
2. DOMAČA NALOGA - KEMIJSKO INŽENIRSTVO

predmet: MATEMATIKA 1

prof. Peter Legiša, asist. Andreja Drobnič Vidic

ZAPOREDJA

Matematika lahko odkrije zaporedje celo v kaosu.

S. Stein

1. Točka se giblje po premici v ravnini xy s stalno hitrostjo. V času $t = 0$ je v točki $A(2, -1)$, v času $t = 1$ v točki $B(-1, 3)$. Določi lego točke v času:
 - a) $t = \frac{1}{3}$;
 - b) $t = 2$;
 - c) $t = 10$;
 - d) poljubnem času t .
 - e) Določi vektor \vec{v} točke.
 - f) Določi velikost v hitrosti.

2. Napiši parametrično enačbo:
 - a) daljice s krajiščema $A(-1, 3, -2)$ in $B(2, -5, 4)$;
 - b) premice p , ki vsebuje to daljico;
 - c) *vodoravne premice q , ki gre skozi A in je pravokotna na p .

3. *Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{2n-3}$.
 - a) Ugotovi, ali je zaporedje monotono.
 - b) Ali ima zaporedje natančno spodnjo in zgornjo mejo?

4. Dan je splošni člen zaporedja $a_n = 3 \frac{2^{n-1}}{n!}$.
 - a) Ali je zaporedje monotono?
 - b) Ali je zaporedje navzdol omejeno?
 - c) *Ali zaporedje ima limito?

5. *Nov pralni prašek za strojno pranje ima naslednje karakteristike: poraba 80 g pralnega praška in 21 l vode. Kolikokrat pralni stroj ožame, če pri vsakem ožemanju ostane v vodi le 5 % prejšnje koncentracije pralnega praška. Pralni stroj zaključi ožemanje, če je koncentracija pralnega praška manjša od $25 \cdot 10^{-9}$. Določi še lastnosti dobljenega zaporedja.
6. Na kolikšno vrednost naraste vloga 1000 evrov na bančni račun z vsakoletnimi plogi po 1000 evrov po desetih letih pri 8,5-odstotni letni obrestni meri pri obrestnem obrestovanju? (Tu se ob koncu leta obrestujejo tudi obresti.)
7. *Določi čim več lastnosti za zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1$.
8. *Poišči čim več lastnosti za zaporedje s splošnim členom $a_n = ((-1)^n - 1)n$.
9. Določi naslednje limite:
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3\sqrt{n}}{n(\sqrt{n} - 2)}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{12n^2 + 3n + 2}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n + 2)}{\sqrt{n^4 - 3n}}$
 - * $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[3]{n^4} + 1}{\sqrt{n^4} + n}$
10. Za zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{4n + 6}{2n - 5}$ ugotovi,
- ali je monotono,
 - kolikšna je natančna zgornja in spodnja meja,
 - koliko členov je zunaj ϵ -ske okolice limite ($\epsilon = 0,001$)?
11. Določi limito preprostega zaporedja z začetnimi členi $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$. Nato določi še lastnosti zaporedja, kot sta monotonost in omejenost.
12. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$. Določi limito in ugotovi, koliko členov zaporedja je zunaj ϵ -ske okolice limite $\epsilon = \frac{1}{100}$.
13. Izračunaj naslednje limite:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n-1}}{4 - 3^n}$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2 \cdot 4^{n-1}}{4^{n+1} - 2^n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3e^n + 2}{2e^{n+1} + 3}$$

14. Reši naslednje limite:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n - \sqrt{4n^2 - 2}}$$

$$\text{b)* } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

15. Izračunaj naslednje limite :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{2n}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1}\right)^{n+1}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$$

$$\text{d)* } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^n \frac{n+1}{3n+1}\right)^n$$

16. *Poišči nekaj začetnih členov zaporedja, ki predstavlja ekološki model omejene rasti in je podano z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = ka_n(1 - a_n), \quad a_1 = 0,3,$$

če je konstanta hitrosti rojevanja enaka $k = 2,5$. Določi limito za to zaporedje, če veš, da limita obstaja.

17. *Divergentne vrste so v celoti hudičeva iznajdba in sremota je, da si na njih upajo graditi kakršnekoli dokaze. Z njihovo uporabo je mogoče izpeljati karkoli in prav one so povzročile toliko neuspehov in paradoksov. Si lahko predstavljate kaj bolj nesprejemljivega kot trditev, da je $0 = 1 - 2^n + 3^n - \dots$, kjer je n naravno število? Risum, teneatis, amici? (Horacijeve besede: "Mar lahko zadržujete smeh, prijatelji? ")*

N.H. Abel

Za splošno geometrijsko vrsto izpelji n -to delno vsoto in neskončno vsoto.

18. * Antibiotik razpada v človeškem telesu z razpadnim časom 2,5 ure. Ob predpostavki, da pacient vzame 250 miligramsko tableto antibiotika vsakih 6 ur, izračunaj približno vrednost antibiotika v telesu takoj po končani terapiji (28 tablet).

19. Dana je vrsta s splošnim členom $a_n = \frac{1}{3^n}$.

a) Izračunaj delne vsote za prvih 5 členov.

b) Določi neskončno vsoto vrste!

20. Ugotovi, ali vrsta s splošnim členom a_n za naravna števila n konvergira.

a) $a_n = 100 \cdot 2^{-3n+1}$

b) $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$

c)* $a_n = ne^{-n}$

d)* $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^5 + n + 1}}$