REŠITVE 1. DOMAČE NALOGE - KEMIJSKO INŽENIRSTVO

predmet: MATEMATIKA 2 (asist. Andreja Drobnič Vidic)

1. Drugi Taylorjev polinom za funkcijo $f(x) = \ln x$ okoli 1 je v točki 1'1 enak

$$\ln(1'1) = ((1'1 - 1) + -\frac{1}{2}(1'1 - 1)^2 \doteq 0'095.$$

2. Pomagamo si z razvoji posameznih sumandov funkcije $f(x) = xe^x - \ln(1 - x)$ v Taylorjevo vrsto okoli 0. Ocenimo vsoto na tri decimalke natančno

$$f(0'1) = 0'216.$$

3. Funkcijo $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 2$ tako, da najprej napravimo zamenjavo $x - 2 = t$, kjer gre t proti 0. Novo funkcijo razvijemo s pomočjo znanjega razvoja v geometrijsko vrsto. Rezultat:

$$f(x) = 4 + (x - 2)^2 - (x - 2)^3 + (x - 2)^4 - (x - 2)^5 + ...$$

Od tod $f^{(17)}(2) = -17!$.

4. Po razvoju funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$ dobimo začetne člene:

$$f(x) = 2x^3 + x^4 + \frac{2}{3}x^5 + ...$$

Primerjamo jo s splošno formulo za razvoj v Taylorjevo vrsto okrog $x = 0$ in ugotovimo, da je

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) \neq 0.$$

Funkcija ima torej v točki $x = 0$ prevoj.

5. Zopet si pomagamo z uvedbo nove spremenljivke $x - 1 = t$ in uporabimo nekaj trigonometrijskih formul, da dobimo rezultat

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \frac{2x-2}{x+1}}{\sin^3(\pi x)} = -\frac{1}{12\pi^3}.$$

6. Tangenta na dano krivuljo v točki $T(2, y)$ ima obliko $y = 54x - 111$. Lokalni ekstrem je v $T(0, -3)$.

7. Funkcija
$$v(t)=\frac{\cos t}{1+\sin t}$$
nima ekstremov. Na vsem definicijskem območju funkcija pada.
Na intervalih $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ je konveksna, na intervalih $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ je konkavna. Drugi odvod je nič v točkah $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. V teh točkah ima torej pospešek ekstrem.

8. Ekstreme funkcije, ki je podana parametrično:
$$x=t^3-t, \quad y=3t^4-4t^2+1$$
dobimo s pomočjo 1. in 2. odvoda:
$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad y''=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}.$$
Krivulja ima pri $t=0$, torej v točki $T_1(0,1)$ maksimum, pri $t=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, torej v točkah $T_2(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3})$ in $T_2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3})$ pa maksimum.