevali bomo $f(0) = |0| = 0$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Ločimo primera glede na to ali je $h > 0$ ali $h < 0$, torej izračunajmo posebej levo in desno limito. Če imamo $h \uparrow 0$, potem je $h < 0$, zato bo $f(h) = |h| = -h$. Tako je

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

V primeru $h \downarrow 0$ je $h > 0$, zato je $f(h) = |h| = h$ in velja

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Očitno sta limiti različni, zato limita $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ne obstaja. Ugotovili smo

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ \text{ne obstaja}, & x = 0, \end{cases}$$

zato funkcija ni povsod odvedljiva.

Naloga. Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x<1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

zvezna in bo tudi odvod te funkcije zvezna funkcija.

Rešitev. Funkcija je zvezna na intervalih $x < 1$ in $x > 1$, saj sta $ax+b$ in x^2 na teh intervalih zvezni funkciji. Preveriti moramo zveznost v točki 1. Funkcija je zvezna v 1, če velja

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1} f(x) = f(1).$$

Izračunamo lahko

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1}(ax+b) = a+b,$$

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1} x^2 = 1$$

in $f(1) = 1$. Veljati mora $a + b = 1 = 1$.

Izračunajmo sedaj odvod te funkcije. Odvajamo lahko le na odprtih intervalih, zato dobimo

$$f'(x) = \begin{cases} a, & x<1, \\ ?, & x=1, \\ 2x, & x>1. \end{cases}$$

Izračunajmo odvod v točki 1. Po definiciji je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Nas zanima za primer $x_0 = 1$, torej

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - 1}{h}.$$

Ločimo dva primera glede na to ali je $h > 0$ ali $h < 0$, saj se funkcija za ta dva primera obnaša po dveh različnih predpisih. V primeru $h \uparrow 0$ je $h < 0$, zato je $1 + h < 1$ in velja $f(1+h) = a(1+h) + b$. Tako je

$$\begin{aligned} \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\uparrow 0} \frac{a(1+h)+b-1}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \left(\frac{ah}{h} + \frac{a+b-1}{h} \right) \\ &= \lim_{h\uparrow 0} \left(a + \frac{a+b-1}{h} \right). \end{aligned}$$

Spomnimo se, da smo zgoraj že dobili $a + b = 1$, torej je $a + b - 1 = 0$ in je zato ta limita enaka

$$\lim_{h\uparrow 0} \left(a + \frac{0}{h} \right) = \lim_{h\uparrow 0} a = a.$$

V primeru $h \downarrow 0$ velja $h > 0$, zato je $1 + h > 1$ in je tako $f(1 + h) = (1 + h)^2$. Dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h} &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\downarrow 0}(2+h) = 2. \end{aligned}$$

Da bo odvod obstajal, morata biti obe limiti enaki, torej $a = 2$. Iz pogoja $a + b = 1$ izračunamo še $b = -1$.

Funkcija je torej

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1, \\ x^2, & x \geq 1, \end{cases}$$

njen odvod pa

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$