3. DOMAČA NALOGA - KEMIJSKO INŽENIRSTVO

predmet: MATEMATIKA 2
asistent: Andreja Drobnič Vidic

1. *Na svetu je veliko težkih stvari, vendar ni nič težjega od štirih aritmetičnih operacij.*

   B. Venerabilis

   Izračunaj naslednjo determinanto.
   $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Izračunaj naslednjo determinanto.
   $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Podane so matrike:
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$
   Izračunaj naslednje matrike, če obstajajo: $C^T - B, A^T C, ABC$.

4. Izračunaj inverz matrike, če obstaja.
   $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Reši matrično enačbo $XA = 20A^T \cdot I$ za enotsko matriko I in matriko
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Reši matrično enačbo $AXB + AX = I$ za enotsko matriko I in matriki
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \text{ in B=} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. *Algebra ne uporablja besed, ampak samo matematične znake. Če ta jezik obvladamo, lahko vanj prevedemo za nas zanimive izraze iz vsakdanje govorice.*

   G. Polya

   Podan je sistem enačb.

   $$ax + 3y + z = 2$$

   $$-2x + y - 2z = 0$$

   $$x - 2y + az = -3$$

   Ugotovi, za katere vrednosti a je sistem enolično rešljiv. Reši sistem za $a = 0$.

8. Reši naslednji sistem enačb. Kakšen je rang pripadajoče matrike?

   $$x + 2y + 3z + 4u = 1$$

   $$x + y + z + 3u = 2$$

   $$y + 2z + u = 1$$

9. Študent ima denar na treh računih, kjer je 5-odstotna, 7-odstotna in 8-odstotna letna obrestna mera. Na računu z 8-odstotno obrestno mero ima 3 krat toliko denarja kot na tistem s 5-odstotno obrestno mero. Skupno ima na računu 1600 evrov. Letni donos pa je 115 evrov. Koliko denarja je na vsakem računu?

10. Skozi zaporedno postavljene tri plasti modularnih panelov za okna z ene strani padajo svetlobni žarki. Na vsaki plasti se 70 % žarkov odbije na plasti, 20 %del pa prodre naprej proti naslednji plasti, nekaj pa se jih absorbira. Označimo z x delež vseh svetlobnih žarkov, ki gredo od 1. do 2. plasti, z y delež vseh žarkov od 2. plasti nazaj do 1. plasti, z z delež vseh žarkov, ki gredo od 2. do 3. plasti, z w delež vseh tistih žarkov, ki gredo od 3. plasti nazaj do 2. plasti, in s t delež tistih, ki gredo od 3. plasti na drugo stran modularnih panelov. Količino svetlobnih žarkov x, ki gredo od 1. do 2. plasti, sestavljajo žarki, ki gredo neposredno skozi 1. plast - teh je 70 % in tisti žarki, ki so se zaradi odbojnosti svetlobnih žarkov vrnili nazaj do 1. plasti (označili smo jih z y) in se jih 20 % odbije od 1. plasti nazaj k 2. plasti:

    $$x = 0^{\cdot}7 + 0^{\cdot}2y.$$

    Podobno določimo druge enačbe.

    $$y = 0^{\cdot}7w + 0^{\cdot}2x$$

    $$z = 0^{\cdot}7x + 0^{\cdot}2w$$

    $$w = 0^{\cdot}2z$$

    $$t = 0^{\cdot}7z$$

Enačbe množimo z 10 in zapišemo matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 0 & -7 & 0 \\ -7 & 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Preveri, da je njena determinanta različna od nič, in z Gaussovo metodo nato določi rešitev za količino žarkov, ki pridejo skozi vse tri modularne plasti.

11. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ali lahko matriko A diagonaliziramo? Če jo lahko, določi matriko P, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna matrika.