3. DOMAČA NALOGA - KEMIJSKO INŽENIRSTVO

predmet: MATEMATIKA 1
asist. Andreja Drobnič Vidic

UPORABA ODVODOV

Diferencialni račun je omogočil stvari, za katere je pred tem kazalo, da presegajo človeške moči.

P.A. Sulina

1. **Pod kakšnim kotom seka krivulja $f(x) = e^{\frac{x}{2}-1}$ ordinatno os?**

   Rešitev:
   Kot, pod katerim seka tangenta ordinato, znaša 80°.

2. ***Kupolast rezervoar za vodo ima v preseku obliko parabole. Nanj prislonimo lestev, da bi dosegli odprtino na vrhu parabolične cisterne. Kakšna je enačba premice, ki predstavlja lestev, prislonjeno na cisterno, če se ta dotika rezervoarja v točki $x = 1$, enačba parabole pa je $f(x) = 4 - x^2$ (vse količine so v metrih)? Pod kakšnim kotom stoji lestev? Kako bi stala lestev, če bi jo porinili na vrh rezervoarja?**

   Rešitev:
   $y = -2x + 5$; $\varphi = 63{\cdot}4°$; vodoravno

3. **Določi območje na realni osi, kjer graf funkcije $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$ narašča.**

   Rešitev:
   Območje naraščanja je interval $(-3, -1)$.

4. **Določi območje na realni osi, kjer graf funkcije $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x}$ pada.**

   Rešitev:
   Najprej poglejmo, kje je funkcija definirana, saj je območje padanja funkcije podmnožica definicjskega območja! Zaradi logaritemske funkcije je definicijsko območje interval $(0, \infty)$. Funkcija pada na intervalu

   $$(e, \infty) \doteq (2{\cdot}71, \infty).$$

5. ***Tečaj evra se je v analiziranem letu spreminjal po enačbi $f(t) = 3t^4 - 28t^3 + 84t^2 - 96t + 239$, kjer spremenljivka t predstavlja mesece v**

letu. Ugotovi, kdaj je tečaj evra rasel.

Rešitev:
Tečaj evra je rasel v območjih, kjer odvod funkcije narašča. To je na intervalih $(1, 2)$ in $(4, \infty)$. Tečaj evra je rasel v mesecu februarju in od maja dalje.

6. **Določi lokalne ekstreme za naslednje funkcije**

   a) $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$

   b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$

   Rešitev:

   a) $T(\frac{3}{2}, 2e^{-\frac{3}{2}}) \approx T(1'5, 0'4)$ lokalni maksimum

   b) ni ekstremov

7. **Poišči prevoje funkcije** $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

   Rešitev:
   Funkcija ima prevoj v točkah, kjer je drugi odvod enak 0, tretji pa je od 0 različen. Prevojne točke so pri $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. **Na realni osi določi območja konveksnosti in konkavnosti za funkcijo** $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$

   Rešitev:
   območje konveksnosti: $(\frac{1}{e}, \infty)$; območje konkavnosti $(0, \frac{1}{e})$

9. **Ob proizvodni hali želimo ograditi del zemljišča pravokotne oblike za odpadni material. Koliko ograje najmanj potrebujemo, če mora zemljišče meriti 200 m^2 in je lahko na eni strani zemljišče brez ograje, saj se dotika proizvodne hale.**

   Rešitev:
   Najmanj ograje potrebujemo za ograditev zemljišča, ki ima stranici 10 in 20 m. Potrebujemo 40 m ograje.

10. **Iz drage pločevine želimo izdelati cisterno v obliki valja za shranjevanje kurilnega olja. Kakšne naj bodo dimenzije cisterene, če želimo v njej shranjevati 2000 dm^3 kurilnega olja in želimo porabiti čim manj pločevine.**

Rešitev:
Cisterna v obliki valja ima radij $r = \sqrt[3]{\frac{2000}{2\pi}} \approx 6{\cdot}82\ dm$, višina pa meri $v = \frac{V}{\pi r^2} \approx 13{\cdot}70\ dm$.

11. ***Iz hloda (oblike valja), pri katerem poznamo obseg o prečnega preseka, želimo v proizvodnji izklesati prostorsko največji tram (oblike kvadra). Kaj lahko povemo o dimenzijah prečnega preseka tramu?**

Rešitev:
Presek prostorsko največjega tramu je kvadrat s s stranico $\dfrac{\sqrt{2}o}{2\pi}$ in seveda dolžino enako dolžini hloda.

12. **Iz treh desk dolžine l in širine a napravimo žleb, katerega prerez ima obliko enakokrakega trapeza. Določi nagib stranskih desk, da bo imel žleb največjo možno prostornino za shranjevanje oziroma pretok deževnice?**

Rešitev:
$60°$

13. ***Rudnik ob ravni železniški progi oskrbuje s svojimi surovinami tovarno, ki je oddaljena od proge za d, $d > 0$, od rudnika pa še dlje. Iz katere točke na železniški progi naj speljemo ravno cesto do tovarne, da bo prevoz surovin iz rudnika do tovarne najcenejši? Vemo, da stane kilometer prevoza po železnici c_1, kilometer prevoza po cesti pa c_2, $c_1 < c_2$.**

Rešitev:
Točka na ravni železniški progi, kjer tovor iz železnice speljemo na cesto, je od rudnika oddaljena za $l - \dfrac{dc_1}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$, kjer smo z l označili dolžino pravoktne projekcije zveznice med rudnikom in tovarno na ravno železnico.

14. ***Določi karakteristične točke in nariši graf funkcije $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.**
Rešitev:

1.) Definicijsko območje: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \bigcup (-2, \infty)$

2.) Ničle: $x = \pm\sqrt{3}$

3.) Poli: $x = -2$

4.) Začetna vrednost: $f(0) = \frac{3}{2}$

5.) Limitne vrednosti na robu definicijskega območja:
asimptota: $y = -x + 2$
Ker je pol $x = -2$ lihe stopnje, gre z ene strani graf pri polu v ∞, z druge strani pa v $-\infty$.

6.) Ekstremi: $T_1(-1, 2)$ minimum, $T_2(-3, 6)$ maksimum

15. ***S pomočjo karakterističnih točk nariši graf funkcije** $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x}$**.**

Rešitev:

1.) Definicijsko območje D_f dobimo iz pogoja za sode korenske funkcije:
$1 - 4x^2 \geq 0, \quad (1-2x)(1+2x) \geq 0$
$D_f = [-\frac{1}{2}, 0) \bigcup (0, \frac{1}{2}]$

2.) Ničle: $\sqrt{1-4x^2} = 0, \quad x_1 = \frac{-1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$

3.) Poli: /

4.) Začetna vrednost: $f(0)$ ni v definicijskem območju

5.) Limitne vrednosti na robu definicijskega območja:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}, x > -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0, x < 0} \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} = \infty$$

6.) Ekstremi:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2 \cdot \sqrt{1-4x^2}}$$

Dobljeni ulomek ni nikoli nič, zato funkcija nima lokalnih ekstremov.

16. **Hitrost odsesavanja prahu s pomočjo okrogle šobe naj bi po nekaterih avtorjih (Gspan, Prah v proizvodnji, str. 113) veljala enačba:**

$$v(x) = \frac{\dot{V}}{S}\left(1 - \frac{\frac{x}{d}}{\sqrt{(\frac{x}{d})^2 + 0{\cdot}25}}\right),$$

kjer je x oddaljenost prahu od šobe. Skiciraj graf funkcije pri pretoku zraka $\dot{V} = 1\ m^3/s$, ploščini preseka odprtine šobe $S = 0{\cdot}01\ m^2$ in premeru šobe $d = 0{\cdot}1\ m$.

Rešitev:
Graf.

17. **S pomočjo karakterističnih točk nariši graf funkcije** $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$.

Rešitev:

1.) Definicijsko območje so vsa realna števila, saj sta tako linearna kot eksponentna funkcija definirani povsod in eksponentna funkcija ni nikoli 0; $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

2.) Ničle: $x - 2 = 0, \quad x = 2$

3.) Poli: /

4.) Začetna vrednost: $f(0) = \frac{0-2}{e^0} = -2$

5.) Limitne vrednosti na robu definicijskega območja:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{-t-2}{e^{-t}} = \lim_{t\to\infty} -(t+2)e^t = -\infty$$

6.) Ekstremi:

$$f'(x) = \frac{1e^x - (x-2)e^x}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}$$

$$0 = f'(x) = \frac{3-x}{e^x} \qquad x = 3$$

Iz lege preostalih karakterističnih točk hitro ugotovimo, da ima funkcija v stacionarni točki $T(3, e^{-3}) \approx T(3, 0\text{'}1)$ lokalni maksimum.

18. **Določi karakteristične točke in nariši graf funkcije** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$**.**

Rešitev:

1.) Definicijsko območje: $D_f = (0, \infty)$

2.) Ničle: $x = 1$

3.) Poli: /

4.) Začetna vrednost: $f(0)$ ni definirana

5.) Limitne vrednosti na robu definicijskega območja:

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

6.) Ekstremi: stacionarna točka je $T(e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2e}) \approx (1\text{'}6, 0\text{'}2)$

19. **Gostota standardizirane normalne (Gaussove) porazdelitve, ki igra zelo pomembno vlogo v statističnih raziskavah, je dana s funkcijo**

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Nariši graf te funkcije! Kakšne lastnosti opaziš? Kakšen pa bi bil graf funkcije

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

glede na graf standardizirane normalne porazdelitve?

Rešitev:
Graf. Funkcija je soda. Je zvonaste oblike. Graf $p_{\mu,\sigma}(x)$ nestandardizirane normalne porazdelitve je prav tako zvonaste oblike, le da je graf $p(x)$ za vrednost μ premaknjen v desno in za faktor σ raztegnjen (sploščen).