

2. izpit iz Matematike 2

Kemijsko inženirstvo

11. 2. 2009

1. Funkcija $F(a)$ je za $a \geq 0$ definirana kot

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + a^2 x^2)}{1 + x^2} dx.$$

(a) Izračunaj odvod $F'(a)$.

(b) Izračunaj $F(a)$.

2. (a) i. Poišči tisti $a \in \mathbb{R}$, za katerega je $y = x + a$ rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0.$$

ii. Poišči splošno rešitev zgornje enačbe.

(b) Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$(x - y + 1) + (y - x + 1)\frac{dy}{dx} = 0,$$

ki gre skozi točko $x = 0, y = 0$. Rešitev je lahko v implicitni obliki.

3. Dano je vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{1-x}}{y}, x^2 + y^2, z \right).$$

Izračunaj integral

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r},$$

po krivulji $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 4, z > 0\}$. Krivulja γ je orientirana tako, da je njena projekcija na xy -ravnino orientirana pozitivno.

4. Imamo dve kocki. Na prvi kocki so števila 1, 1, 2, 2, 3, 3, na drugi pa števila 1, 2, 2, 3, 3, 3. Obe kocki sta pošteni (verjetnost za posamezen izid je vedno enaka 1/6). Kocki hkrati vržemo in pogledamo, kateri števili sta na kockah. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki je seštevek obeh števil.

(a) Določi porazdelitev spremenljivke X .

(b) Izračunaj matematično upanje $E(X)$ in disperzijo $D(X)$.