

DOMAČA NALOGA

Vektorji. Definicija, seštevanje in množenje s skalarjem. Linearna neodvisnost, baza, koordinatni sistem. Skalarni, vektorski in mešani produkt.

1. V trapezu $ABCD$ sta vzporedni stranici AB in DC , stranica AB pa je dvakrat daljša od stranice DC . V kakšnem razmerju deli diagonala BD diagonalo AC ?
2. V \mathbb{R}^3 naj bodo dane točke $A(5, -2, 2)$, $B(3, -4, 6)$ in $C(2, 1, -1)$.
 - (a) Izračunaj dolžino daljice AB .
 - (b) Izračunaj kot $\angle BAC$.
3. V \mathbb{R}^3 naj bodo dane točke $A(5, -3, 4)$, $B(7, -2, 2)$ in $C(3, -1, 3)$. Pokaži, da je $\triangle ABC$ enakokrak pravokotni trikotnik in izračunaj dolžino hipotenuze trikotnika.
4. Dana sta vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Določi takšni števili x in y , da bo vektor $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$ pravokoten tako na vektor \vec{a} kot na \vec{b} .
5. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} vektorja, ki oklepata kot 60° in je $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$. Označi vektorja $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$.
 - (a) Izračunaj $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.
 - (b) Pokaži, da je $\langle \vec{d}, \vec{b} \rangle = 3\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle$.
 - (c) Izračunaj $\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle$.
 - (d) Izračunaj $\|\vec{c}\|$ in $\|\vec{d}\|$.
6. V kvadru s stranicami dolžin 1, 2 in 3 izračunaj dolžino telesne diagonale.
7. V enakokrakem trapezu naj bo dolžina daljše osnovnice enaka 2, dolžina krakov pa 1. Pri tem naj kraka z daljšo osnovnico oklepata kot 60° . S pomočjo vektorjev izračunaj dolžino diagonal in krajše osnovnice.
8. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} enotska vektorja (torej vektorja dolžine 1), ki oklepata kot 60° . Določi takšno konstanto α , da bosta vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ in $\alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ pravokotna.
9. Dana sta vektorja

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči taka vektorja \vec{c} in \vec{d} , da velja $\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}$, vektor \vec{c} je vzporeden vektorju \vec{b} , vektor \vec{d} pa je pravokoten na vektor \vec{b} .

10. Vektor $2\vec{a} - \vec{b}$ je pravokoten na vektor $\vec{a} + \vec{b}$, vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$ pa je pravokoten na vektor $2\vec{a} + \vec{b}$. Določi kot med vektorjema \vec{a} in \vec{b} .

11. Dana sta vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

(a) Določi takšno število α in tak vektor $\vec{c} \perp \vec{a}$, da bo $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \vec{c}$.

(b) Določi takšno število β in tak vektor $\vec{d} \perp \vec{b}$, da bo $\vec{a} = \beta\vec{b} + \vec{d}$.

12. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} takšna vektorja, da je $\|\vec{a}\| = 2$, kot med njima $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ in da sta vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$ pravokotna. Določi dolžino vektorja \vec{b} .

13. Dan je trikotnik z oglišči $A(-1, 0, 1), B(2, 3, 1), C(1, 0, -1)$. Poišči točko T , kjer višina iz točke C na stranico AB seka to stranico.

14. V prostoru so dane točke $A(1, 0, 0), B(0, 5, 1)$ in $C(1, -1, 1)$.

(a) Poišči takšno točko D , da bodo A, B, C in D določale paralelogram, v katerem je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$.

(b) Izračunaj kosinus notranjega kota pri oglišču A in ploščino paralelograma.

15. Dane so točke $A(1, -2, -1), B(1, 2, 1)$ in $D(1, -1, 2)$. Določi takšno točko C , da bo $ABCD$ paralelogram (v katerem je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$) in izračunaj njegovo ploščino ter dolžine njegovih višin.

16. Točke $A(-1, 0, 1), B(0, -1, 3)$ in $C(2, 0, 4)$ so oglišča pravilnega šestkotnika $ABCDEF$, v katerem je $AB \parallel ED, BC \parallel EF$ in $CD \parallel AF$.

(a) Izračunaj koordinate oglišč D, E in F .

(b) Izračunaj ploščino šestkotnika $ABCDEF$.

(c) Izračunaj ostri kot, ki ga oklepata diagonali AC in BF .

(d) Določi tisto točko na diagonali AC , ki je najbližja oglišču F .

(e) Določi tisto točko na diagonali AD , ki je najbližja oglišču F .

17. Izračunaj ploščino, dolžine stranic in notranje kote trikotnika z oglišči

$$A(1, -1, 1), \quad B(-1, 1, 1), \quad C(1, 0, 2).$$

18. Vektorja \vec{a} in \vec{b} določata paralelogram s ploščino 5. Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $-\vec{a} - 3\vec{b}$ in $3\vec{a} + 3\vec{b}$?

19. Naj bosta $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ in \vec{b} takšna vektorja v \mathbb{R}^3 , da oklepata kot 30° in da velja $\|\vec{b}\| = 2$.

Določi ploščino paralelograma z robovi $\vec{a} + \vec{b}$ in $2\vec{a} - \vec{b}$.

20. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} pravokotna vektorja v \mathbb{R}^3 in naj velja $\|\vec{a}\| = 1, \|\vec{b}\| = 2$. Določi ploščino paralelograma z robovi $2\vec{a} - 3\vec{b}$ in $\vec{a} + 2\vec{b}$.

21. Izračunaj prostornino paralelepipeda $ABCDEFGH$, ki je napet na točke $A(2, 5, -3), B(1, 0, -2), D(2, 2, -3)$ ter $E(0, -1, 5)$ (pri tem sta $ABCD$ ter $EFGH$ njegovi vzporedni ploskvi in $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$).

22. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ naj bodo paroma pravokotni in naj velja $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ in $\|\vec{c}\| = 2$.
- Izračunaj $|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$.
 - Določi volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{b} - 2\vec{c}$ in $\vec{a} + 3\vec{c}$.
23. Vektorji \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} določajo paralelepiped s prostornino 5. Določi prostornino paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $-2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$ in $-3\vec{a} - 2\vec{b}$.
24. Vektorji \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} so enotski vektorji in zanje velja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = 45^\circ$ ter $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$. Izračunaj volumen paralelepipeda z robovi $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{a} in $\vec{c} + 2\vec{b}$.
25. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} takšna vektorja v \mathbb{R}^3 , da velja $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$ in da sta vektorja $\vec{c} = \vec{a} + 6\vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pravokotna. Preveri, da sta vektorja \vec{a} in \vec{c} neničelna, in pokaži, da sta vzporedna.
26. Pokaži:
- $$\langle (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}), \vec{c} + \vec{a} \rangle = 2\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$
27. Pokaži:
- $$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{d} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{d} \rangle \vec{a} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d}.$$
28. Pokaži, da za enotska vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ velja enakost
- $$\left\langle (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^3.$$
29. Naj bosta \vec{a} in \vec{b} vektorja v \mathbb{R}^3 .
- Izračunaj $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}) \times \vec{b}$.
 - Izračunaj $((((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}) \times \vec{b}) \times \vec{a}) \times \vec{b}$.
30. V \mathbb{R}^3 naj bodo dane točke $A(-1, 0, 1)$, $B(0, -1, 3)$ in $C(2, 0, 4)$.
- Določi enačbo premice p , ki poteka skozi točki A in C .
 - Določi enačbo premice q , ki je vzporedna premici BC in poteka skozi A .

DOMAČA NALOGA – rezultati

Vektorji. Definicija, seštevanje in množenje s skalarjem. Linearna neodvisnost, baza, koordinatni sistem. Skalarni, vektorski in mešani produkt.

1. 2 : 1
2. (a) $2\sqrt{6}$
(b) $\cos \angle BAC = -\frac{\sqrt{2}}{3}$
3. Pokaži, da je $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 0$, $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 3$ in dolžina hipotenuze $\|\vec{BC}\| = 3\sqrt{2}$.
4. $x = -2$, $y = 1$.
5. (a) 1
(b) Izračunaj, da je $\langle \vec{d}, \vec{b} \rangle = 9$ in $\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = 3$.
(c) 15
(d) $\|\vec{c}\| = 2\sqrt{3}$ in $\|\vec{d}\| = \sqrt{21}$.
6. $\sqrt{14}$.
7. Dolžini diagonal: $\sqrt{3}$, dolžina krajše osnovnice: 1.
8. $\alpha = -4$
9. $\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.
10. $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.
11. (a) $\alpha = -\frac{1}{6}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 33 \\ 3 \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$,
(b) $\beta = -\frac{2}{15}$, $\vec{d} = \begin{bmatrix} 64 \\ 138 \\ -\frac{28}{15} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.
12. $\|\vec{b}\| = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$
13. $T(0, 1, 1)$
14. (a) $D(2, -6, 0)$
(b) $\cos(\angle A) = -\frac{31}{\sqrt{999}}$, $pl_{ABCD} = \sqrt{38}$.

15. $C(1, 3, 4)$, $pl_{ABCD} = 10$, $v_{AB} = \sqrt{5}$, $v_{AD} = \sqrt{10}$.
16. (a) $D = (3, 2, 3)$, $E = (2, 3, 1)$ in $F = (0, 2, 0)$.
 (b) $pl = 9\sqrt{3}$.
 (c) 60°
 (d) $A(-1, 0, 1)$
 (e) $T(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
17. $pl_{ABC} = \sqrt{3}$, $\|AB\| = 2\sqrt{2}$, $\|AC\| = \sqrt{2}$, $\|BC\| = \sqrt{6}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.
18. 30
19. 21
20. 14
21. 18
22. (a) 4
 (b) 28
23. 55
24. 1
25. Namig: Preveri, da je $\|\vec{a}\| > 0$, $\|\vec{c}\| > 0$ in $\|\vec{a} \times \vec{c}\| = 0$.
26. Ni rezultata.
27. Ni rezultata.
28. Ni rezultata.
29. (a) $-\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{a} \times \vec{b}$
 (b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \vec{a} \times \vec{b}$
30. (a) $p : \frac{x+1}{3} = \frac{z-1}{3}$, $y = 0$.
 (b) $q : \frac{x+1}{2} = y = z - 1$.