REŠITVE 2. DOMAČE NALOGE - KEMIJSKO INŽENIRSTVO

predmet: MATEMATIKA 1

prof. Peter Legiša, asist. Andreja Drobnič Vidic

ZAPOREDJA

Matematika lahko odkrije zaporedje celo v kaosu.

S. Stein

1. a) $T(1, \frac{1}{3})$;
   b) $T(-4, 7)$;
   c) $T(-28, 39)$;
   d) $\vec{r_T} = (2, -1) + t(-3, 4)$
   e) $\vec{v} = (-3, 4)$
   f) $v = 5$

2. a) $AB = t(3, -8, 6)$; $0 \geq t \geq 1$
   b) $x = -3t - 1, y = -8t + 3, z = 6t - 2$; t realno število
   c) $^*x = 8t - 1, y = 3t + 3, z = -2$; t realno število

3. a) Členi zaporedja $\{\frac{n+2}{2n-3}\}$ so po vrsti

$$a_1 = -3, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{6}{5}, \ldots$$

   Ker je prvi člen manjši od drugega $a_1 < a_2$, je zaporedje lahko le naraščajoče $a_n \leq a_{n+1}$, ne more pa biti padajoče. Ker pa velja $a_2 > a_3$, zaporedje ni naraščajoče, saj neenakost za naraščanje ne drži za vse naravne n (za $n = 2$ ne drži). Zaporedje ni monotono.

   b) Od začetnih izračunanih členov je najmanjši prvi člen zaporedja $a_1 = -3$. Preverimo, da je -3 spodnja meja, torej da velja neenakost $-3 \leq a_n$ za vsak naravni n.

$$\begin{aligned}
-3 &\leq \frac{n+2}{2n-3} \qquad / \cdot (2n-3) \quad \text{in postavimo pogoj } n > 1 \\
-6n + 9 &\leq n + 2 \\
-7n &\leq -7 \qquad / \cdot (-\frac{1}{7}) \\
n &\geq 1
\end{aligned}$$

   Zadnja neenakost velja za vse naravne n, ki izpolnjujejo pogoj $n > 1$, zato zanje veljajo tudi vse prejšnje neenakosti, tudi prva. Ker velja neeakost tudi za $n=1$, saj je $-3 \leq \frac{1+2}{2\cdot(1)-1}$, velja neenakost prav za vsa naravna števila. Torej je prvi člen -3 spodnja meja. Ker je $a_1=-3$, je to natančna spodnja meja.

4. a) Zaporedje je monotono (padajoče).
   b) Da.
   c) Da.

5. Začetno koncentracijo pralnega praška v vodi a_0 izračunamo kot količnik mase pralnega praška in celotne mase zmesi (praška in vode) v kilogramih

$$a_0 = \frac{\text{prašek}}{\text{prašek in voda}} = \frac{80\cdot 10^{-3}}{80\cdot 10^{-3}+21} \approx \frac{80\cdot 10^{-3}}{21}.$$

Po prvem ožemanju se koncentracija pralnega praška zmanjša, tako da je koncentracija enaka $a_1 = 0{\dot{}}05\cdot a_0$. Podobno se koncentracija zmanjšuje z vsakim naslednjim ožemanjem, tako da velja naslednja rekurzivna formula $a_n = 0{\dot{}}05\cdot a_{n-1}$. Koncentracija po n ožemanjih je

$$a_n = (0{\dot{}}05)^n a_0 = (0{\dot{}}05)^n \cdot \frac{80\cdot 10^{-3}}{21}.$$

Z ožemanjem končamo, ko velja $(0{\dot{}}05)^n \cdot \frac{80\cdot 10^{-3}}{21} < 25\cdot 10^{-9}$, kar lahko zapišemo

$$\frac{5^n}{10^{2n}} < \frac{21\cdot 25}{80}10^{-6} \approx \frac{25}{4}\cdot 10^{-6} = \frac{5^4}{10^8}.$$

Mejna vrednost je pri $n=4$. Izračunamo, da pri $n=3$ neenakost ne velja, pri $n=4$ pa velja. Potrebna so torej 4 ožemanja. Opomba.[1]

6. 17096,08 evrov

7. $m=0$, $M=\frac{3}{2}$, ni monotono, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}+1=1$

8. navzdol neomejeno, $M=0$, ni monotono, ni limite, steklaišče $s=0$

9. a) 0
   b) ∞
   c) 1
   d) 0

10. a) ni monotono

[1]Zaradi narave problema je pogosto prikladneje, če člene zaporedja začnemo šteti od 0 dalje. Tako je tudi v našem primeru, ko indeks člena zaporedja pomeni hkrati število ožemanj.

b) $M = 18, \quad m = -14$

c) 1998 ?

11. $a_n = 2(\frac{1}{3})^n$; strogo padajoče; omejeno: $m = 0$, $M = \frac{2}{3}$, limita je 0

12. $\lim_{n\to\infty} 2 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n) = 2$; 7

13. a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n-1}}{4 - 3^n} = -\frac{2}{3}$ (namig: Upoštevamo formulo za razcep potence.)

b) $\dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{3}{2e} \approx 0{\cdot}55$

14. a) ni realne limite

b) 0

c) $\dfrac{1}{2}$

15. a) e^4

b) $\sqrt{e^3} \approx 4{\cdot}48$

c) e^2

d) $\sqrt[3]{e^2} \approx 1{\cdot}95$

16. Izračunamo nekaj začetnih členov:

$$a_1 = 0{\cdot}525, \quad a_2 = 0{\cdot}623, \quad a_3 = 0{\cdot}587, \ldots$$

Takoj opazimo, da zaporedje ni monotono.
Če limita obstaja, potem je limita zaporedja $\{a_n\}$ enaka limiti zaporedja $\{a_{n+1}\}$, ki se od zaporedja $\{a_n\}$, razlikuje le toliko, da se začne šele z 2. členom zaporedja $\{a_n\}$. Zato sta tudi limiti obeh zaporedij enaki in ju lahko označimo z a. Obe strani rekurzivne formule limitiramo.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} 2{\cdot}5a_n(1 - a_n) \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} 2{\cdot}5 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} (1 - a_n) \\
a &= 2{\cdot}5a(1 - a) \\
2{\cdot}5a^2 - 1{\cdot}5a &= 0 \\
a_1 = 0, \quad & \quad a_2 = 0{\cdot}6
\end{aligned}$$

Limita je lahko 0 ali 0·6. Ker je začetni člen $a_1 = 0{\cdot}3$, s popolno matematično indukcijo lahko pokažemo, da so vsi členi zaporedja tudi večji od 0·3. To pa pomeni, da je tudi limita večja ali kvečjemu enaka tej vrednosti, zato ne more biti 0. Limita zaporedja je torej 0·6.

17. $a_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$; Vsota vrste je $\dfrac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$.

18. $\dfrac{121}{243}$; $\dfrac{1}{2}$

19. Iz Wikipedije lahko preberemo, da je razpadni čas v jedrski fiziki čas, v katerem pade število atomskih jeder, ki radioaktivno razpadajo, na $1/e$ začetne vrednosti, pri čemer je e osnova naravnega logaritma. Razpolovni čas je v jedrski fiziki čas, v katerem pade število atomskih jeder, ki radioaktivno razpadajo, na eno polovico začetne vrednosti. Izpeljimo rešitev za rapolovni čas, ker so zapisi enostavnejši.

    Poglejmo najprej, kako razpada 1. tableta antibiotika:
    1. V času $t = 0$ ure imamo 250 mg tablete antibiotika.
    2. Po $t = 2{\cdot}5$ ure imamo $0{\cdot}5 \cdot 250$ mg tablete antibiotika.
    3. Po $t = 5$ ur le še $0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 250$ mg tablete antibiotika in tako naprej.
    V terapiji imamo skupno $t = 27 \cdot \frac{6}{2{\cdot}5}$ razpadov (približno 65 razpadov), zato od prve tablete na koncu ostane

    $$Q_1 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{27 \cdot \frac{6}{2{\cdot}5}} \quad \text{mg}.$$

    Druge tablete imajo zaporedoma manj razpadov. Zapišemo po vrsti

    $$Q_2 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{26 \cdot \frac{6}{2{\cdot}5}}, \quad Q_3 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{25 \cdot \frac{6}{2{\cdot}5}}, \quad Q_4 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{23 \cdot \frac{6}{2{\cdot}5}}, ...,$$

    in zadnja $Q_{28} = 250 \cdot (0{\cdot}5)^0$. Cilj je sešteti končno geometrijsko vrsto.

    $$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + ... + Q_{28} &= 250 \cdot (((0{\cdot}5)^{\frac{6}{2{\cdot}5}})^{27} + ((0{\cdot}5)^{\frac{6}{2{\cdot}5}})^{26} + ... + ((0{\cdot}5)^{\frac{6}{2{\cdot}5}})^0) = \\ &= \frac{1 - ((0{\cdot}5)^{\frac{6}{2{\cdot}5}})^{28}}{1 - (0{\cdot}5)^{\frac{6}{2{\cdot}5}}} \\ &= 308 \quad \text{mg}. \end{aligned}$$

    Po terapiji je v telesu 308 mg antibiotika. Opazimo, da se masa bistveno ne spremeni z daljšanjem terapije. (Kasneje v času študija pri matematiki lahko z znanjem diferencialnih enačb izpeljemo bolj znano splošno formulo.)