VEKTORSKE FUNKCIJE

Vektorske funkcije so funkcije, katerih rezultat preslikave je vektor v prostoru. Preslikave so:

preslikava	rezultat
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	$\vec{f}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$\vec{f}(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\vec{f}(x,y,z) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right)$

Pravila za zveznost vektorskih funkcij so enaka, kot pri navadnih funkcijah: $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\vec{f} \to 0$.

Odvod vektorskih funkcij

Odvod vektorske funkcije je enak limiti diferenčnega količnika, kar zapišemo kot: $\vec{f}'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}, \dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}, \dfrac{z(t+h)-z(t)}{h}\right)$. Lahko pa odvod zapišemo še kot: $\dot{\vec{f}}(t) = \vec{f}'(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\right)$, če so komponente odvedljive.

Pravila, ki veljajo so podobna kot za ostale funkcije:

a) Vsota in razlika: $\left(\alpha\vec{f}(t) \pm \beta\vec{g}(t)\right)' = \alpha\vec{f}'(t) \pm \beta\vec{g}'(t)$

b) Skalarni produkt: $\left(\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\right)' = \vec{f}'(t)\vec{g}(t) + \vec{f}(t)\vec{g}'(t)$

c) Vektorski produkt: $\left(\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right)' = \vec{f}'(t)\times\vec{g}(t) + \vec{f}(t)\times\vec{g}'(t)$

in druga.

Podobne odvode lahko zapišemo tudi za funkcije večih spremenljivk. Na primer za funkcijo dveh spremenljivk z obliko: $\vec{f}(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$. Parcialni odvod na u je: $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial u}(u,v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$. Za fukcijo treh spremenljivk pa je enak:

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right)$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial x}\right).$$

Zgled:

$\vec{f}(x,y,z) = -\vec{r}\cdot e^{-\vec{r}^2} = -\left(x\cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)}, y\cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)}, z\cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)}\right)$, kjer je $\vec{r} = (x,y,z); \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Odvod na x je enak $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial x}(x,y,z) = e^{-\vec{r}^2}\left(-1+2x^2, 2xy, 2xz\right)$.

Krivulje v prostoru

Krivulje v prostoru lahko podajamo na tri načine:

a) eksplicitno $y = y(x), z = z(x)$

b) implicitno $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$

c) parametrično – podamo zvezo $\vec{r} = \vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, kjer je $\vec{r}(t)$ krajevni vektor do točko na krivulji.

Zgled:

1. Enačba premice: $\vec{r} = (1, 2-1) + t(1,1,3) = (1+t, 2+t, -1+3t)$
2. Imamo enačbo

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4 - t^2}$$

$$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - t - \sqrt{4 - t^2}$$

parametriziramo:

$$x = t$$

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt{4 - t^2}, 1 - t - \sqrt{4 - t^2})$$

ker imamo dve veji, je bolje, da zapišemo oz. uporabimo drugo spremenljivko:

$$x = 2\sin t$$

$$y = 2\cos t$$

$$z = 1 - 2\sin t - 2\cos t$$

$$\vec{r}(t) = \left(2\sin t, 2\cos t, 1 - 2\sin t - 2\cos t\right)$$

3. Enačba vijačnice:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt); \quad a, b > 0$$

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

$$z = bt$$

Dolžina krivulje

Dolžino nekega dela krivulje med dvema točkama lahko izračunamo po enačbi za vektorsko dolžino:

$$\overline{T_k T_{k+1}} = \left|\vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k)\right| = \sqrt{\left[x(t_{k+1}) - x(t_k)\right]^2 + \left[y(t_{k+1}) - y(t_k)\right]^2 + \left[z(t_{k+1}) - z(t_k)\right]^2}$$

z upoštevanjem zveze $\left[x(t_{k+1}) - x(t_k)\right] \doteq \dot{x}\left(\tilde{t}_k\right)\Delta t_k$

$$\doteq \sqrt{\left[\dot{x}(\tilde{t}_k)\right]^2, \left[\dot{y}(\tilde{t}_k)\right]^2, \left[\dot{z}(\tilde{t}_k)\right]^2} \cdot \Delta t_k$$

Če seštejemo te prispevke in jih limitiramo, dobimo dolžino loka krivulje od točke, kjer je $t = \alpha$ do točke, kjer je $t = \beta$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\dot{x}(\tilde{t}_k)\right]^2, \left[\dot{y}(\tilde{t}_k)\right]^2, \left[\dot{z}(\tilde{t}_k)\right]^2} \cdot \Delta t_k \Rightarrow$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\dot{x}(\tilde{t}_k)\right]^2, \left[\dot{y}(\tilde{t}_k)\right]^2, \left[\dot{z}(\tilde{t}_k)\right]^2} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} dt$$

Če je krivulja dana eksplicitno, njeno dolžino lahko izračunamo po enačbi: $l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}$, kjer upoštevamo, da je $\vec{r} = (x, y'(x), z'(x))$, x pa predstavlja parameter. Začetna točka je a, končna pa b.

Zgled:
Dolžina enega zavoja vijačnice:

$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$

$\dot{\vec{r}} = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>Naravni parameter</u>
Krivuljo izrazimo z naravnim parametrom s, če izrazimo (obrnemo) t kot funkcijo s: $t = g(s)$ in to vstavimo v enačbo krivulje. Pri tem dobimo funkcijo $\vec{r}(s)$, ki nam pove, da se pri določenem s nahajamo na v točki na krivulji, ki je za s oddaljena od začtka. Enačba je potem enaka: $s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} dt$. Zveza med diferencialom parametra t in diferencialom parametra s je: $ds = \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}} \cdot dt$. Odvod funkcije po parametru n je enak 1 in potrdi definicijo odvoda, da je smerni vektor tangente krivulje v prostoru:

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$$

$|\vec{r}'(s)| = 1$.

$ds = |\vec{r}'(s)| dt$

Enačba tangente in normalne ravnine

Smerni vektor tangente predstavlja odvod $\dot{\vec{r}}(t)$, ki ga označimo z $\vec{a}$. Enotski vektor potem lahko zapišemo kot: $\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{r}(s)$; enačbo tangente pa kot: $\vec{R} = \vec{r}(t) + \lambda \cdot \dot{\vec{r}}(t)$. Enačba normalne ravnine pa je: $\left(\vec{R} - \vec{r}(t)\right) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$, normalna ravnina je ravnina, ki preseka premico pod pravim kotom, to je pravokotna ravnina.

Zgled:

$\vec{r}(t) = \left(a\cos t, a\sin t, bt\right)$ točka $\left(0, a, \frac{b\pi}{2}\right)$. Določi enačbo tangente in normalne ravnine!

$$\left.\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} \\ \dot{\vec{r}} = (-a\sin t, a\cos t, b) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-a, 0, b)$$

$$\vec{R} = \left(0, a, \frac{\pi}{2}b\right) + \lambda \cdot \left(-a, 0, b\right)$$

normalna ravnina:

$$\left(\vec{R} - \left(0, a, \frac{\pi}{2}b\right)\right) \cdot \left(-a, 0, b\right) = 0 \Rightarrow -ax + bz = \frac{\pi}{2}b^2$$

Krivulja je dana z funkcijama $F(x,y,z) = 0$ in $G(x,y,z) = 0$. Če bi bila krivulja parametrizirana $\vec{r} = \vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, potem bi imeli $F\left(x(t), y(t), z(t)\right) = 0$ in $G\left(x(t), y(t), z(t)\right) = 0$. Če odvajamo funkciji na t, dobimo: $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \dot{z}(t) = 0$ in $\frac{\partial G}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \dot{y}(t) + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \dot{z}(t) = 0$. Uvedemo količnik (vektor) gradient, ki je enak: $\mathrm{grad}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ in $\mathrm{grad}G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$.

Enačbi sedaj lahko zapišemo kot: $\mathrm{grad}F \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$ in $\mathrm{grad}G \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$. Iz tega sledi, da je $\dot{\vec{r}}(t) = \lambda \cdot \left(\mathrm{grad}F \times \mathrm{grad}G\right)$. V tem primeru je vektor v smeri tangente vektorski produkt gradientov: $\dot{\vec{r}}(t) = \lambda \cdot \left(\mathrm{grad}F \times \mathrm{grad}G\right)$, če je le različen od nič.

Zgled:

Krivulja je dana s presekom ploskev: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in $x^2 + y^2 = ax$. Določi enačbo tangente, kjer je $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}, z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\mathrm{grad}F = (2x, 2y, 2z) \;\Big|_T = (a, a, a\sqrt{2})$$
$$\mathrm{grad}G = (2x - 0, 2y, 0) \;\Big|_T = (0, a, 0)$$

$$\operatorname{grad}F \times \operatorname{grad}G = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ a, & a, & a\sqrt{2} \\ 0, & a, & 0 \end{vmatrix} = \left(-a^2\sqrt{2}, 0, a^2\right) = a^2\left(-\sqrt{2}, 0, 1\right)$$

enačba tangente: $\vec{R} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda \cdot \left(-\sqrt{2}, 0, 1\right)$

$A(a, 0, 0)$

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad}F = (2a, 0, 0) \\ \operatorname{grad}G = (a, 0, 0) \end{array}\right\}$ vektorja sta vzporedna, ker je vektorski produkt enak nič,

zato izračunamo z metodo:

$$x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos t$$

$$y = \frac{a}{2}\sin t$$

$$\left[\frac{a}{2}(1 - \cos t)\right]^2 + \left[\frac{a}{2}\sin t\right]^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \pm a \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{a}{2}(1 - \cos t), \frac{a}{2}\sin t, \pm a \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

ne dobimo ustrezne tangente, ker je oblika krivulje špičasta

Ploskve v prostoru

Podajamo jih z naslednjimi oblikami enačb:

- eksplicitno: $z = z(x, y)$
- implicitno: $F(x, y, z) = 0$
- parametrično: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Zgled:

1. Imamo kruvuljo oblike:
   $x + 2y - 3z = 1$
   implicitno: $x + 2y - 3z - 1 = 0$
   eksplicitno: $z = \frac{1}{3}\left(x + 2y - 1\right)$
   parametrično: $\vec{r}(u, v) = \vec{r} = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right) + u\left(1, 0, \frac{1}{3}\right) + v\left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$
2. Enačbo krogle $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ parametriziramo s sfernimi koordinatami:
   $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$
   $y = r\cos\varphi\sin\vartheta$
   $z = r\sin\varphi$
   $r = a$
   $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \vartheta)$

   $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \vartheta) = (a\cos\varphi\cos\vartheta, a\cos\varphi\sin\vartheta, a\sin\varphi)$
   če enega od parametrov fiksiramo, dobimo koordinate krivulje,
   in sicer dobimo dve družini krivulj
3. Enačba paraboloida
   $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, u^2)$

Normala na ploskev

Če imamo neko ploskev v prostoru, podano <u>parametrično</u>, pogledamo dve koordinatni krivulji, kje se sekata. Tedaj je normalni vektor normalne ravnine enak vektorskem produktu smernih koeficientov krivulj v presečišču: $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$; $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Rightarrow \vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Enotski vektor, to je vektor z dolžino 1, v smeri normale pa je enak: $\vec{v} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right|}$.

Če je ploskev podana <u>eksplicitno</u>, potem lahko prevedemo na zgornji primer: $\vec{r} = (x, y, z(x, y))$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_x &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)\\ \vec{r}_y &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ 1, & 0, & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0, & 1, & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (-p, -q, 1)$$

Kjer označimo s $p=\frac{\partial z}{\partial x};\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Vektor v smeri normale je potem enak: $\vec{N}=(-p,-q,1)$, enotski vektor pa zapišemo kot: $\vec{v}=\frac{(-p,-q,1)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; kjer je $p=\frac{\partial z}{\partial x};\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Če pa imamo ploskev podano implicitno, kot $F(x,y,z)=0$, pa postopamo po naslednjem postopku:

najprej odvajamo enačbo na x in nato še na y:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Vektor v smeri normale je potem enak: $\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},1\right)=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)}_{=\mathrm{gradF}}$. Normalo pa lahko sedaj zapišemo kot: $\vec{N}=\mathrm{gradF}$, enotski vektor pa je enak: $\vec{v}=\frac{\mathrm{gradF}}{|\mathrm{gradF}|}$.

Zgled:

1. Imamo enačbo:

$$z=x^2+y^2;\ T(1,1,2)$$

normala :

$$p=2x$$

$$q=2y$$

$$\vec{N}=(-p,-q,1)=(-2x,-2y,1)\big|_T=(-2,-2,1)$$

2. Ploskev je podana z enačbo:

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(2u+2v,3u-3v,2uv);\quad T(6,3,4);\ u=2,v=1$$

$$\vec{r}_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=(2,-3,2u)\big|_T=(2,3,2)$$

$$\vec{r}_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=(2,3,2v)\big|_T=(2,-3,4)$$

$$\vec{N}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k}\\ 2, & 3, & 2\\ 2, & -3, & 4\end{vmatrix}=(18,-4,-12)=2(9,-2,-6)$$

enačba normalne premice: $\vec{r}=(6,3,4)+\lambda\cdot(9,-2,-6)$

enačba pritisnjene (tangencialne) ravnine: $(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{N}=0\Rightarrow 9x-2y-6z=24$

3. Enačba ploskve:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}-1=0;\ T(2,1,\sqrt{2})$$

$$\vec{N}=\operatorname{grad}F=\left(\frac{x}{8},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right)_T=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(1,2,2\sqrt{2}\right)$$

enačba normalne premice: $\vec{r}=(2,1,\sqrt{2})+\lambda\cdot\left(1,2,2\sqrt{2}\right)$

Vektorska analiza

Ločimo dve vrsti polj:

- skalarno polje: $u(F)=u(x,y,z)$
  primeri iz narave: temperatura, gostota plinov tekočin
- vektorsko polje: $\vec{f}(\vec{r})=\vec{f}(x,y,z)=\left(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)\right)$
  primeri iz narave: gravitacija, magnetno polje, električno polje.

Odvod skalarnega polja v dani smeri

Če gledamo med dvema točkama T_1, T_2 skalarnega polja, je kvocient funkcijskih vrednosti in dveh neodvisnih spremenljivk enak $\frac{\Delta u}{|T_1T_2|}$, kar pomeni hitrost spreminjanja polja. Ta kvocient lahko zapišemo še drugače: $\frac{u(T_2)-u(T_1)}{|T_2T_1|}$. Z upoštevanjem krajevnih vektorjev točk, vektorja $\vec{e}$, ki pomeni smer od T_1 do T_2 z velikostjo ena, $\lambda>0$, če gremo v smeri danega vektorja $\vec{e}$ in Taylorjeve formule dobimo:

$$\frac{u(T_2)-u(T_1)}{|T_2T_1|}=\frac{u(\vec{r}_2)-u(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}=\frac{u(\vec{r}_1+\lambda\vec{e})-u(\vec{r}_1)}{|\lambda\vec{e}|}=$$

$$\boxed{\vec{r}=(x,y,z);\ \vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1);\ \vec{e}=(e_1,e_2,e_3)}$$

$$=\frac{u(x_1+\lambda e_1,y_1+\lambda e_2,z_1+\lambda e_3)-u(x_1,y_1,z_1)}{\lambda}=$$

$$=\cancel{u(x_1,y_1,z_1)}+\frac{\partial u}{\partial x}\lambda e_1+\frac{\partial u}{\partial y}\lambda e_2+\frac{\partial u}{\partial z}\lambda e_3+K\lambda^2+\ldots\cancel{-u(x_1,y_1,z_1)}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}e_1+\frac{\partial u}{\partial y}e_2+\frac{\partial u}{\partial z}e_3+K\lambda+L\lambda^2+\ldots$$

Če izračunamo limito, gredo ostali členi z λ proti nič, ostane pa nam: $\frac{\partial u}{\partial\vec{e}}=\lim\limits_{T_2\to T_1}\frac{\Delta u}{|T_1T_2|}=\frac{\partial u}{\partial x}e_1+\frac{\partial u}{\partial y}e_2+\frac{\partial u}{\partial z}e_3$. Če upoštevamo še definicijo gradienta, dobimo: $\frac{\partial u}{\partial\vec{e}}=\operatorname{grad}u\cdot\vec{e}$. Zadnja enačba je odvod skalarnega polja v smeri vektorja $\vec{e}$ z normo 1.

Gradient lahko zapišemo z »nabla« operatorjem kot: $\operatorname{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\vec{\nabla}u$, kjer je »nabla« operator $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Zgled:

$$u(\vec{r}) = 10 \cdot e^{-(x^2+2y^2+4z^2)};\ T\left(1,1,\tfrac{1}{2}\right) \text{ v smeri } \vec{e} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\operatorname{grad} u = 10\left(-2xe^{-(x^2+2y^2+4z^2)}, -4ye^{-(x^2+2y^2+4z^2)}, -8ze^{-(x^2+2y^2+4z^2)} \right)$$

$$\operatorname{grad} u\big|_T = 10(-2,-4,-4)e^{-4} = -20(1,2,2)e^{-4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} u = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \left(-20\right)(1,2,2)e^{-4} = \frac{e^{-4}(-20) \cdot 5}{\sqrt{3}}$$

Kdaj je $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}\right|$ največje? $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}\right| = |\vec{e}| \cdot |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi$

Če izberemo vektor $\vec{e}$ v smeri grad u, je odvod po absolutni vrednosti največji.

Točke v prostoru, kjer je $u(\vec{r}) = c$, imenujemo nivojake ploskve.

Vektorsko polje in količne v njem

Vektorsko polje zapišemo kot: $\vec{f}(\vec{r}) = \left(f_1(\vec{r}), f_2(\vec{r}), f_3(\vec{r})\right) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right)$.
V prostoru dobimo silnice, ki v vsaki točki podajo smer vektorskega polja.
Potencialno polje je polje, če je vektorsko polje gradient skalarnega polja.

Divergenca

Pomembna količina pri vektorskem polju je divergenca. Računamo jo po formuli: $\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$. Ta operacija priredi vektorskemu polju ustrezno skalarno polje.

Zgled:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \left(xy, zxy^2, x^3yz^2\right) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = y + 2xyz + 2x^3yz$$

Rotor

Rotor je operacija, ki vektorskemu polju priredi vektorsko polje in nam pove rotacijo. Definiran je kot: $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$.

Zgled:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \left(xyz, x^2y, xy^2z\right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ \partial/\partial x, & \partial/\partial y, & \partial/\partial z \\ xyz, & x^2y, & xy^2z \end{vmatrix} = \left(2xyz - 0, -\left(y^2z - xy\right), 2xy - xz\right) = \left(2xyz, xy - y^2z, 2xy - xz\right)$$

Vse operacije so linearne, zato velja:

a) $\operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \cdot \operatorname{grad} u + \beta \cdot \operatorname{grad} v$

b) $\operatorname{div}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha \cdot \operatorname{div} \vec{f} + \beta \cdot \operatorname{div} \vec{g}$

c) $\operatorname{rot}(\alpha \vec{f} + \beta \vec{g}) = \alpha \cdot \operatorname{rot} \vec{f} + \beta \cdot \operatorname{rot} \vec{g}$

Več operacij lahko opravimo tudi zaporedoma:

a) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$ (Δ... La Place-ov operator)

b) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u = 0$

Če je vektorska funkcija $\vec{f}$ oblike $\vec{f} = \operatorname{grad} u$, potem je rotor enak nič, saj je polje $\vec{f}$ potencialno.

c) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{f})$

d) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$

e) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$

Povzetek:

grad	**S**	**preslika v**	**V**
div	**V**	**preslika v**	**S**
rot	**V**	**preslika v**	**V**

S ... skalarna funkcija
V ... vektorska funckija

Krivuljni integral

V prostoru imamo podano krivuljo K. Skalarno polje je definirano vzdolž in v okolici krivulje K. Krivuljni integral prve vrste (v skalarnem polju) je definiran kot limita neskončne vsote:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u(T_k)\Delta s_k = \int_K u(\bar{r})ds\,.$$

Primeri uporabe:

1. masa zvite vrvi: $m = \int_K \rho(\bar{r})ds$
2. težišče: $x_T = \frac{1}{m}\int_K x\rho(\bar{r})ds$

Krivuljni integral računamo po naslednjem postopku:

$$ds = \left|\dot{\bar{r}}(t)\right| dt$$

$$\int_K u(\bar{r})ds = \int_\alpha^\beta u(\bar{r}(t))\left|\dot{\bar{r}}(t)\right| dt = \underbrace{\int_{s_1}^{s_2} u(\bar{r}(s))ds}_{\text{če je v naravnem parametru}}$$

Zgled:

1. Imamo skalarno polje:

   $u(\bar{r}) = u(x,y,z) = xy$

   $K : x^2 + y^2 = 4;\ xy > 0$

   $$\int_K u(\bar{r})ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\cdot 2\sin t\cdot 2dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cdot dt = 4\left[\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

   $$= 2\left[-(-1)-(-1)\right] = 4$$

2. Izračunaj krivuljni integral:

   $K : r$

   $\bar{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$

   $u(\bar{r}) = u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

   $\dot{\bar{r}}(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 3)$

   $\left|\dot{\bar{r}}(t)\right| = 5$

   $$\int_K u(\bar{r})ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(4\cos t)^2 - (4\sin t)^2 + 9t^2\right]\cdot 5dt = \frac{5}{3}\left[27\cdot 2\pi - 16\cdot 2\pi\right]$$

<u>Krivuljni integral druge vrste (v vektorskem polju)</u> je definiran za vektorsko polje $\vec{f}(\vec{r})$ in dano krivuljo K kot:

$$\int_K \vec{f}(\vec{r})\cdot\vec{t}ds = \int_K \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_K f_1()dx + f_2()dy + f_3()dz$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)dt$$

če upoštevamo: $d\vec{r} = \vec{t}ds;\ t = \frac{\dot{\vec{r}}ds}{|\dot{\vec{r}}|};\ ds = |\dot{\vec{r}}|dt$.

Zgled:

$\vec{f}(\vec{r}) = (y, x, z)$

$\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t);\qquad 0 < t < 2\pi$

$$\int_K \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_K ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi}\left[4\sin t(-\sin t)4 + 3t4\cos t + 4\cos t\cdot 3\right]dt = -16\pi$$

Potencialno polje je tako vektorsko polje $\vec{f}$, ko je krivuljni integral druge vrste $\int_K \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ neodvisen od poti. Odvisen je le od začetne in končne točke.

Dokaz:

$\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{grad} u$

$$\int_K \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_K \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \int_A^B du = u(B) - u(A)$$

Zgled:

$\vec{f}(\vec{r}) = \left(y^2 + 2xy, x^2 + 2xy, 0\right)$

$u = x^2y + xy^2$

upoštevanje izreka

$$\int_K \vec{f}d\vec{r} = u(B) - u(A) = 2 - 0 = 2$$

direktno računanje:

$K : y = x$

$\vec{r}(t) = (t, t, 0) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = (1,1,0)$

$$I = \int_0^1 (t^2 + 2t^2, t^2 + 2t^2, 0)\cdot(1,1,0)dt = 2$$

Če je krivuljni integral $\int\limits_K \vec{f}(\vec{r})d\vec{r}$ neodvisen od poti, je polje potencialno, to pomeni, da je $\vec{f} = \operatorname{grad} u$.

Dokaz:

Če gremo od točke $A(x_0, y_0, z_0)$ do točke $B(x,y,z)$ po različnih poteh in definiramo funkcijo u(x,y,z), lahko zapišemo integral po krivulji K od A do B kot: $u(x,y,z) = \int\limits_K \vec{f}(\vec{r})d\vec{r} = \int\limits_K f_1dx + f_2dy + f_3dz$.

Če se premaknemo vzdolž osi x do točke $B_1(x+h, y, z)$, lahko integral zapišemo kot:

$$u(x+h,y,z) = \int\limits_{K_1} \vec{f}(\vec{r})d\vec{r} = u(x+h,y,z) - u(x,y,z) =$$

$$= \int\limits_{[B,B_1]} f_1dx + \underbrace{f_2dy}_{=0} + \underbrace{f_3dz}_{=0} = \int\limits_{B(x,y,z)}^{B_1(x+h,y,z)} f_1(x,y,z)dx \doteq f_1(x,y,z)\cdot h$$

Če enačbo deliko z h dobimo diferenčni količnik, ki je po definiciji enak parcialnemu odvodu funkcije u na x, kar je pravzaprav komponenta f_1 funkcije u:

$$\frac{u(x+h,y,z) - u(x,y,z)}{h} \doteq f_1(\xi, y, z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1$$

Podobno lahko storimo tudi za komponenti y in z: $y = \frac{\partial u}{\partial y}; z = \frac{\partial u}{\partial z}$. Iz tega torej sledi, da je naša vektorska funkcija enaka: $\vec{f} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} u$.

Tako dobimo tri pogoje za določitev potencialnega polja:

a) vektorsko polje je gradient skalarnega polja: $\vec{f} = \operatorname{grad} u$
b) integral po krivulji $\int\limits_K \vec{f}(\vec{r})d\vec{r}$ je neodvisen od poti
c) $\operatorname{rot}\vec{f} = 0$

Zgled:

Imaš funkcijo $f(x,y,z) = \left(x^2 - yz, y^2 - xz, -xy\right)$. Preveri, če je polje potencialno in določi potencial.

$$\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ \partial/\partial x, & \partial/\partial y, & \partial/\partial z \\ x - y^2, & y^2 - xz, & -xy \end{vmatrix} = \left(-x-(-x), -y-(-y) - z-(-z)\right) = \left(0,0,0\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - yz \Rightarrow u = \frac{x^3}{3} - xyz + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - xz = -xz + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \varphi(y,z) = \frac{y^3}{3} + \psi(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -xy = -xy + \psi'(z) \Rightarrow \psi(z) = c$$

$$u = \frac{x^3}{3} - xyz + \frac{y^3}{3} + c$$

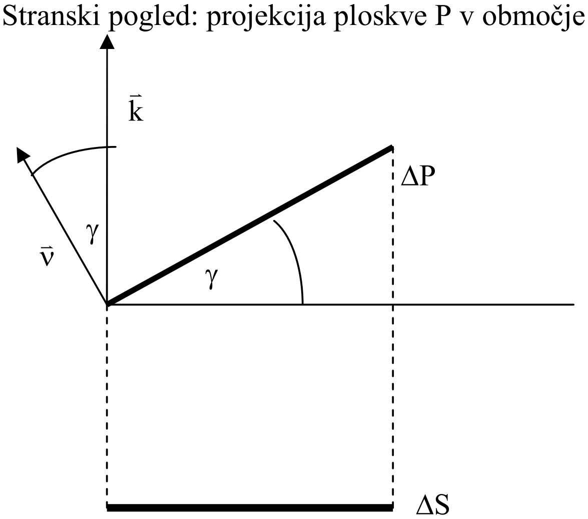
Ploskovni integral

Imamo neko ploskev P in skalarno funkcijo $u(\vec{r})$. Tedaj lahko ploskovni integral prve vrste izračunamo kot limito nekončne vsote: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u(T_k)\Delta P_k = \iint\limits_P u(\vec{r})dP$, če ta limita obstaja.

Računamo ga po enačbi: $\iint\limits_P u(\vec{r})dP = \iint\limits_D u(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,\underbrace{dS}_{=dxdy}$, kjer je D pravokotna projekcija ploskve P na ravnino xy.

Izpeljava:

Stranski pogled: projekcija ploskve P v območje D na xy ravnini



Odvisnost od kota med ploskvijo in pravokotno projekcijo: $\Delta S = \Delta P \cdot |\cos\gamma|$, kar lahko zapišemo z vektorji kot: $\vec{v}\cdot\vec{k} = |\vec{v}|\cdot|\vec{k}|\cdot\cos\gamma$. Torej lahko ΔP izračunamo kot: $\Delta P = \frac{\Delta S}{|\cos\gamma|} = \frac{\Delta S}{|\vec{v}\cdot\vec{k}|}$.

Če je P dana funkcija kot $z = z(x,y)$, je $\vec{N} = (-p,-q,1)$, kjer je $p = \frac{\partial z}{\partial x}; q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Tedaj je enotski vektor enak: $\vec{v} = \frac{(-p,-q,1)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

$\Delta P = \frac{\Delta S}{|\cos\gamma|} = \frac{\Delta S}{\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}} = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\Delta S \Rightarrow dP = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dS$. Iz tega pa dobimo

$$\iint_P u(\vec{r})dP = \iint_D u(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\underbrace{dS}_{=dxdy}.$$

Zgled:

$$\iint_P \left(x^2+y^2+z^2\right)dP;\ \text{kjer je } z = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right);\ 0 \le z \le 2$$

$$p = \frac{1}{2}2x$$

$$q = \frac{1}{2}2y$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

$$\iint_P u(\vec{r})dP = \iint_D \left(x^2+y^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\left(r^2+\frac{1}{4}r^4\right)\sqrt{1+r^2}\,dr = 2\pi\int_1^{\sqrt{5}} t^2dt\left(1-t^2+\frac{1}{4}\left(1-t^2\right)^2\right) = \ldots$$

Velikokrat pa se zgodi, da je ploskev podana parametrično. Tedaj pa imamo tak nastavek:

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

$$\cos\gamma = \vec{v}\cdot\vec{k} = \frac{\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)\cdot\vec{k}}{\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|} = \frac{\left(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{k}\right)}{\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|} \searrow \left(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = J(u,v)$$

$$\Delta P = \frac{\Delta S}{|\cos\gamma|} = \frac{\Delta x\Delta y}{|J(u,v)|}\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right| = \left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|\Delta u\Delta v$$

$$dxdy = |J(u,v)|\cdot dudv$$

Integral je enak: $\iint_P g(\vec{r})dP = \iint_\Delta g\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|dudv$.

Če uvedemo še:

$E = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u$

$F = \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$ velja: $\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)\cdot\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right) = \left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\right)\left(\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\right) - \left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\right)^2 = EG - F^2$.

$G = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$

Uporaba ploskovnega integrala prve vrste:

1. masa lupine z debelino 1: $m = 1 \cdot \iint\limits_P \rho(x, y, z) dP$
2. ploščina ploskve: $P = \iint\limits_P dP = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy = \iint\limits_\Delta |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$
3. težišče: $x_T = \frac{1}{m} \iint\limits_P x\rho(\vec{r}) dP$

Zgled:

Določi površino in težišče ploskve z enačbo $z = 1 - \left(x^2 + y^2\right);\ z \geq 0$

$p = 2x$

$q = 2y$

$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$

$$P = \iint\limits_P dP = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} dr = 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{4} \cdot t^2 dt = \frac{\pi}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{6} \left(5\sqrt{5} - 1 \right) = b$$

$T(0, 0, z_0)$

$$z_0 = \iint\limits_P z dP = \iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2\right) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{4} dt \left(1 - \frac{1}{4}\left(t^2 - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[\frac{5t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{8 \cdot 15} \left(25\left(5\sqrt{5} - 1\right) - 3\left(25\sqrt{5} - 1\right) \right) = a$$

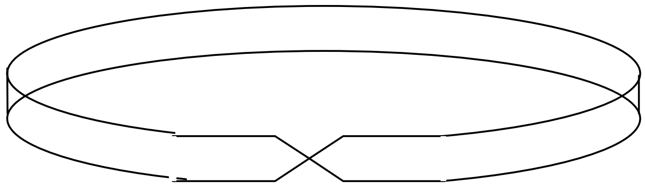
$$z_0 = \frac{a}{b}$$

Ploskovni integral druge vrste

Za dano vektorsko polje $\vec{f}(\vec{r})$ in dano ploskev P je definiran kot: $\iint_P \vec{f}(\vec{r})\cdot\vec{v}dP$, kjer je $\vec{v}$ normala z normo 1 in kaže iz tiste strani ploskve, po kateri želimo integrirati.

Pomen tega integrala je pretok vektorskega polja skozi ploskev P.

Poznamo tudi ploskve z le eno stranjo: trak papirja ga nekoliko zaviješ in zlepiš skupaj:



Računamo po postopku:

1. če je funkcija podana eksplicitno: $z = z(x, y)$

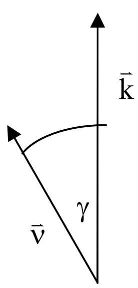
$$\vec{v} = \pm\frac{(-p,-q,1)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\iint_P \vec{f}(\vec{r})\cdot\vec{v}dP = \pm\iint_D (f_1,f_2,f_3)\cdot\frac{(-p,-q,1)}{\cancel{\sqrt{1+p^2+q^2}}}\cancel{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dxdy =$$

$$= \pm\iint_D (f_1,f_2,f_3)\cdot(-p,-q,1)dxdy$$

kjer je funkcija odvisna od x,y

Če upoštevamo, da lahko komponente enotskega vektorja normale zapišemo še s koti med normalo in osemi x, y, z, potem dobimo: $\vec{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.



$$\vec{v}\cdot\vec{k} = 1\cdot 1\cos\gamma$$
$$\vec{v}\cdot\vec{i} = 1\cdot 1\cos\alpha$$
$$\vec{v}\cdot\vec{j} = 1\cdot 1\cos\beta$$

to pomeni, da člen $\vec{v}dP$ v intregralu lahko zamenjamo s $\vec{v}dP = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)dP$, kar je enako $(dydz, dxdz, dxdy)$, če upoštevamo zveze: $\cos\gamma dP = dxdy$; $\cos\alpha dP = dydz$; $\cos\beta dP = dxdz$. Ploskovni integral je tedaj enak: $\iint_P \vec{f}(\vec{r})\cdot\vec{v}dP = \iint_P f_1(...)dydz + f_2(...)dxdz + f_3(...)dxdy$, kjer moramo upoštevati stran ploskve integracije. Pri tem moramo namreč upoštevati predznak.

2. če je funkcija podana parametrično: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

$$\iint_P \vec{f}(\vec{r})\cdot\vec{v}dP = \pm\iint_D (f_1,f_2,f_3)\cdot\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\cancel{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}}\cancel{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}\,dudv =$$

$$= \pm\iint_D (f_1,f_2,f_3)\cdot\vec{r}_u\times\vec{r}_v dudv = \pm\iint_D (\vec{f},\vec{r}_u,\vec{r}_v)dudv$$

$(\vec{f},\vec{r}_u,\vec{r}_v)$..... mešani produkt

Zgled:

1. Izračunaj integral po zunanji strani plašča storžca $z^2 = x^2 + y^2; 0 \le z \le 1$:

$$\iint_P \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{v} dP = \iint_P (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{v} = \pm \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

določimo predznak tako, da si izberemo poljubno točko T(1,0,1), kjer je

$$\vec{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left(-\frac{1}{1}, -\frac{0}{1}, 1 \right) \text{ zato izberemo } -!$$

upoštevamo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $D : x^2 + y^2 = 1$

$$\iint_P \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{v} dP = -\iint_D (y-z, z-x, x-y) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \frac{\cancel{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\cancel{\sqrt{1+p^2+q^2}}} dxdy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{-xy + xz - yz + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x + y \right) dxdy = -\iint_D \left(\frac{(x-y)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x - y \right) dxdy =$$

$$= 2\iint_D (y - x) dxdy =$$

pol. koordinate: $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r\sin\varphi - r\cos\varphi) rdr = 0$$

2. Izračunaj integral po zunanji strani ploskve $y = x^2; 0 \le z \le 3; 0 \le x \le 2$

$$\vec{f}() = (y, 2, xz)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u, u^2, v)$$

$$\left. \begin{matrix} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 3 \end{matrix} \right\} \text{območje } \Delta$$

$$\vec{r}_u = (1, 2u, 0); \vec{r}_v = (0, 0, 1); (\vec{f}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = 2u^3 - 2$$

$$\iint_P \vec{f}\vec{v} dP = +\iint_\Delta (2u^3 - 2) dudv = \int_0^2 du \int_0^3 (2u^3 - 2) dv = 3(8 - 4) = 12$$

Gaussov izrek

Imamo neko telo G, ki ga omejuje ploskev P. Če ga integriramo po zunanji strani, dobimo Gaussov izrek, ki pravi, da je ploskovni integral po ploskvi P enak trojnem integralu divergence po telesu G: $\iint\limits_P \vec{f}(\vec{r})\vec{\nu}dP = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{f}(\vec{r})dV$. Pri tem mora biti $\vec{f}(\vec{r})$ odvedljiva funkcija, ploskev P odsekovno gladka in telo G brez lukenj.

Dokaz:

Izrek lahko zapišemo kot: $\iint\limits_P \left[f_1()\nu_1 + f_2()\nu_2 + f_3()\nu_3\right]dP = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dV$. Če pogledamo dokaz le za zadnja člena, saj dobimo vsoto integralov, dobimo:

$$\iint\limits_P \left[f_3()\nu_3\right]dP = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dV$$

$\Rightarrow$

$$= \iiint\limits_G \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}dz = \iint\limits_D \left[f_3\left(x,y,z_2(x,y)\right) - f_3\left(x,y,z_1(x,y)\right)\right]dxdy$$

$\Rightarrow$

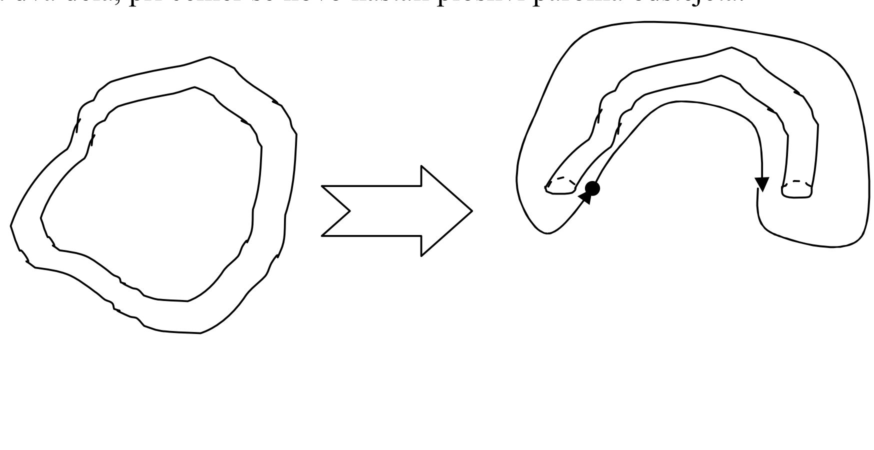
$$= \iint\limits_P \left[f_3()\nu_3\right]dP = \iint\limits_{P_1}\left[f_3()\cos\gamma\right]dP + \iint\limits_{P_2}\left[f_3()\cos\gamma\right]dP + \underbrace{\iint\limits_{P_3}\left[f_3()\cos\gamma\right]dP}_{\substack{=0\text{, ker je kot proti z osi }90^\circ\text{,}\\ \text{to pa pomeni, da je }\cos\gamma=0}} =$$

$$= -\iint\left[f_3(x,y,z_1(x,y))\cos\gamma\right]dP + \iint\left[f_3(x,y,z_2(x,y))\cos\gamma\right]dP$$

predznak $-$ je zato, ker kaže normalni vektor navzdol: $\cos\gamma dP = -dxdy$

Pri obeh dobimo enaka rezultata. Podobno lahko storimo za prvi in drugi člen in dobimo podobna dokaza. Integral po zaključeni ploskvi včasih označimo tudi s: $\oiint\limits_P \vec{f}dP$.

Če imamo neko telo, ki ima znotraj luknjo, je integral enak vsoti dveh, saj moramo telo razdeliti na dva dela, pri čemer se novo nastali ploskvi paroma odštejeta.



Kaj pomeni divergenca iz fizikalnega stališča?

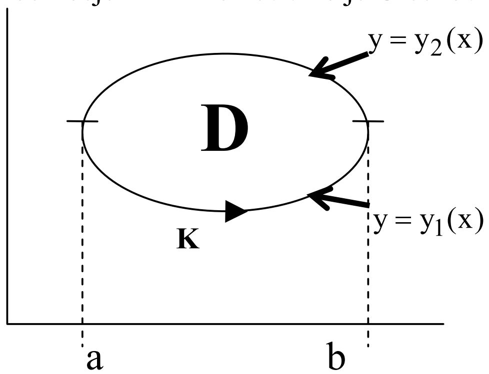
Osnovni izrek je takšen $\iint\limits_{P} \vec{f}(\vec{r})\vec{v}dP = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{f}(\vec{r})dV$. Če se omejimo na točko in majhen volumen V okrog te točke, je telo G zelo majhno, zato lahko zapišemo: $\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{f}(\vec{r})dV \doteq \operatorname{div} f(\xi,\eta,\zeta)\underbrace{\iiint\limits_{G} dV}_{\Delta V}$. Torej je divergenca enaka $\operatorname{div} f(x,y,z) = \lim \frac{1}{V}\iint\limits_{P} \vec{f}(\vec{r})\vec{v}dP$, če limitiramo telo G v točko.

V primeru, ko je ploskovni integral večji od nič $\iint\limits_{P} \vec{f}(\vec{r})\vec{v}dP > 0$, potem se vektorsko polje $\vec{f}$ v telesu povečuje oziroma ima nove izvire. Torej nam integral pove razliko med prihajajočimi in odhajajočimi tokovi skozi telo. Divergenca pa pove hitrost izviranja polja, če je pozitiven integral, oziroma pojemanje, če je integral negativen. V primeru, ko pa je divergenca enaka nič $\operatorname{div}\vec{f} = 0$, potem pa je polje solenoidno, to pomeni, da je tam polje brez ponorov in izvirov. Takrat je tudi integral enak nič.

Ena možna formula za volumen kot posledica Gaussovega izreka , če P objema telo G, lahko volumen zapišemo kot: $V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_{P} \vec{r}\vec{v}dP; \vec{f} = \vec{r}$.

Greenova formula

Za dano ravninsko krivuljo K, ki obkroži neko območje D velja: $\int\limits_K \left(f(x,y)dx + g(x,y)dy\right) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$, pri čemer potujemo po krivulji K v taki smeri, da je območje D na naši levi. To je Greenova formula oziroma Greenov izrek.



Dokaz:

Vzemimo najprej: $\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}dy = \int\limits_a^b \left[f\left(x, y_2(x)\right) - f\left(x, y_1(x)\right)\right]dx$. Po drugi strani pa vemo, da lahko to zapišemo kot:

$$\int\limits_K (f,0,0)d\bar{r} = \int\limits_K f(x,y)dx = \int\limits_a^b \left[f\left(x, y_1(x)\right)\right]dx + \int\limits_b^a \left[f\left(x, y_2(x)\right)\right]dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[f\left(x, y_1(x)\right) - f\left(x, y_2(x)\right)\right]dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_K f(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}dxdy$$

Še enkrat naredimo tako primerjavo za drug člen:

$\iint\limits_D \frac{\partial g}{\partial x}dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial g}{\partial x}dx = \int\limits_c^d \left[g\left(x_2(y), y\right) - g\left(x_1(y), y\right)\right]dy$. Po drugi strani pa vemo, da lahko to zapišemo kot:

$$\int\limits_K (0,g,0)d\bar{r} = \int\limits_K g(x,y)dy = \int\limits_c^d \left[g\left(x_1(y), y\right)\right]dy + \int\limits_c^d \left[g\left(x_2(y), y\right)\right]dy =$$

$$= \int\limits_c^d \left[g\left(x_1(y), y\right) - g\left(x_2(y), y\right)\right]dy$$

$$\Rightarrow \int\limits_K g(x,y)dy = \iint\limits_D \frac{\partial g}{\partial x}dxdy.$$

Če seštejemo oba dela označena s puščicama, dobimo Greenovo formulo:

$$\int\limits_K f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

Naj bosta funkciji $f_1(x,y)$ in $f_2(x,y)$ na območju D odvedljivi, so naslednji stavki ekvivalentni:

a) Krivuljni ntegral $\int_K f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$ je neodvisen od poti K, pri čemer ni nujno, da je krivulja sklenjena.

b) Krivuljni integral $\int_K f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$, po poljubni sklenjeni poti.

c) Za neko funkcijo u(x,y) je totalni diferencial: $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = du$, če sta: $f_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ in $f_2(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

d) Odvod druge funkcije na prvo spremenljivko je enak odvodu prve funkcije na drugo spremenljivko: $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$.

Stokesova formula

Za odvedljivo vektorsko funkcijo $\vec{f}(\vec{r})$ na ploskvi P velja: $\int_K \vec{f}(\vec{r})dr = \iint_P \operatorname{rot}\vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{\nu}dP$, kjer je K rob ploskve P in je krivulja K orientirana tako, da z vrha normale $\vec{\nu}$ gremo po krivulji K v pozitivni smeri, to je v obratni smeri urinega kazalca. To je Stokesov izrek, ki povezuje krivuljni in ploskovni integral.

Dokaz:

Če upoštevamo $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ in $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, lahko daljše zapišemo Stokesov izrek:

$$\int_K f_1()dx + f_2()dy + f_3()dz = \iint_P \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cdot \nu_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\cdot \nu_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot \nu_3\right]dP =$$

$$= \pm\iint_D \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cdot(-p) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\cdot(-q) + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot 1\right]dP$$

vstavimo enačbo ploskve

$$\int_K f_1()dx + f_2()dy + f_3()dz =$$

$$= \int_{K'} f_1\big(x,y,z(x,y)\big)dx + f_2\big(x,y,z(x,y)\big)dy + f_3\big(x,y,z(x,y)\big)\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}_{dz} =$$

$$= \int_{K'} \left[f_1(\ ) + f_3(\ )\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx + \left[f_2(\ )dy + f_3\frac{\partial z}{\partial y}\right]dy =$$

po Greenovi formuli

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[f_2(\ )dy + f_3\frac{\partial z}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[f_1(\ ) + f_3(\ )\frac{\partial z}{\partial x}\right]\right]dxdy =$$

$$= \pm\iint_D \left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cdot(-p) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\cdot(-q) + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot 1\right]dP$$

Naj bosta vektorska funkcija $\vec{f}$ odvedljiva, so naslednji stavki ekvivalentni:

a) Krivuljni ntegral $\int_K \vec{f} d\vec{r}$ je neodvisen od poti K.

b) Zaključeni integral po zaključeni poti $\oint_{K'} \vec{f} d\vec{r} = 0$,.

c) Pogoj za potencialno polje: $\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{grad} u$.

d) Pogoj za potencialno polje: $\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{r}) = 0$.

Če so izpoljenjeni vsi ti pogoji, je vektorsko polje potencialno.

sdfsdfsf