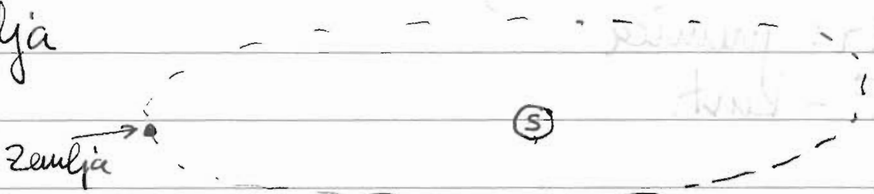
1. MEHANIKA TOČKASTEGA TELESA

Kaj je točkasto telo: to je telo, ki je mnogo manjše od razdalj v sistemu.

<u>Primer</u>: Zemlja



Ko študiramo naše osončje, je Zemlja točkasto telo.
Ko študiramo naprimer gibanje satelitov okoli Zemlje, očitno ne moremo jemati Zemlje kot točkasto telo.

Mehanika je del fizike, ki opisuje načine, na katere se telo giblje v prostoru in obravnava vzroke za njihovo gibanje.

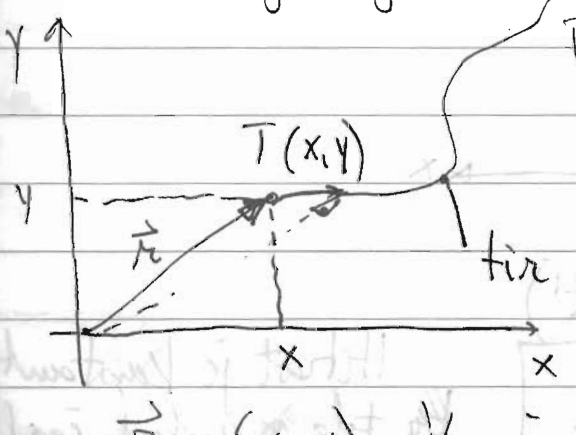
1.1. Kinematika točkastega telesa

Kaj potrebujemo za opis gibanja točkastega telesa:

i) koordinatni sistem, x-y za gibanje v ravnini ali x, y, z za gibanje v prostoru.

ii) lego točkastega telesa (točke) ob <u>vsakem času</u>.

Opisujemo torej kako se telo giblje, ne sprašujemo pa po vzrokih za tako gibanje.



Primer: gibanje telesa v ravnini obravnavamo tako, da si izberemo koordinatni sistem in v tem sistemu označimo koordinate točke za različne čase

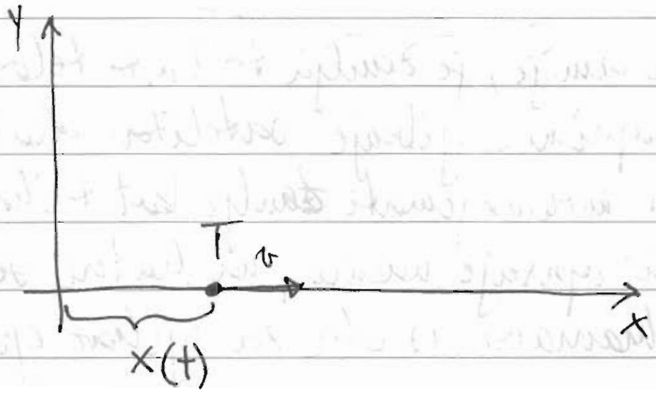
$\vec{r} = (x, y)$ krajevni vektor točke T

1.1.1. Premo enakomerno gibanje

Pri premem gibanju se točkasto telo giblje po tiru, ki je premica. Ker je gibanje enakomerno, se giblje s konstantno hitrostjo v

Tir: premica

$\vec{v}$ = konst.



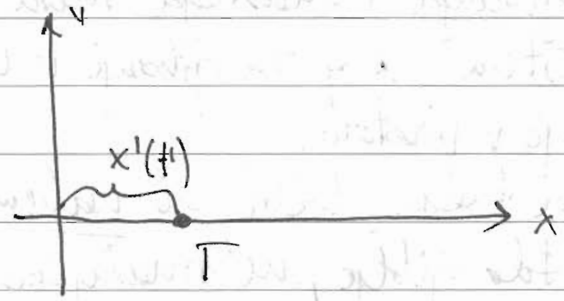
Koordinatni sistem obrnemo tako, da je x-os v smeri gibanja točke.

Velja: $x(t) = x' + v\cdot(t - t')$

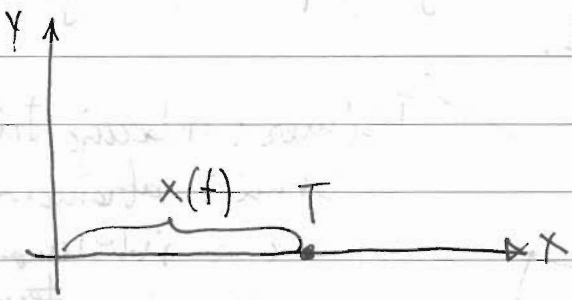
x' ... začetna lega ob času t'

t' ... začetni čas.

Ob času t':



v ... hitrost telesa



Velja: $x - x' = v(t - t')$

$$\boxed{v = \frac{x - x'}{t - t'}}$$

Hitrost je konstantna, ker telo v enakih časih opravi enake poti.

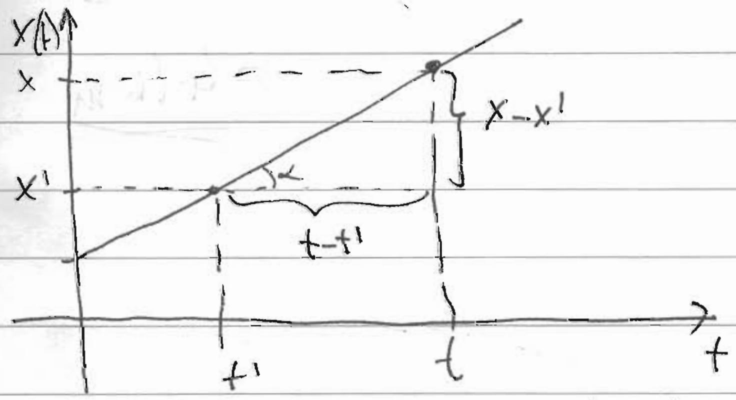
$x - x'$ .... razlika poti → je lahko pozitivna ali negativna!
$t - t'$ .... razlika časa → to je vedno pozitivno, ker čas teče

Smer hitrosti $v > 0 \Rightarrow x > x'$ in telo se giblje v smeri naraščajoče koordinate x (na desno)
$v < 0 \Rightarrow x < x'$ in telo se giblje v smeri manjšajočega x-a (na levo).

Pogosto vzamemo $\Delta x = x - x'$ in $\Delta t = t - t'$, tako da hitrost zapišemo kot

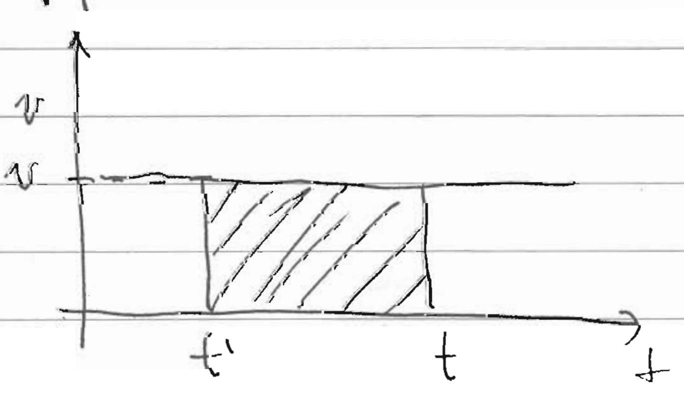
$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$, če je Δt zelo majhen → $v = \frac{dx}{dt}$

Narišem $x(t)$ v (x,t) sistemu:



$$v = \frac{x - x'}{t - t'} = tg\,\alpha$$
⇓
hitrost pomeni naklon premice $x(t)$

Kaj pa hitrost? Ta je konstantna:



produkt $v \cdot (t - t') = x - x'$, to pa je tudi ploščina pod to krivuljo.

Kakšne so enote? x .... merimo v [m]
t .... merimo v [s]
v .... merimo v [m/s] ali [$m s^{-1}$]

Primer: Avto se giblje s hitrostjo 150 km/h. Kolikšno pot opravi v 10 s?

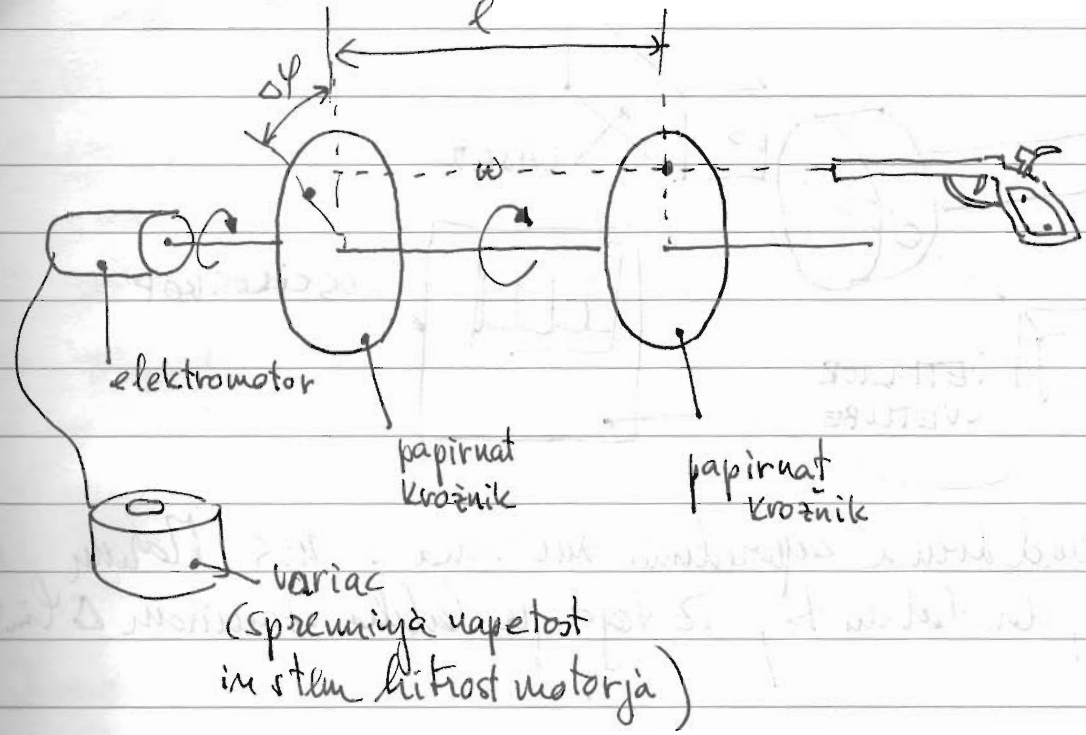
$$v = \frac{x - x'}{t - t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = 150 \, km/h = \frac{150 \cdot km}{h} = \frac{150 \cdot 1000 \, m}{3600 \, s} = \frac{150}{3{,}6} m s^{-1} = \underline{\underline{41{,}6 \, m s^{-1}}}$$

Kolikšno pot opravi v 10 s

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v \cdot \Delta t = \Delta x \Rightarrow \Delta x = v \cdot \Delta t = 41{,}6 \frac{m}{s} \cdot 10 \, s = \underline{\underline{416 \, m}}$$

Primer merjenja hitrosti izstrelka:



Hitrost izstrelka se sicer spreminja s časom zaradi zračnega upora, vendar na tako kratki razdalji lahko vzamemo da je kar konstantna, da se ne spreminja.

$$v_{KROGLE} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{l}{\Delta t}$$

l ... razdalja med ploščama

Δt ... časovni presledek, ko izstrelek preleti najprej prvo, nato pa drugo ploščo.

Mi lahko izmerimo kot $\Delta\varphi$.
Kako iz tega izračunati Δt?

Velja

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi\nu \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{t_0} \cdot \Delta t$$

to izmerim

to lahko izmerim

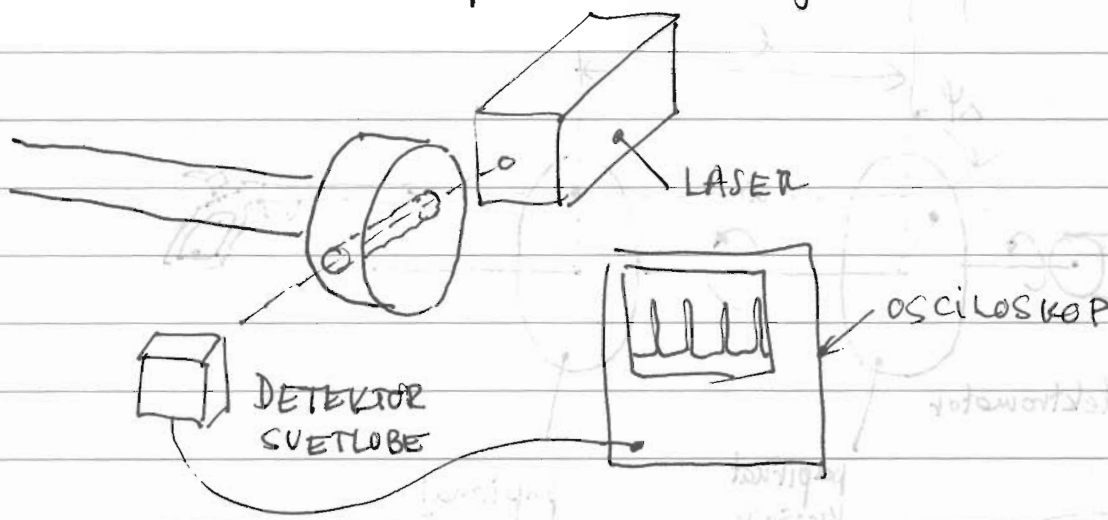
ω ... kotna hitrost

ν ... frekvenca vrtenja plošče

t_0 ... obhodni čas plošče

$$\Delta\varphi \cdot t_0 = 2\pi \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta\varphi \cdot t_0}{2\pi}}$$

Kako izmerimo obhodni čas plošče? Na osi je še dodatni merilec



izmerim čas med dvema zaporednima vrhoma v ms. Moram pomnožiti z 2, da dobim t_0, iz tega pa lahko izračunam $\Delta\varphi$ in v

$$\Delta\varphi \sim 15^\circ = \frac{2\pi}{360}\cdot 15\ \text{rad} = 0{,}52\ \text{rad}.$$

$$\Delta t = \frac{0{,}52\cdot 30\ \text{ms}}{2\pi} = 2{,}48\ \text{ms} = 2{,}48\cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

$$v = \frac{0{,}5\ \text{m}}{2{,}48\cdot 10^{-3}\ \text{s}} = \frac{0{,}5\cdot 10^{3}}{2{,}48}\ \text{m}\,\text{s}^{-1} = \underline{\underline{200\ \text{m}\,\text{s}^{-1}}}$$

Primer enakomernega premega gibanja: zračna klop in voziček na zračni blazini, ki drsi po zračni klopi:

a) pokaži gibanje kaplje črnila za primer enakomernega gibanja
b) pokaži razmike med kapljami črnila za enakomerno pospešeno gibanje.

1.1.2. Premo enakomerno pospešeno gibanje

Dogovorimo se, da začnemo čas šteti od $t'=0$. Pri premem enakomernem pospešenem gibanju se telo giblje po premici, njegova hitrost pa narašča sorazmerno s časom

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v' + a\cdot t \\ a &= \text{konst.} \end{aligned}}$$

v ... hitrost ob času t
v' ... začetna hitrost ob času $t'=0$
a ... pospešek telesa

se ne spreminja s časom!

$$a = \frac{v-v'}{t} = \text{konst} = \frac{\Delta v}{\Delta t'} \quad \text{enota} \left[\frac{m}{s\cdot s}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right] = \left[m s^{-2}\right]$$

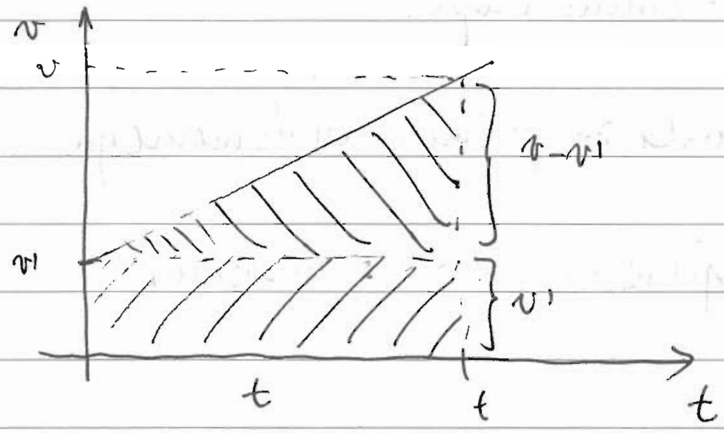
Primer: izračunaj kakšen je pospešek avtomobila, ki pospeši od 0 do 100 km/h v 5 sekundah in je gibanje enakomerno pospešeno?

$v' = 0$

$$v = 100\,km/h = \frac{100\cdot 1000\,m}{3{,}600\,s} = \frac{100}{3{,}6}\,m s^{-1} = 27{,}7\,m s^{-1}$$

$$a = \frac{27{,}7\,m s^{-1}}{5\,s} = \underline{5{,}5\,m s^{-2}}$$

Kakšna je pot pri enakomerno pospešenem gibanju:



Spomni se: pot pomeni ploščino lika pod krivuljo $v(t)$:

$$x(t) = v' \cdot t + \frac{1}{2}(v - v') \cdot t$$

Pot lahko izrazim tudi s pospeškom, saj je $v = v' + a \cdot t \rightarrow$
$v - v' = a \cdot t$

Izraz $v - v'$ vstavi in dobim

$$x(t) = v' \cdot t + \frac{1}{2}(a \cdot t) \cdot t = v' \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$\boxed{x(t) = s = v' \cdot t + \frac{1}{2} a t^2}$$

pot narašča kvadratno s časom! Zakaj? Ker se hitrost nenehno veča!

Ali lahko poiščemo zvezo med v in a in x? $t = \frac{v - v'}{a}$

$$x(t) = v' \cdot t + \frac{1}{2}(v - v') t = v' \frac{(v - v')}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - v')(v - v')}{a} =$$

$$x(t) = \frac{1}{a}\left(\cancel{v \cdot v'} - v'^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v'^2 - \cancel{v \cdot v'}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v'^2\right) = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v'^2\right)$$

$$v^2 - v'^2 = 2a \cdot x$$

$$\boxed{v^2 = v'^2 + 2ax}$$

Če ponovimo:

$$\boxed{\begin{aligned} v^2 &= v'^2 + 2ax \\ x &= v' \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \\ v &= v' + a \cdot t \end{aligned}}$$

Te tri formule si je treba zapomniti!

Primer: Avtomobil ima na začetku hitrost $5\,m\,s^{-1}$ in na razdalji $100\,m$ enakomerno pospešuje ~~s pospeš~~. Kolikšen je pospešek avtomobila, če je hitrost po $100\,m$ $20\,m\,s^{-1}$?

$$v^2 = v'^2 + 2ax$$

$v = 20\,m\,s^{-1}$

$v' = 5\,m\,s^{-1}$

$x = 100\,m$

$a = ?$

$$v^2 - v'^2 = 2a \cdot x$$

$$2ax = v^2 - v'^2$$

$$\boxed{a = \frac{v^2 - v'^2}{2x}}$$

$$a = \frac{20^2\,m^2 s^{-2} - 5^2\,m^2 s^{-2}}{2 \cdot 100\,m} = \frac{400 - 25}{200}\,\frac{m^2 s^{-2}}{m} = \underline{\underline{1{,}8\,m\,s^{-2}}}$$

Poseben primer enakomerno pospešenega gibanja: prosti pad

Omeni: Galileo Galilei je bil prvi, ki je študiral prosti pad.

To je enakomerno pospešeno gibanje zaradi Zemljinega privlaka.

Pospešek teles v Zemeljskem gravitacijskem polju:

$a = g$, g.... težni pospešek $g = 9{,}8\,m\,s^{-2}$

(se spreminja z zemljepisno širino in pa nadmorsko višino!)

Enačbe gibanja so povsem enake, kot smo jih zapisali, s tem da se pospešek a nadomesti z g.

Pomembno: vsa telesa padajo z enakim težnostnim pospeškom. Narobe je pričakovati, da težja telesa (z večjo maso) padajo hitreje:

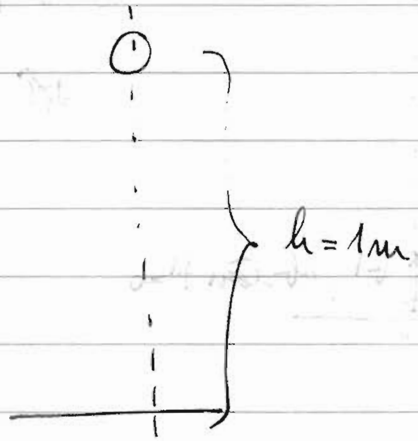
<u>Poskus z evakuirano cevjo:</u>

<u>Poskus s kroglicami, privezanimi na vrvico:</u> enakomeren zvok in

neenakomeren zvok

Primer: Kroglico spustimo, da prosto pada. Kolikšno hitrost doseže potem ko preteče višino 1m. V kolikšnem času ~~za~~ prepotuje to pot?

$h = 1m$, začetna hitrost $v' = 0$



$$v^2 = v'^2 + 2g \cdot h$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,m s^{-2} \cdot 1m} =$$

$$= \sqrt{19{,}6}\ m s^{-1} = \underline{\underline{4{,}4\,m s^{-1}}}$$

$$x = v' \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad v' = 0,\ a = g$$

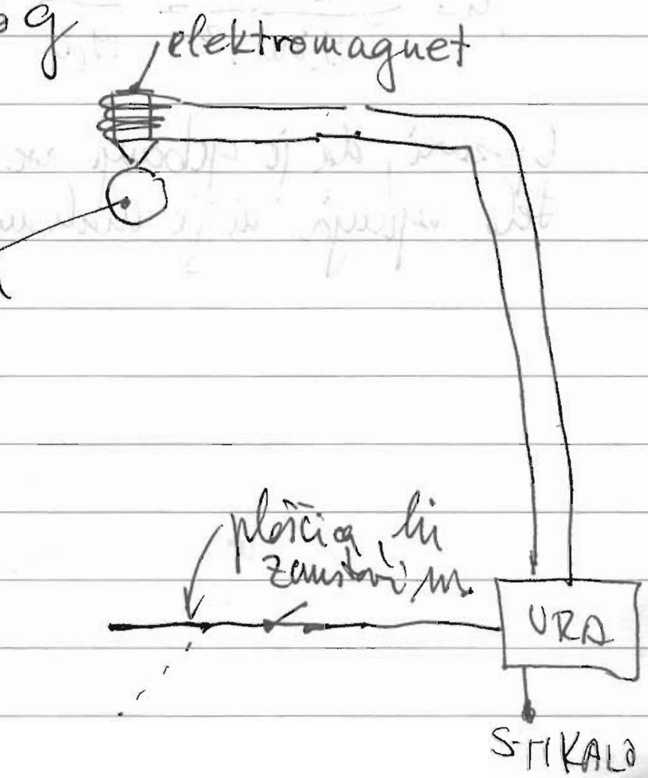
$$h = \tfrac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \frac{2h}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1m}{9{,}8m}\,s^2} = \sqrt{0{,}20\,s} = \underline{\underline{0{,}45\,s}}$$

Poglejmo, če je to res, izračunajmo g

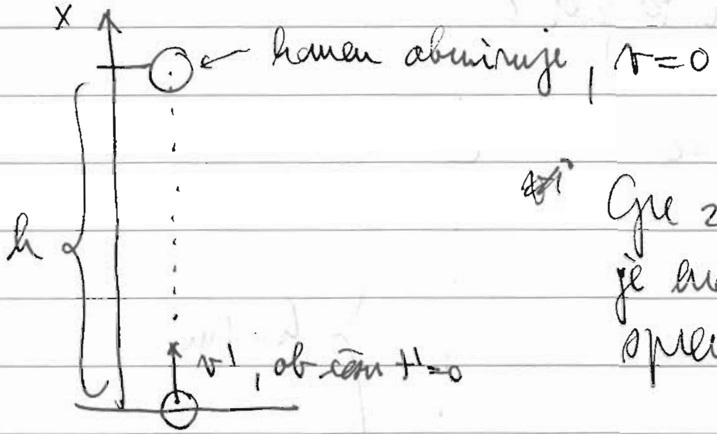
Poskus s kroglico, ki prosto pada:

Poskus št	t[s]	g[$m s^{-2}$]	$\cancel{\bar{g}}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			



Izračunamo povprečno vrednost g-ja

Primer 2: Kamen vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo $v' = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Do katere višine se povzpne



Gre za pospešeno gibanje. Pospešek je enak $-g$. Hitrost se torej spreminja kot:

$v = v' - g\cdot t$ ali povezava s potjo

$v^2 = v'^2 - 2g\cdot h$

$0 = v'^2 - 2gh$

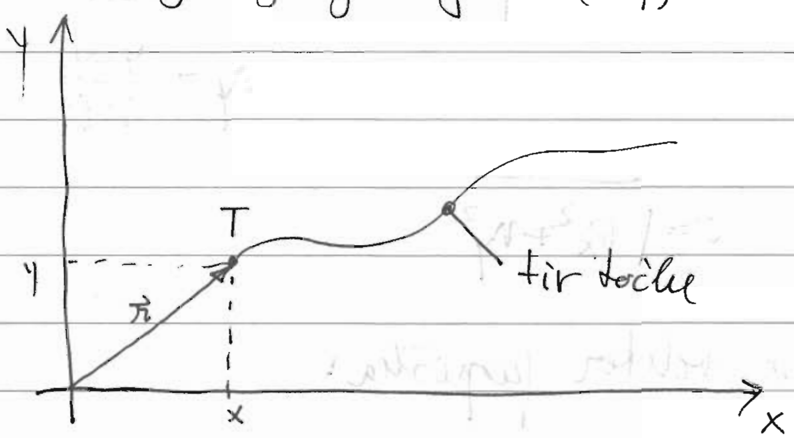
$\boxed{h = \frac{v'^2}{2g}}$ do te višine se telo povzpne

$$h = \frac{10^2\,\mathrm{m^2 s^{-2}}}{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m s^{-2}}} = \frac{100}{19{,}6}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{5{,}1\,\mathrm{m}}}$$

Opazi, da je gibanje navzgor enakomerno pojemajoče, ko se telo vzpenja in je enakomerno pospešeno, ko telo pada.

1.1.3. Gibanje v ravnini, poševni met

Pojem sestavljenega gibanja v (x, y) ravnini



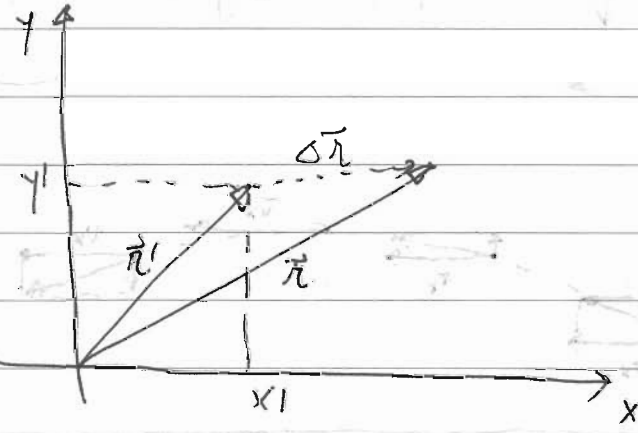
Gibanje si mislimo sestavljeno iz dveh neodvisnih gibanj, eno v smeri osi x, drugo pa v smeri osi y!

$\vec{r} = (x, y)$ krajevni vektor, ki določa lego točke od izhodišča koordinatnega sistema.

Lega točke se s časom spreminja

$t' : \vec{r}\,' = (x', y')$

$t' + \Delta t : \vec{r} = (x, y)$



Razlika obeh krajevnih vektorjev $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}\,' = (x - x', y - y')$

To razdaljo prepotuje v času Δt.

Definiramo hitrost: $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x-x'}{\Delta t}, \frac{y-y'}{\Delta t}\right)$

To je vektor hitrosti, ki ima komponenti $v_x = \frac{x-x'}{\Delta t}$

$v_y = \frac{y-y'}{\Delta t}$

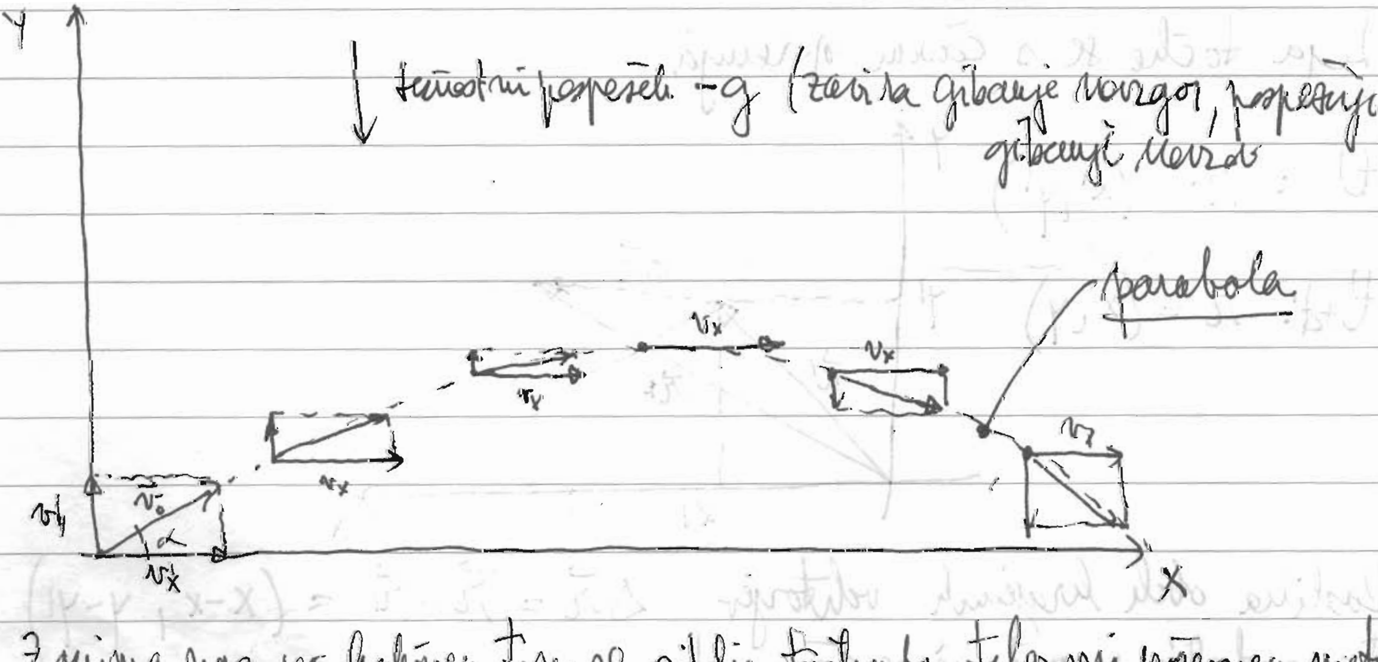
Celotna hitrost je $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Podobno definiramo vektor pospeška:

$\vec{a} = (a_x, a_y) \qquad a_x = \frac{v_x - v_{x'}}{\Delta t} \qquad \Delta t$ naj bo majhen!

$a_y = \frac{v_y - v_{y'}}{\Delta t}$

Poglejmo si primer sestavljenega gibanja: poševni met



Zanima nas, po kakšnem tiru se giblje točkasto telo pri poševnem metu.

Gibanje v smeri x: to gibanje je enakomerno

$$x = x' + v_x'\cdot t = v_x'\cdot t$$

Gibanje v smeri y: to gibanje je pospešeno. Najprej enakomerno pojemajoče, nato enakomerno pospešeno:

$$y = v_y'\cdot t + \frac{1}{2}g\cdot t^2 = v_y'\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2$$

To je enačba parabole

$$\boxed{T = (x, y) = \left(v_x'\cdot t,\ v_y'\cdot t - \frac{1}{2}g t^2\right)} \Rightarrow t = \frac{x}{v_x'} \Rightarrow \boxed{y = v_y'\cdot\frac{x}{v_x'} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_x'^2}}$$

To ni nič drugega kot enačba parabole, obrnjene na glavo

$$y = ax^2 + bx + c$$ to je enačba parabole

$$T = (x, y) = (x,\ ax^2 + bx + c)$$

Telo se pri poševnem metu giblje po paraboli.

Poglejmo, do katere višine se točkasto telo povzpne:
~~Zapišemo~~ ~~Zra~~ Izračunajmo najprej, koliko časa se vzpenja:

$$\cancel{x} \quad v_y = v_y' - g\cdot t = v_0\cdot \sin\alpha - g\cdot t$$

Ko je $v_y = 0$, takrat bo telo v najvišji točki $v_0\cdot\cos\alpha - g\cdot t_0 = 0$

$$\boxed{t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

Kako visoko pride:

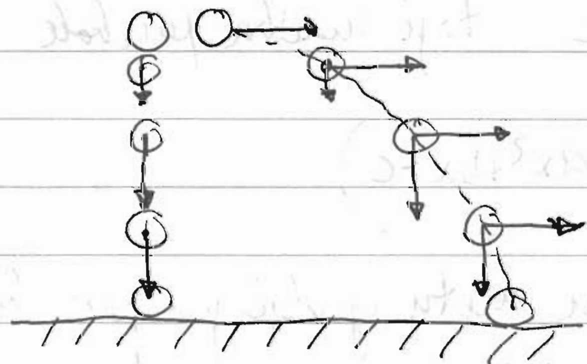
$$y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ob času t_0 doseže najvišjo točko $h = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 =$

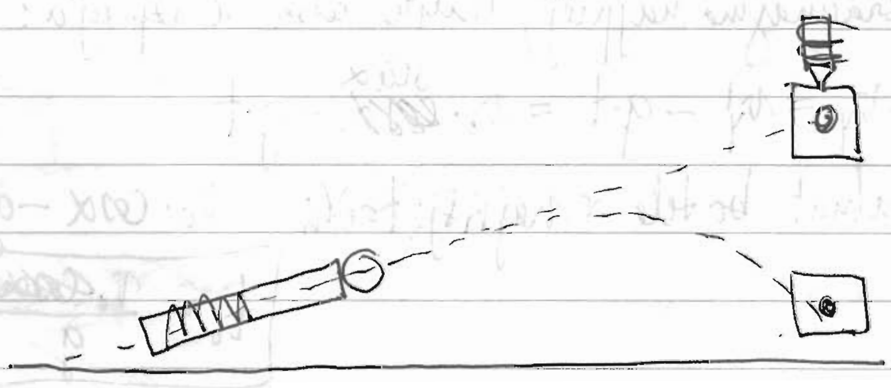
$$= v_0 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} =$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha}$$

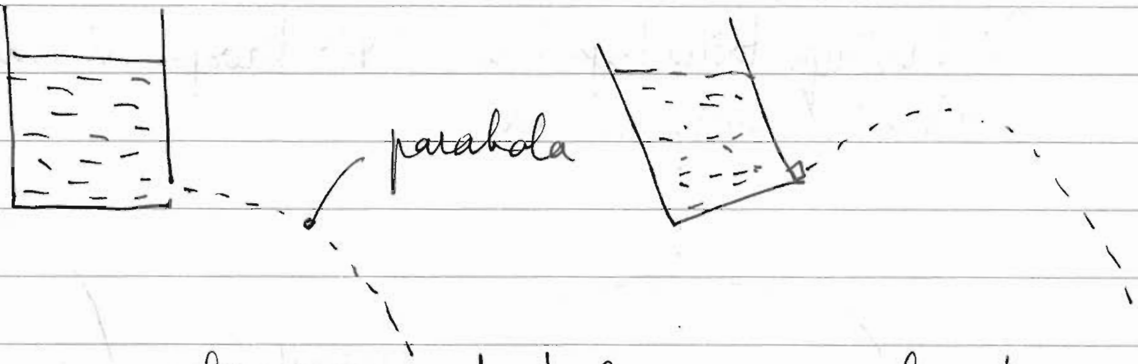
Pokaži poskus z dvema kroglicama. Ena pada navpično navzdol, druga pa poševno. Obe padata enak čas



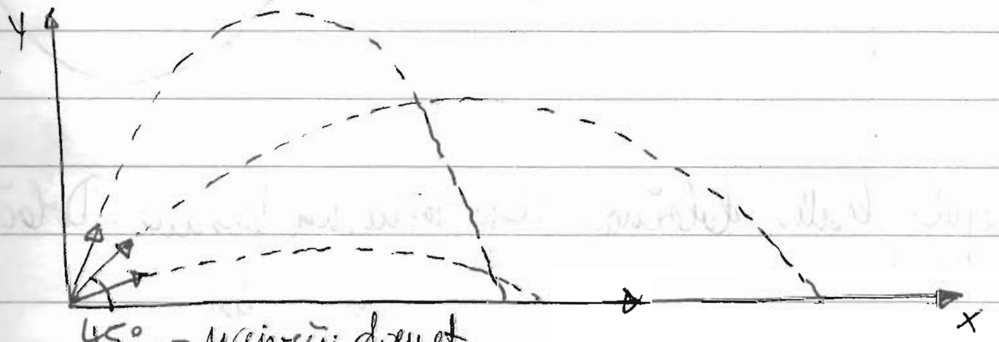
Pokaži poskus s tarčo: zakaj iztrelek vedno zadene tarčo



Pokaži poskus ~~z~~ s curkom vode iz posode



Primerjaj doseg z zalivanjem vrta! Cev moramo držati pod 45°, da gre curek najdlje.



45° → največji domet

Primer: Kamen vržemo z začetno hitrostjo $v_0 = 10\,m/s$ poševno navzgor pod kotom 60° glede na vodoravnico. Kako daleč leti in kako dolgo leti. Pod katerim kotom moramo vreči kamen, da leti najdlje?

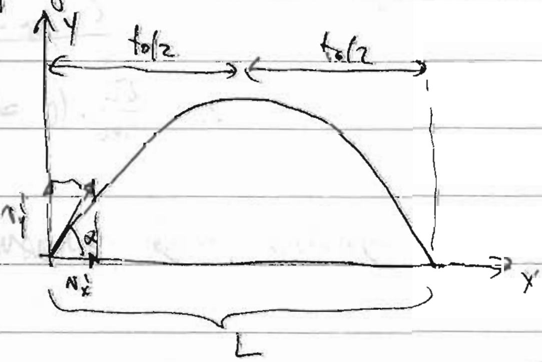
$v_0 = 10\,m/s$

$\alpha = 60°$

$t_0 = ?$

$L = ?$

$L(\alpha) = max?$



$v_y(t) = v_y' - g\cdot t$

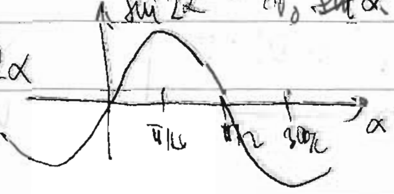
$0 = v_y' - g\cdot t_0/2 = v_0\cdot \sin\alpha - g\cdot t_0/2$

$t_0 = \frac{2v_0\cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2\cdot 10\,m/s\cdot \sin 60°}{9{,}8\,m/s^2} = 1{,}81$

$x(t) = v_x'\cdot t$; $L = x(t_0) = v_x'\cdot t_0 =$

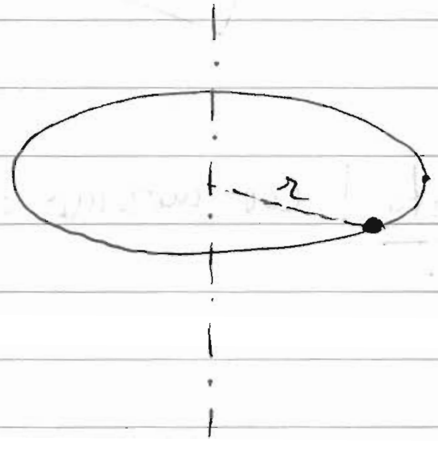
$= v_0 \cos\alpha\cdot t_0 = 10\,m/s\cdot 1/2\cdot 1{,}81 = 9{,}$[illegible]

$L(\alpha) = \frac{v_0\cdot \sin\alpha\cdot 2v_0\cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

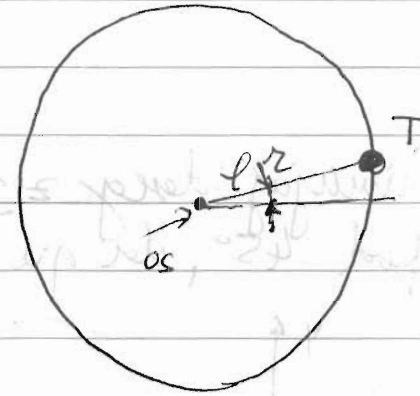


1.1.4. Enakomerno kroženje

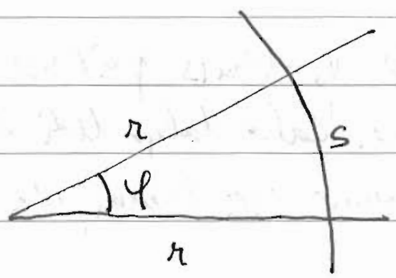
Pri kroženju točkastega telesa je tir krog. Pri enakomernem kroženju je hitrost kroženja stalna



če pogledamo vzdolž osi, vidimo



Najprej poglejmo, kako določimo lego točke na krožnici. Določimo jo s kotom φ.



lok kot

Velja: $\boxed{s = r\cdot\varphi}$ φ ... kot v radianih

Polni kot

$s = 2\pi r = r\cdot\varphi \Rightarrow \varphi = 2\pi$ je polni kot

Če je $x = 10°$

$2\pi \;\ldots\; 360$

$x \;\ldots\; 10$

$x = \frac{2\pi}{360}\cdot 10 = 0{,}17\,\text{rad}$

Pri enakomernem kroženju se kot zvezno veča sorazmerno s časom

$$\boxed{\varphi = \varphi' + \omega\cdot t}$$

φ' ... začetni kot

ω ... kotna hitrost

Iz tega dobimo $\omega = \frac{\varphi - \varphi'}{t}$ = konstanta

Kakšna je pot pri enakomernem kroženju:

$$l_k = s = \varphi \cdot r = \varphi' \cdot r + \omega \cdot r \cdot t = s' + \underbrace{\omega \cdot r}_{\text{Krožna (tangencialna) hitrost}} \cdot t$$

$$\boxed{v_T = \omega \cdot r}$$ Krožna hitrost [m s⁻¹]

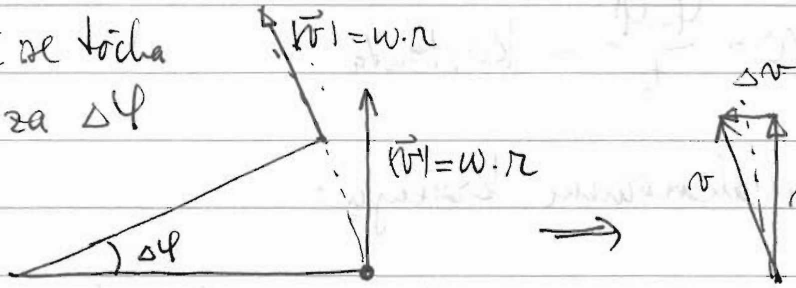
Kako je določen obhodni čas: $s = 2\pi \cdot r = \omega \cdot r \cdot t_0$

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu}$$

t_0 .... obhodni čas
ν .... frekvenca kroženja

Ali je enakomerno kroženje enakomerno ali pospešeno gibanje? Je pospešeno gibanje, ker se smer krožne hitrosti spreminja s časom!! Poglejmo, kakšen je pospešek pri enakomernem kroženju.

v času Δt se točka zavrti za $\Delta\varphi$



očitno se je hitrost spremenila (smer)

$$\frac{|\Delta v|}{2} = v\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx v\cdot\frac{\Delta\varphi}{2}$$

če so koti majhni, velja $\sin\alpha \approx \alpha$!

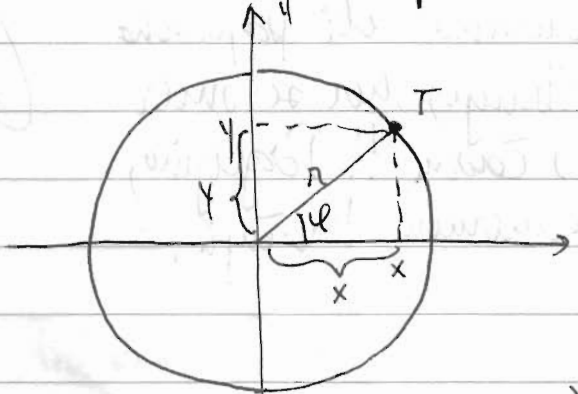
$$\Delta v = v\cdot\Delta\varphi = v\cdot\omega\cdot\Delta t$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v\cdot\omega = \omega r\cdot\omega = \omega^2\cdot r = \frac{v^2}{r}$$

$$\boxed{a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$

To je radialni pospešek. Zaradi tega pospeška telo kroži. Če tega pospeška ne bi bilo, bi se telo gibalo po ravni črti (premici)

Kako še lahko opišemo kroženje?



$x = r\cdot\cos\omega t$

$y = r\cdot\sin\omega t$

$$\vec{r} = (x, y) = (r\cdot\cos\omega t,\ r\cdot\sin\omega t)$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(r\cdot\omega(-\sin\omega t),\ r\cdot\omega\cos\omega t\right)$$

$$= r\cdot\omega(-\sin\omega t,\ \cos\omega t)$$

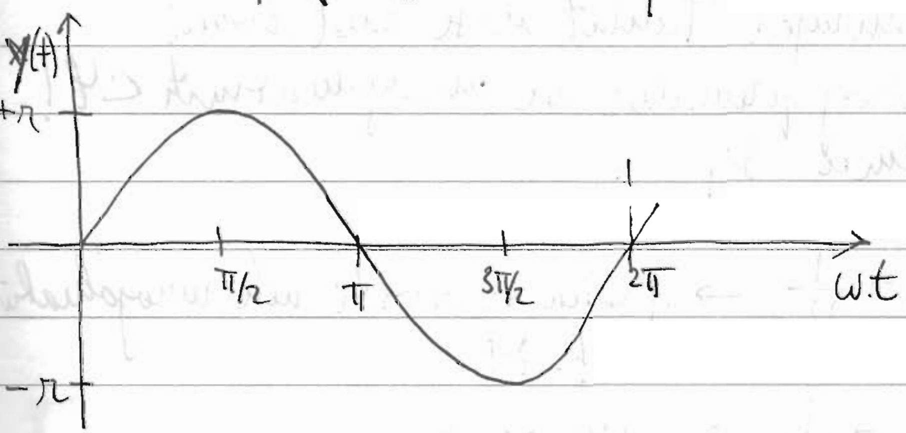
Velikost hitrosti $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = r\cdot\omega$

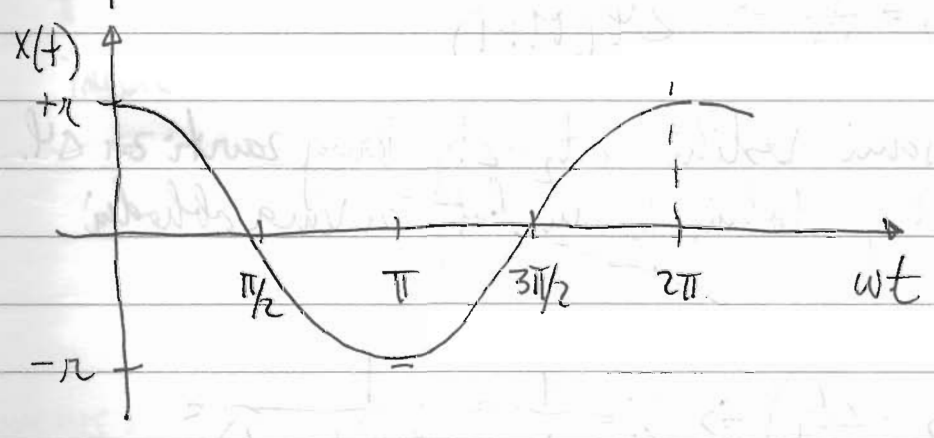
Kako dobimo pospešek?

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-r\cdot\omega^2\cos\omega t, -r\cdot\omega^2\sin\omega t)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = r\cdot\omega^2$$ dobimo isto, kot smo prej izračunali

Narišemo še projekciji x(t) in y(t)



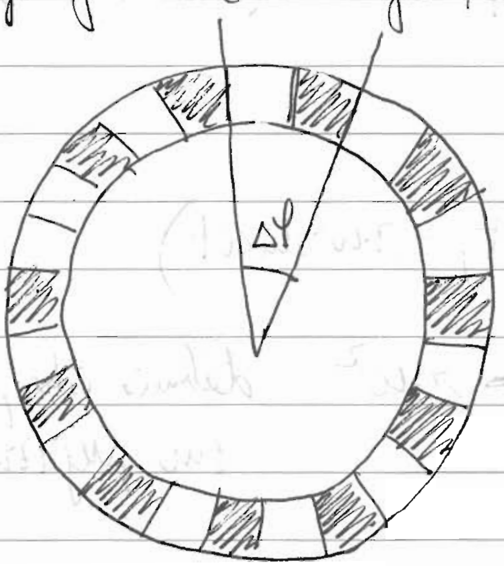


Pokaži projekcijo točke pri vrtenju ploščice

Razloži meritve ~~ft~~ frekvence vrtenja s stroboskopom.

Merjenje frekvence vrtenja s stroboskopom:

N črnih in N belih prog



Kdaj krog navidez miruje? Takrat ko se med dvema zaporednima bliskoma krog premakne za mnogokratnik $\Delta\varphi$! Naj bo to pri frekvenci ν_1

vmesni čas je $\Delta t_1 = \frac{1}{\nu_1}$ → plošča se zavrti za mnogokratnik $\Delta\varphi \cdot M$

drugi vmesni čas je $\Delta t_2 = \frac{1}{\nu_2} \rightarrow \Delta\varphi(M+1)$

To pomeni, da se v časovni razliki $\Delta t_2 - \Delta t_1$ krog zavrti za $\Delta\varphi$. Če ta čas pomnožim z N, dobim polni kot, oziroma obhodni čas t_0

$$t_0 = N(\Delta t_2 - \Delta t_1) \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{N(\Delta t_2 - \Delta t_1)} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1}} = \frac{\nu_1 \cdot \nu_2}{N(\nu_1 - \nu_2)}$$

$$\boxed{\nu_0 = \frac{\nu_1 \cdot \nu_2}{N(\nu_1 - \nu_2)}}$$

iz tega izračunamo frekvenco vrtenja

1.1.5. Enakomerno pospešeno kroženje

Pri enakomerno pospešenem kroženju se kotna hitrost povečuje sorazmerno s časom.

$$\omega = \omega' + \alpha \cdot t$$

ω' ... začetna kotna hitrost

α ... kotni pospešek (pove, kako se kotna hitrost povečuje s časom)

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega - \omega'}{t}}$$

enota $[s^{-2}]$!

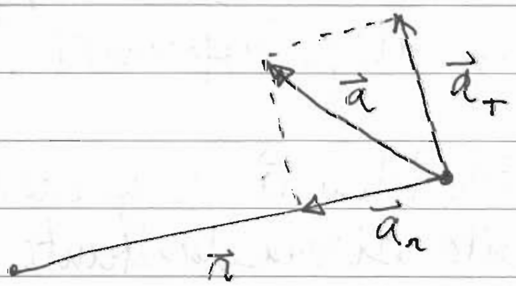
Kaj je s krožilno hitrostjo?

$$v = \omega \cdot r = \omega' \cdot r + \underbrace{\alpha \cdot r}_{= a_T} \cdot t$$

tangencialni pospešek → opisuje večanje krožilne hitrosti!

$$\boxed{a_T = \alpha \cdot r}$$

Pri enakomerno pospešenem kroženju točkastega telesa imamo torej dva pospeška: radialni in tangentni.



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_T$$

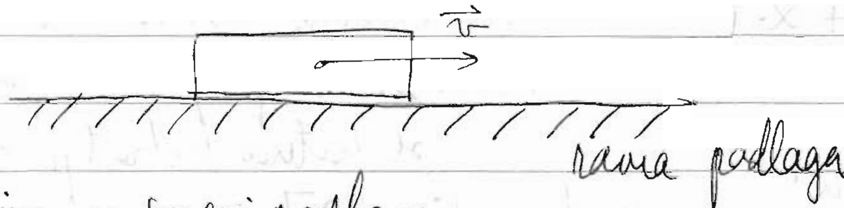
oziroma velikost

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}_r^{\,2} + \vec{a}_T^{\,2}}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\alpha \cdot r)^2} = r \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

1.2. Sile in Newtonovi zakoni

Zamislimo si poskus:



Telo porinemo v smeri podlage.
Čez čas se ustavi. Zakaj? Kaj bi se zgodilo, če bi trenje zmanjšal?
Telo bi se gibalo dalj časa. Kaj bi se zgodilo, če ne bi bilo trenja?
Telo bi se gibalo še dalj časa. Koliko dalj? V neskončnost.
Kaj sledi iz tega "miselnega poskusa"? Sledi 1. Newtonov zakon, ki ga je že poznal Galileo Galilei.
Isaac Newton (1642-1727). Ustanovitelj sodobne fizike.

1. Newtonov zakon: telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če nanj ne deluje nobena sila (ali je vsota vseh zunanjih sil enaka 0).
Kaj je to sila? S silo označimo vpliv drugih teles na dano telo (npr. človek deluje s silo na telo), tako da povzročajo njihovo gibanje ali pa deformacije.

2. Newtonov zakon: pospešek telesa $\vec{a}$ je sorazmeren z zunanjo silo $\vec{F}$ in ima smer sile oziroma rezultante vseh zunanjih sil

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{ali} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\vec{a}$ .... vektor pospeška | m .... masa
$\vec{F}$ .... vektor sile

Definicija mere preko atomske mase ^{12}C : $m_0 = 1.66\cdot 10^{-27}\,kg \cdot 12$

Poglejmo enote: ~~Enot~~ masa m .... [kg]

pospešek $\vec{a}$ .... [m/s^2]

sila $\vec{F} = m\cdot a = [kg\,m/s^2] = [N]$

Enota za silo je N (kot Newton)

Kaj pa če imamo več zunanjih sil

$\vec{F}_1 = (F_1, 0)$

$\vec{F}_2 = (-F_2, 0)$

Izračunam vsoto sil $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_1, 0) + (-F_2, 0) =$

$= (F_1 - F_2, 0)$

Katero smer ima pospešek $\vec{a}$? Ima smer x

$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ Ker ima $\vec{F}$ smer samo x, jo ima tudi $\vec{a}$!

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, lahko računamo za vsako smer posebej

$\vec{a} = (a_x, a_y)$

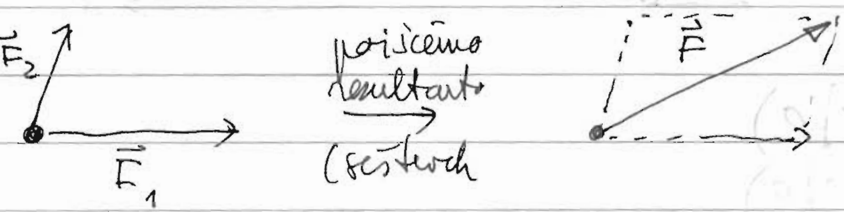
$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{F_1 - F_2}{m} \\ a_y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\vec{a} = \left(\frac{F_1 - F_2}{m}, 0\right)$

Vzemimo $F_1 = 10N$, $F_2 = 1N$, $m = 1kg$

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{9N}{1kg} = 9ms^{-2}$$

Kaj se zgodi, če je vsota vseh zunanjih sil enaka 0? Sile lahko delujejo v ravnini:



Kako v tem primeru računamo rezultanto? Tako, kot računa z vektorji:

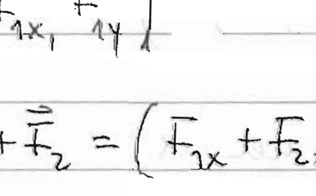
$$\vec F_1 = (F_{1x}, F_{1y}) \qquad \vec F_2 = (F_{2x}, F_{2y})$$

$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2 = (F_{1x} + F_{2x}, F_{1y} + F_{2y})$$

Poglejmo si primer enakomerno pospešenega gibanja:

3. Newtonov zakon: če deluje prvo telo na drugo telo s silo, deluje drugo telo na prvo z nasprotno enako silo
Primer: 2 moža na vozičkih

Primer:



$|\vec F_1| = 10N$

$|F_2| = 1N$

$\alpha = 60°$

$\vec F_1 = (10N, 0)$

$\vec F_2 = (1N \cos 60°, 1N \cdot \sin 60°) = (0{,}5N, 0{,}86N)$

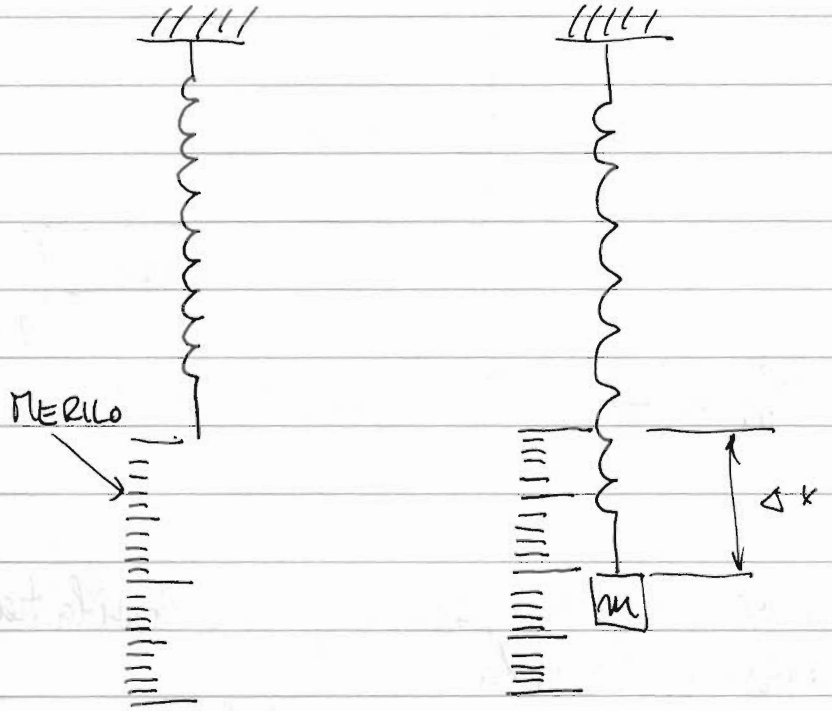
$a = \frac{F}{m} = \frac{10{,}5N}{1kg} = 10{,}5ms^{-2}$

$\vec F = (\vec F_1 + \vec F_2 = (10N + 0{,}5N, 0 + 0{,}86N) = (10{,}5N, 0{,}86N)$ smer: $tg\beta = \frac{F_y}{F_x}$

1.2.1. Meritev sil

Poglejmo si najprej načine, kako merimo sile

Vzmetna tehtnica (vijačna vzmet)



NEOBREMENJENA TEHTNICA

KO TEHTNICO OBREMENIM, SE VZMET RAZTEGNE ZA Δx

Velja enačba $F = k \cdot \Delta x$ (čim večja je sila, tem večji je raztezek vzmeti)

V našem primeru je sila, ki raztegne vzmet kar sila teže $F = F_g = m \cdot g$

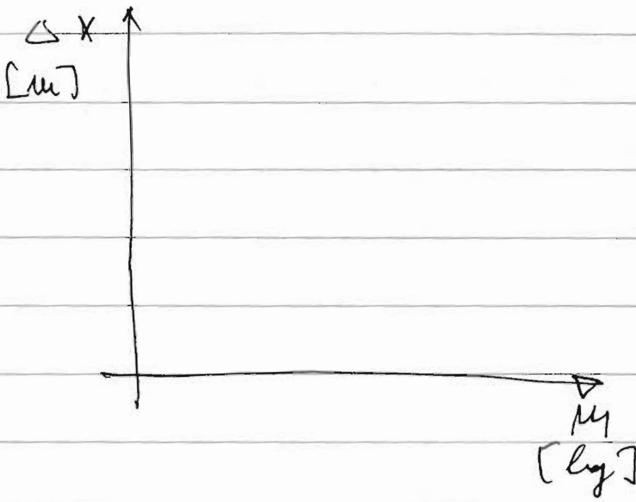
$$m \cdot g = k\Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{g}{k} \cdot m}$$

Na točkasto telo z maso 1 kg delujeta dve sili. Prva sila z velikostjo 1N ima smer osi x, druga sila z velikostjo 10N pa je pod kotom 30° glede na to os. Izračunaj s kakšnim pospeškom se telo giblje in v kateri smeri.

Naredimo tabelo:

m [kg]	Δx [m]

Narišemo to tabelo



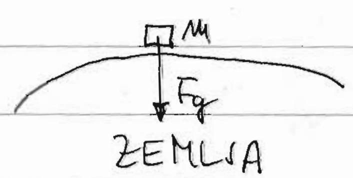
Strmina premice je $\frac{\Delta x}{m} = \frac{g}{k}$. To ocenim iz grafa in izračunam k.

1.2.2. Primeri sil iz narave: sila teže, sila lepenja in sila trenja

a) sila teže = gravitacijska sila

~~Gravita~~Sila ~~teže~~ je sila, s katero se posamezna telesa privlačijo zaradi mase teles. Sila teže je gravitacijska sila, s katero Zemlja privlači telesa.

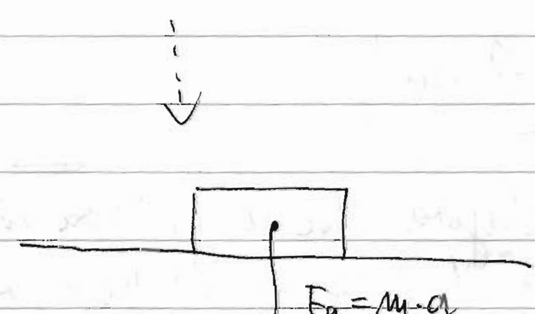
Smer sile teže je proti središču Zemlje in je enaka



$F_g = m \cdot g$

m ... masa telesa

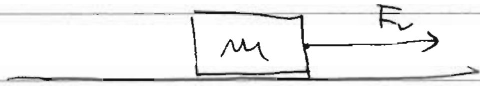
g ... gravitač. pospešek 9,8 m/s² na površini Zemlje



Smer je navpična glede na vodoravno podlago.

Torej: plima in oseka

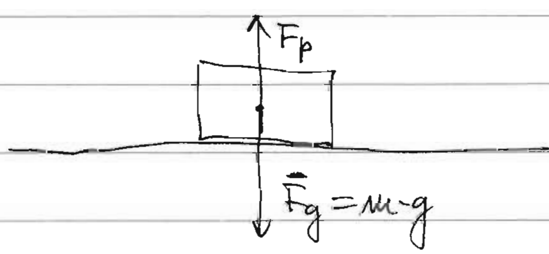
b) sila lepenja:



Telo z maso m postavim na ravno podlago in preko vrvice povlečem z majhno silo F_v. Telo se ne premakne. Silo vrvice moram povečati, da se telo začne premikati. Kaj je torej vzrok temu, da se telo ne premika, kljub temu da delujem nanj z zunanjo silo vrvice F_v?

Pogledam sile po komponentah:

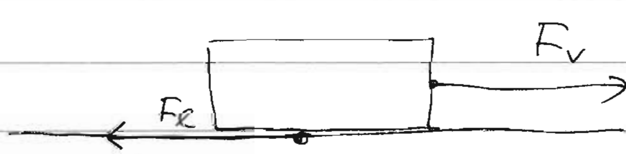
<u>V smeri navpično na podlago</u>:



Pogoj da se telo ne giblje v tej smeri: vsota vseh sil je 0:

$F_p - m\cdot g = 0$ iz tega izračunam lahko F_p.

V smeri vodoravno:

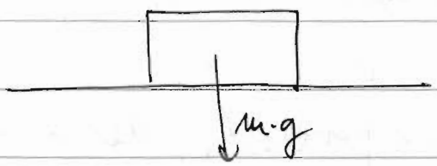


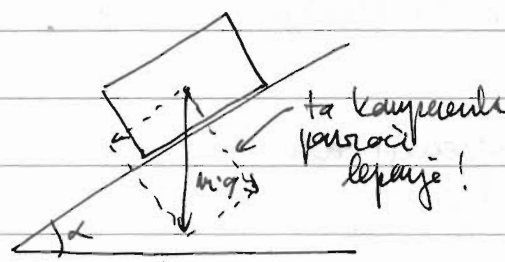
Očitno mora delovati še ena sila nasprotna F_v, da se telo ne giblje v vodoravni smeri! To je sila lepenja

Če je sila F_v manjša od neke največje sile lepenja, se telo ne bo gibalo! Izkaže se, da je F_l sorazmerna s komponento sile, pravokotno na podlago!

$$\boxed{F_l = m\cdot g\cdot k_l}$$

če je podlaga vodoravna





če smo na klancu z naklonom α

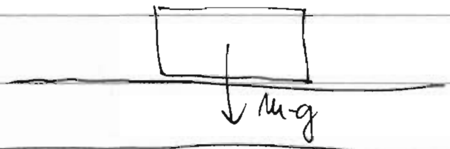
$$\boxed{F_l = m\cdot g\cdot \cos\alpha \cdot k_l = k_l\cdot m\cdot g\cdot \cos\alpha}$$

k_l ... koeficient lepenja:

les-les $k_l = 0.4$
led-led $k_l = 0.1$
guma-beton (suh) $k_l = 1.0$
guma-beton (moker) $k_l = 0.7$

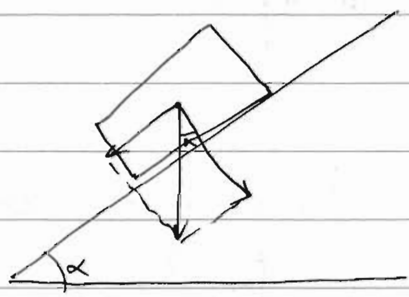
c) sila trenja:

Ko se telo giblje po podlagi, opazimo, da potrebujemo neko silo, da se telo giblje enakomerno. Torej mora podlaga (po Newtonovem I. zakonu) povzročati silo, ki zavira gibanje. To je sila trenja.



$$\boxed{F_{tr} = k_{tr} \cdot m \cdot g}$$

če je podlaga vodoravna



Če smo na klancu, je zopet potrebno vzeti samo tisto komponento sile teže, ki je pravokotna na klanec. Ta je $F_{g\perp} = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$\boxed{F_{tr} = k_{tr} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha}$$

k_{tr} .... koeficient trenja (brez enote)

led-led ... $k_{tr} = 0{,}02$

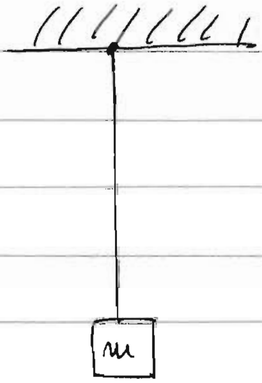
sani po podlagi $k_{tr} = 0{,}02$

kovina-kovina $k_{tr} = 0.1 - 0.2$ (brez mazanja)

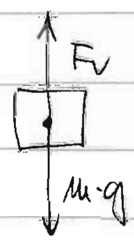
1.2.3. Primeri uporabe Newtonovih zakonov

S kakšno silo je napeta vrvica?

a) Utež z maso 1 kg je obešena na vrvici. Za sistem izberemo utež. Katere so zunanje sile?



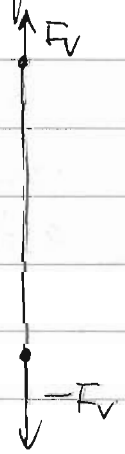
Sili sta dve: sila vrvice in sila teže:



Ker utež miruje, velja $F_v - m\cdot g = 0 \Rightarrow F_v = m\cdot g$

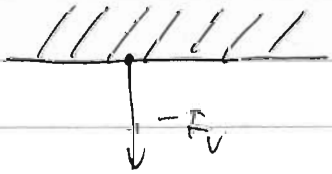
S silo vrvice torej preprečujemo, da bi telo padlo. Ta sila vrvice se vzdolž prenaša naprej:

vrvica:



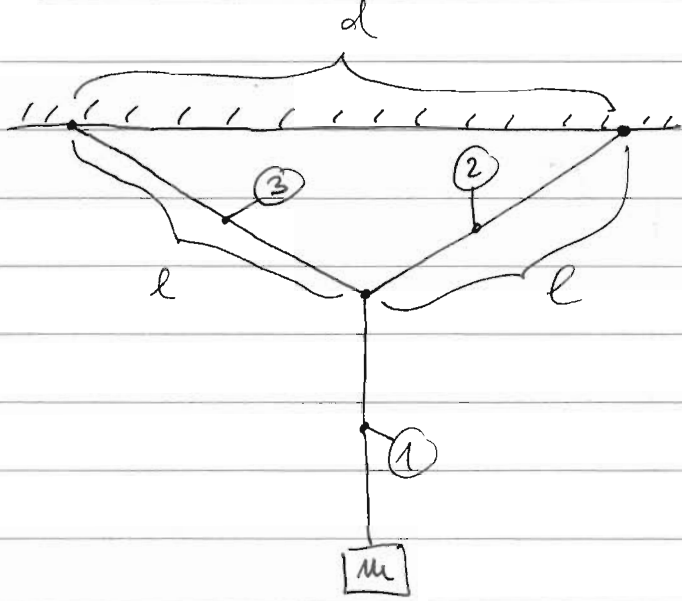
Vrvica je torej napeta s silo $F_v = m\cdot g = 1\,kg\;9{,}8\,m\,s^{-2}$
$= \underline{\underline{9{,}8\,N}}$

Kaj pa strop:



Na strop deluje masa m s silo $-F_v$ (strop se res lahko podre, če je ta sila prevelika).

b) Utež z maso 1 kg je obešena na dveh enako dolgih vrvicah z dolžino 1 m, ki sta pritrjeni na strop v razmiku 1,8 m. Izračunaj silo, s katero so napete vrvice.

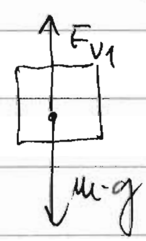


$m = 1\,kg$

$l = 1\,m$

$d = 1{,}8\,m$

Najprej pogledamo utež, ki miruje. Zato je vsota vseh sil enaka 0:

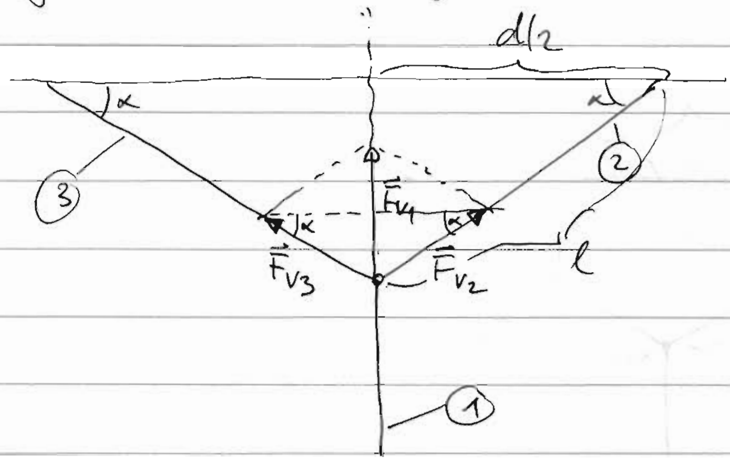


$$F_{v1} - m \cdot g = 0$$

$$F_{v1} = m \cdot g = 1\,kg \cdot 9{,}8\,m\,s^{-2} = \underline{\underline{9{,}8\,N}}$$

Pogledam vrvico št 1: vsota vseh sil mora biti 0, ker se vrvica ne giblje!

Torej morata vrvici št. 2 in 3. v stičišču z vrvico št. 1 ~~Kompenzirati~~ delovati s skupno silo F_{v_1} v smeri navpično navzgor. Sile se prenašajo lahko samo v smeri vrvice



Po velikosti sta F_{v_2} in F_{v_3} mali! Skupaj pa se sestavita v $\vec{F}_{v_1}$.

Velja

$$F_{v_2} \cdot \sin\alpha + F_{v_3} \cdot \sin\alpha = F_{v_1}$$

$$2 F_{v_2} \cdot \sin\alpha = F_{v_1}$$

$$\boxed{F_{v_2} = F_{v_3} = \frac{F_{v_1}}{2 \sin\alpha}}$$

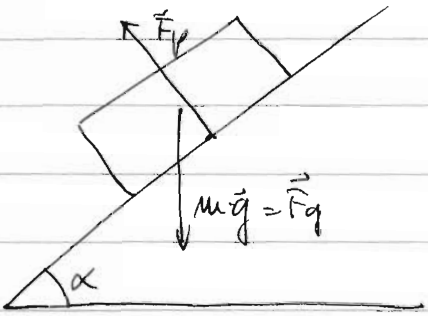
Kot α pa dobim: $\cos\alpha = \frac{d}{2 \cdot l} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{d}{2l} =$

$$= \arccos 0{,}9 \cancel{\approx} = \underline{\underline{25{,}8^\circ}}$$

$$F_{v_2} = \frac{9{,}8\,N}{2 \cdot \sin 25{,}8^\circ} = \frac{4{,}9}{0{,}435}\,N = \underline{\underline{11{,}3\,N}}$$

Čim manjši je kot α, tem večja je sila v vrvici št. 2 in 3.

c) Sile na klancu. Telo z maso 1 kg ~~je postavljeno na pono~~ miruje na klancu. Kolikšen je koeficient lepenja, če telo zdrsne ko naklonski kot klanca povečamo na 35°



Katere sile delujejo na telo, ki stoji na klancu?

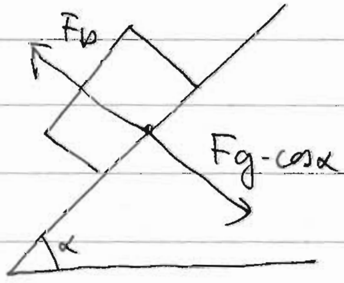
- sila teže navpično navzdol
- sila podlage $\vec{F}_p$, ki deluje $\perp$ na smer klanca.

Ker telo miruje, mora biti vsota vseh zunanjih sil enaka 0. Sile razstavim na komponente, ki so pravokotne s klancem in sile, ki so paralelne s klancem:

sile, ki so pravokotne na klanec: F_p in $F_g \cdot \cos\alpha$

Ta sila stiska ($F_g \cdot \cos\alpha$) telo ob klanec in zaradi tega se pojavi še dodatna sila v smeri paralelno s klancem, t.j. sila lepenja.

a) pravokotne sile:

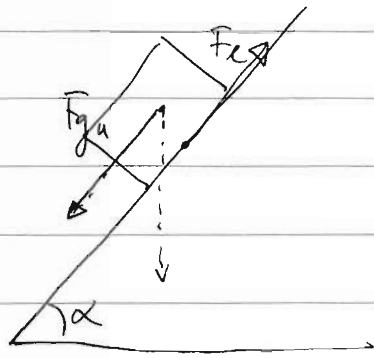


$$F_p - F_g \cdot \cos\alpha = 0$$

$$F_p - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$$

S tako silo telo tišči ob podlago.

b) sile vzporedne s klancem:



$F_{g\parallel} = F_g \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ to je komponenta sile teže, vzporedna s klancem.

$F_l = F_g \cdot \cos\alpha \cdot k_l = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot k_l$

Pogoj: $F_{g\parallel} \le F_{l\,max}$, telo ne drsi navzdol

$$\cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot \sin\alpha \le \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot \cos\alpha \cdot k_l \qquad / : \cos\alpha$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha \le k_l}$$

Če je kot α prevelik, telo zdrsne. Pri katerem kotu zdrsne?

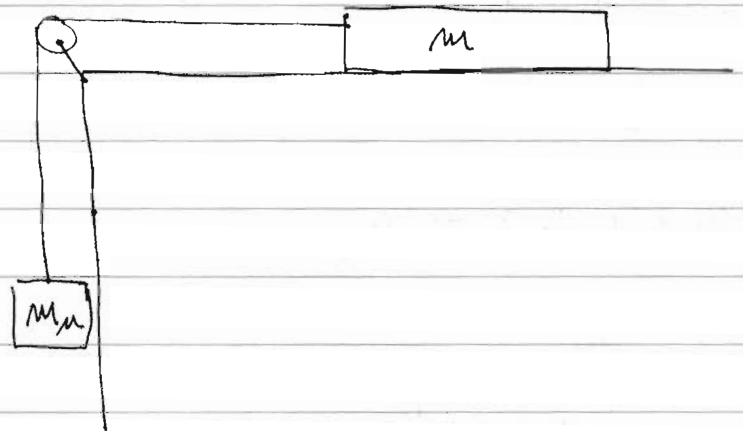
$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha_{max} = k_l} \qquad \alpha_{max} = 35^\circ \Rightarrow k_l = 0{,}70$$

Poglejmo si na primeru, kakšni so koeficienti lepenja.

d) enakomerno pospešeno gibanje

Poglejmo si eksperiment, v katerem enakomerno pospešujem voziček na zračni klopi:

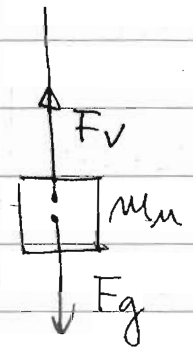
<u>Opozori</u>: to ni točkasto telo !!!



$m =$

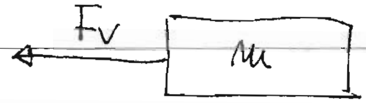
Koliko teles je v sistemu? Napišemo enačbe gibanja (2. Newtonov zakon) za vsako telo posebej. Ker sta telesi povezani z vrvico, ki se ne razteguje, sta pospeška obeh teles enaka, imata pa različni smeri.

Utež: Katere sile delujejo na utež?



$$F_g - F_v = m_u \cdot a$$

Tam na predznak $\vec{a}$-ja in $\vec{F}_g$



Jahač: Deluje samo sila vrvice

$$F_v = m \cdot a$$

$= \frac{0,86}{10,5} = 0,082 \Rightarrow \underline{\beta = 4,7^\circ}$

$\beta = 0,38$ deg

Imam torej dve enačbi z dvema neznankama, F_v in a

$$F_g - F_v = m_u a$$

pazim m in m_u

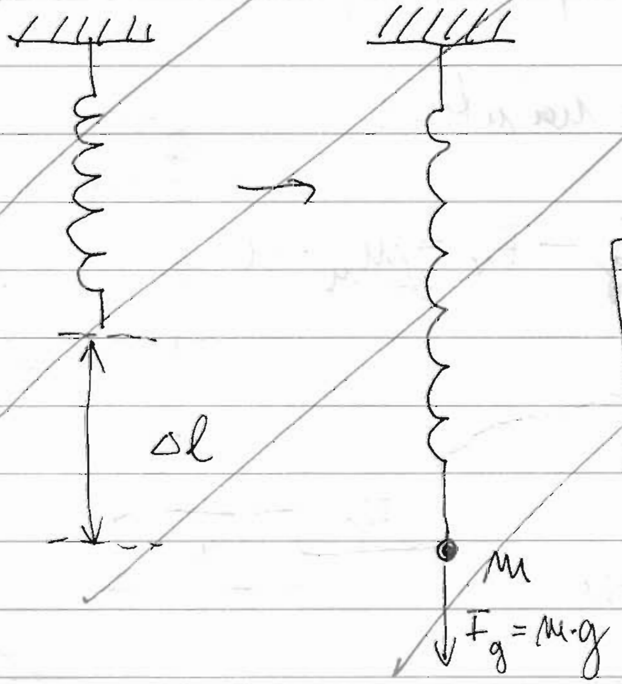
$$F_v = m \cdot a$$

Če enačbi seštejem, dobim:

$$F_g = (m + m_u)\cdot a = m_u \cdot g$$

$$\boxed{a = \frac{m_u}{m + m_u}\cdot g}$$

S čim merimo sile? Najbolj preprost merilec je vijačna vzmet:



Ko damo na vzmet maso ali jo potegnemo, se raztegne. Raztezek je sorazmeren s silo

$$\boxed{F = k \cdot \Delta l}$$

k.... koeficient vzmeti [N/m]

1.3. Izrek o gibalni količini točkastega telesa

Izhajamo iz 2. Newtonovega zakona za 1 točkasto telo

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\vec{F}$ .... zunanja sila
m .... masa točkastega telesa
$\vec{a}$ .... pospešek točkastega telesa

Spomnimo se, da je pospešek definiran takole:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

to je sprememba hitrosti v časovni enoti. Ali sprememba za $\Delta \vec{v}$ v času Δt.

Vstavim v Newtonov zakon in dobim:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad / \cdot \Delta t$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} = m\left(\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right)$$

Torej se 2. Newtonov zakon zapiše:

$$\boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}} \Rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{G}}$$

Uvedem novo količino: $\vec{G} = m \cdot \vec{v}$

To je gibalna količina z enoto [kg·m/s]. ~~2 Newtonov zakon~~

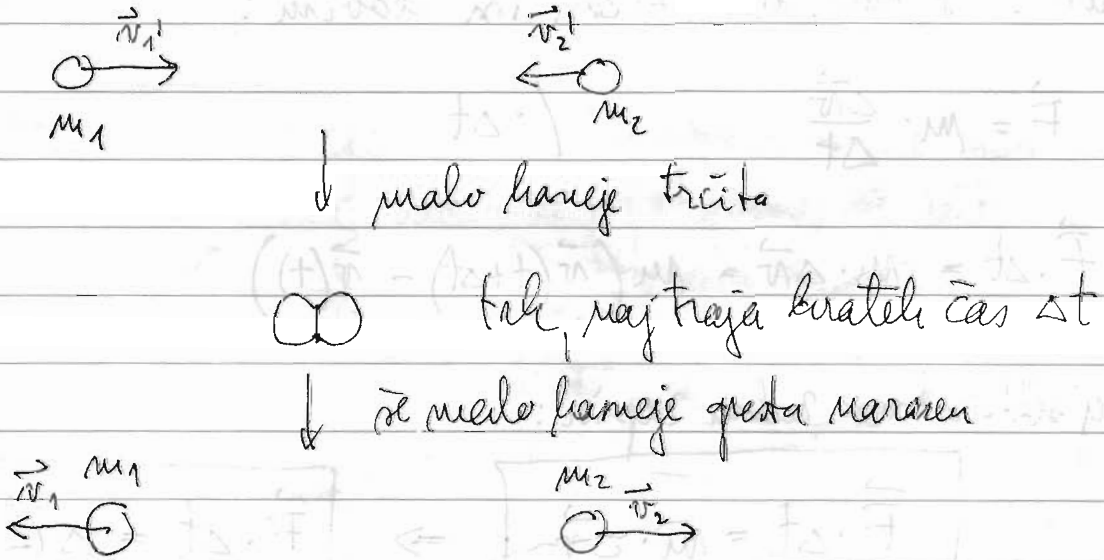
Dobili smo izrek o ohranitvi gibalne količine, ki pravi: skupni sunek zunanjih sil je enak spremembi gibalne količine. Ali:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} \qquad \Delta G = m \cdot \vec{v}(t+\Delta t) - m \cdot \vec{v}(t)$$

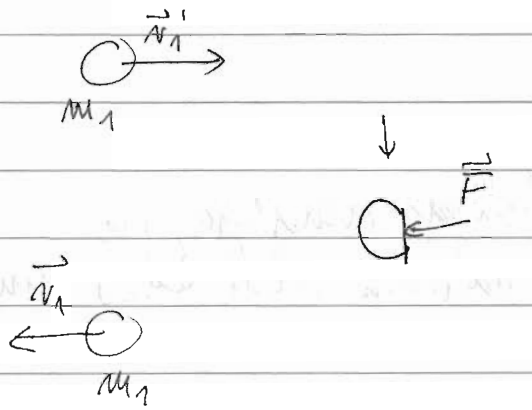
Poseben primer: $\vec{F} = 0$ (zunanje sile so enake 0).

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \Delta \vec{G} = 0$$

Kako lahko ta izrek ~~lahko~~ koristno uporabimo? Poglejmo si trk dveh majhnih kroglic, ki gresta ena proti drugi:



Poglejmo, kaj se dogaja s prvo kroglico:

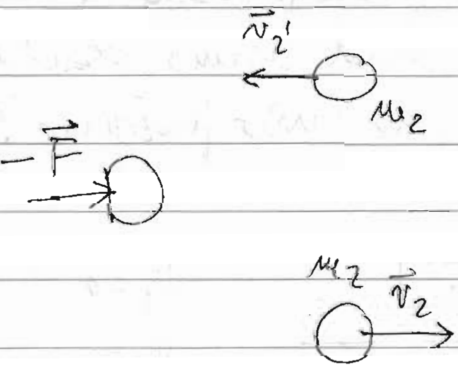


deluje sila $\vec{F}$ od druge kroglice v času trka Δt

Zapišimo zakon o ohranitvi gibalne količine za to kroglico:

$$\vec{F}\cdot\Delta t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_1'$$

Poglejmo za drugo kroglico:



$$-\vec{F}\cdot\Delta t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_2'$$

Imam torej dve enačbi, vsako za eno kroglico

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}\Delta t &= m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_1' \\ -\vec{F}\Delta t &= m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_2' \end{aligned}\right\}$$ enačbi seštejem in dobim:

$$0 = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) - (m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2')$$

gibalna količina obeh kroglic na začetku

gibalna količina obeh kroglic na koncu

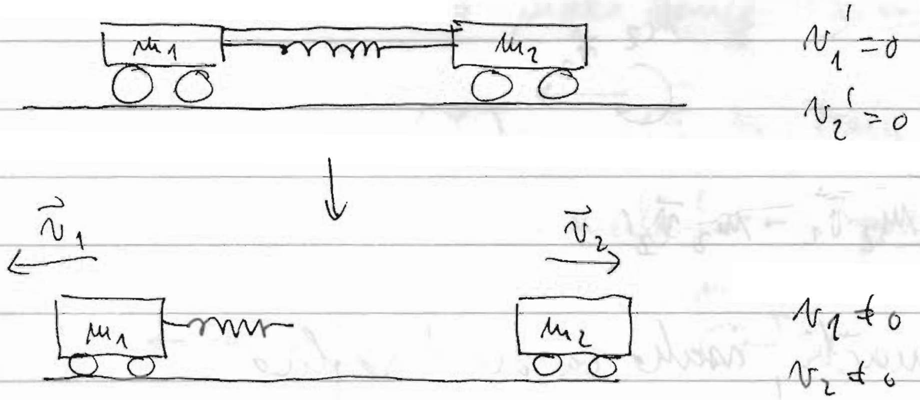
Definiram skupno gibalno količino

$\vec{G}$ (dveh teles) $= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Ker razen teže dveh teles ni nobenega drugega ni zunanjih sil, torej se gibalna količina obeh teles skupaj ohranja

$$\boxed{0 = \Delta\vec{G} = \vec{G}(t+\Delta t) - \vec{G}(t)}$$

1. Primer: Dva vozička z maso $m_1 = 1$ kg in $m_2 = 5$ kg sta na vodoravnem tiru. Med seboj sta povezana z vrvico, ki napenja vijačno vzmet med obema vozičkoma. Kolikšno je razmerje ~~hit~~ hitrosti obeh vozičkov, ko vrvico prežgemo?



Ker v vodoravni smeri ni nobene zunanje sile, se gibalna količina obeh vozičkov skupaj ohranja

$$0 = \vec{G} - \vec{G}' = (-m_1 v_1 + m_2 v_2) - (0 + 0) = m_2 v_2 - m_1 v_1$$

Če sta masi enaki, $m_1 = m_2$, sta hitrosti ~~en~~ nasprotno enaki. To pomeni, da vozička opravita enako veliko pot v enakem času. Če enega od vozičkov obtežim, bo imel manjšo hitrost in pa bo opravil krajšo pot kot lažji voziček.

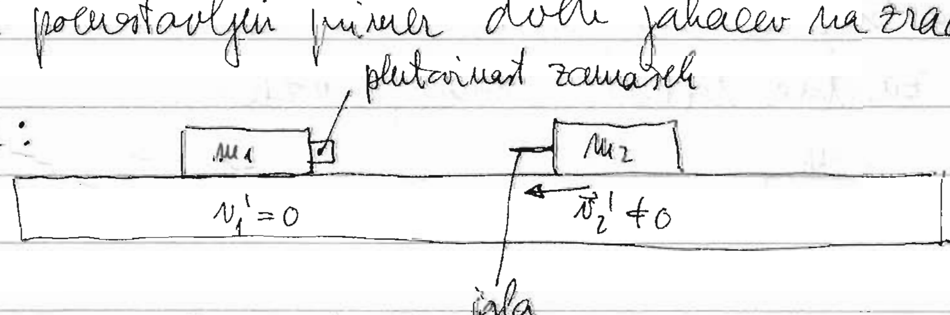
2. Primer: neprožni trk dveh vozičkov.
Trki dveh ali več teles so primeri, pri katerih uporabljamo ~~zakon~~ izrek o gibalni količini.

Trki
→ prožni: ohranja se gibalna količina
ohranja se kinetična energija
→ neprožni: ohranja se gibalna količina
ne ohranja se kinetična energija

Primer prožnega trka: trk dveh biljardnih krogel (skoraj)
Primer neprožnega trka: avtomobil se zaleti v steno

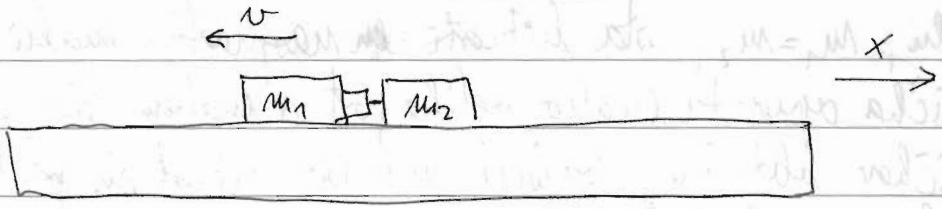
Poglejmo si poenostavljen primer dveh jahačev na zračni progi

Pred trkom:



Hitrost drugega vozička pred trkom v_2' merim z uro.

Po trku: oba vozička sta med seboj povezana in se gibljeta z enako hitrostjo:



Za sistem štejem oba vozička skupaj, torej imam v sistemu dve telesi. Vsako telo prinese svojo gibalno količino.
Ker v vodoravni (x) smeri ne deluje nobena sila, je vsota zunanjih sil v tej smeri enaka 0! Torej velja

$$F \cdot \Delta t = 0 = \Delta G = m_1 v + m_2 v - (m_1 v_1' + m_2 v_2') =$$

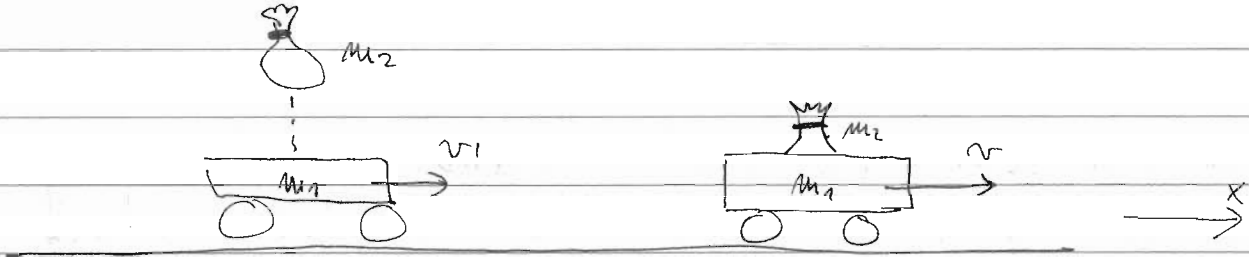
$$= (m_1 + m_2) v - m_2 v_2' \quad \text{ker je } v_1' = 0$$

$$(m_1 + m_2) v = m_2 \cdot v_2'$$

$$\boxed{v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2'}$$

Masi vozičkov sta izbrani tako, da sta enaki, $m_1 = m_2$
torej mora biti končna hitrost obeh vozičkov po trku enaka polovici začetne hitrosti drugega vozička.

3. Primer: Na voziček, ki se z enakomerno hitrostjo giblje po vodoravnem tiru, vržemo vrečko s peskom v smeri navpično na tir. Kaj se zgodi s hitrostjo vozička?



ali je $v = v'$?

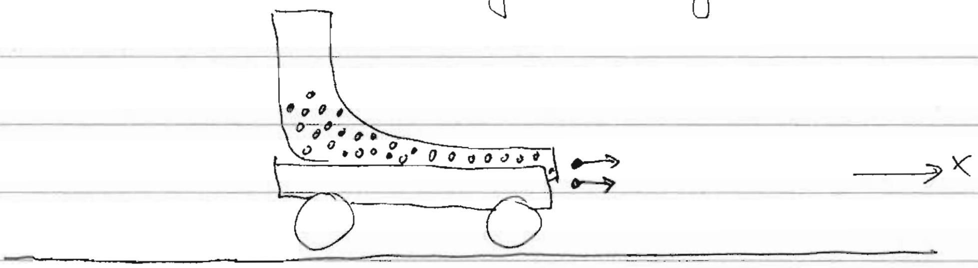
Kam je usmerjen sunek sile? Pravokotno na tir. To pomeni, da je sunek zunanje sile v smeri vzporedno s tirom enak 0. Torej se mora ohranjati celotna gibalna količina v tej smeri.

$$\Delta G_x = G_x - G_x' = (m_1+m_2)\cdot v - m_1 v_1' = 0$$

$$\boxed{v = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot v_1'}$$

Ker se masa poveča, se mora hitrost zmanjšati, da ostane gibalna količina konstantna. Voziček se torej upočasni.

4. Primer: vozički iz katerega iztekajo šibre



Zakaj se začne voziček gibati? Iztekajoče šibre imajo gibalno količino v smeri x. Ker se mora celotna gibalna količina vozička in šiber ohranjati, se začne voziček gibati v nasprotni smeri iztekajočih šiber. Na kaj vas to spominja? Na raketni motor, s čemer pridemo do sile curka.

5. Primer: Človek z maso 80 kg se vozi v avtomobilu s hitrostjo 100 km/h. Avtomobil se čelno zaleti v steno in obmiruje. Izračunaj, s kolikšno povprečno silo deluje pločevina avtomobila na človeško telo, če je čas trka telesa in pločevine 0,5 ms. Za koliko se zmanjša ta sila, če z zračno blazino podaljšamo čas trka na 20 ms?

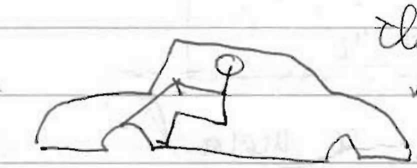
$v' = 100\ km/h$

$\Delta t_1 = 0,5\ ms$

$\Delta t_2 = 20\ ms$

$F_1 = ?$

$F_2 = ?$



Človek z maso m in hitrostjo v' ima gibalno količino $G' = m \cdot v'$. Ko se ustavi, je gib. kol. enaka

Sunek sile je enak spremembi gib. količine:

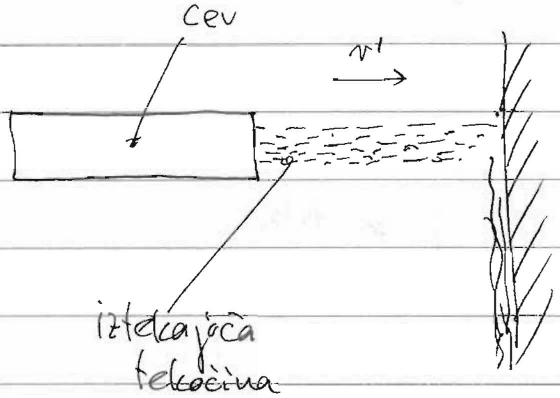
$$\Delta G = m(0 - v') = F \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{F = -\frac{mv'}{\Delta t}}$$

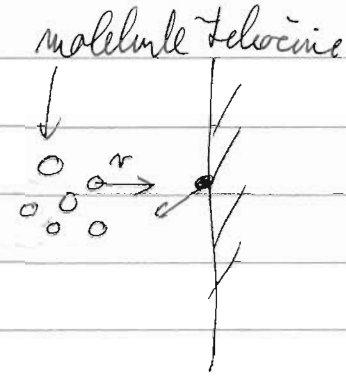
$$F_1 = \frac{80\,kg \cdot 27\,m/s}{0,5 \cdot 10^{-3}\,s} = \frac{8 \cdot 2,7}{0,5} \cdot 10^5\,N = \underline{4,3 \cdot 10^6\,N}$$ → to ustreza sili teže 430 ton!!

Sila teže 1 tone je $10^3\,kg \cdot 9,8\,m/s^2 \approx 10^4\,N$

$$F_2 = \frac{80\,kg \cdot 27\,m/s}{20 \cdot 10^{-3}\,s} = \frac{8 \cdot 2,7}{2} \cdot 10^4\,N = \underline{10,8 \cdot 10^4\,N}$$ → to ustreza sili teže 10,8 ton!!

1.3.1. Sila curka in nasprotna sila curka

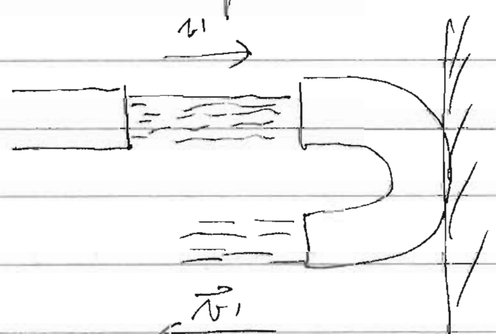




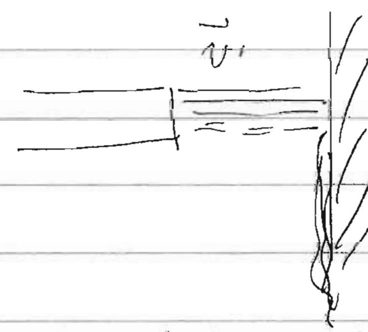
Curek tekočine s hitrostjo v' zadane mirujočo pregrado pod pravim kotom. S kolikšno silo deluje curek tekočine na pregrado?

Poglejmo si dva primera:

a)



b)

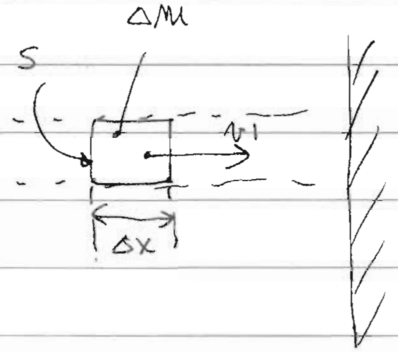


a) Smer hitrosti se spremeni za 180°, voda se odbije od stene v nasprotni smeri

b) Hitrost po trku vode s steno je praktično 0, voda pade po steni.

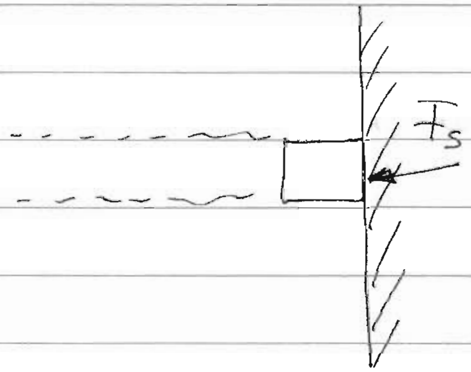
Za kaj gre v obeh primerih?

To si najlažje ogledamo, če zasledujemo gibanje enega najmanjšega dela tekočine:

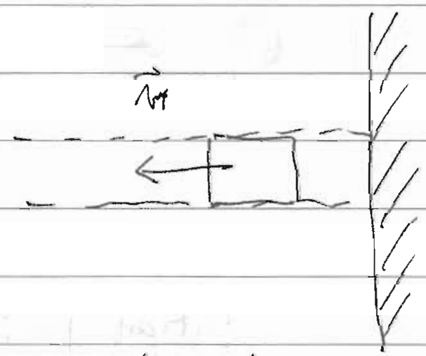


pred trkom

$\Delta m = \rho \cdot \Delta x \cdot S$



trk tekočine s steno



tekočina se od odbije od stene ali pa odteče.

V obeh primerih velja, da je sprememba gibalne količine delčka vode zaradi sile stene F_s.

Poglejmo gibalno količino na začetku, pred trkom

$$G' = \Delta m \cdot v' = \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v'$$

Po trku: $G = -\rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v$

Sunek sile je tery malo

$$F_s \cdot \Delta t = -\rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v - \rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot v' =$$

$$= -\rho \cdot S \cdot \Delta x \,(v + v') \qquad / : \Delta t$$

$$F_s = -\rho \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}(v + v')$$

to je sila, s katero stena deluje na tekočino. Sila tekočine na steno mora biti ravno obratna

$$F_c = \rho \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}(v + v') = \rho \cdot \Phi_V (v + v') = \Phi_m (v + v')$$

$$\boxed{F_c = \Phi_m (v + v')}$$

Φ_m .... masni pretok skozi cev (koliko kg vode steče vsako sekundo skozi cev $m/\Delta t$)

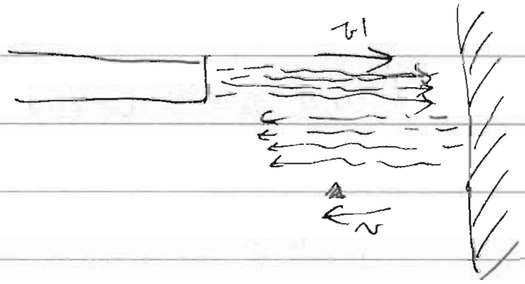
a) V primeru, da voda odbije z enako hitrostjo

$$v = v' \Rightarrow \boxed{F_c = 2\Phi_m \cdot v'}$$

b) V primeru, da voda po trku spolzi ob steni, $v = 0$

$$\boxed{F_c = \Phi_m \cdot v'}$$

Primer: iz plastične cevi s premerom 2 cm steče vsako minuto ~~[illegible]~~ 30 l vode v vodoravni smeri. S kolikšno silo deluje curek vode na navpično steno, če se voda odbije od stene z enako veliko hitrostjo ~~[illegible]~~ v vodoravni smeri?



$F_c = 2\cdot\Phi_m\cdot v'$ Poiskati moramo v' in Φ_m

$$\Phi_m = \frac{\rho\cdot S\cdot\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{30\,dm^3\cdot 1\,kg/dm^3}{60\,s} = 0{,}5\,kg/s$$

Masni tok vode je torej 0,5 kg/s.
Kolikšna je hitrost vode?

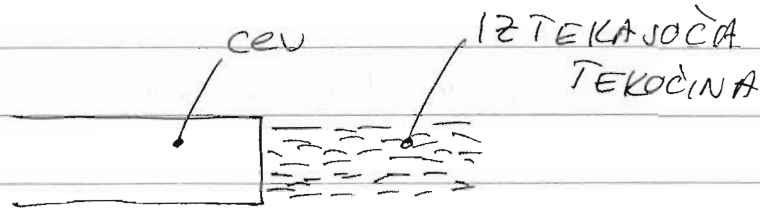
$$\Phi_m = \rho\frac{S\cdot\Delta x}{\Delta t} = \rho\cdot S\cdot v' \Rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = v'$$ to je ravno hitrost iztekajoče tekočine

$$\Rightarrow v' = \frac{\Phi_m}{\rho\cdot S} = \frac{0{,}5\,kg\cdot dm^3}{s\cdot 1\,kg\cdot\pi\, 1\,cm^2} =$$

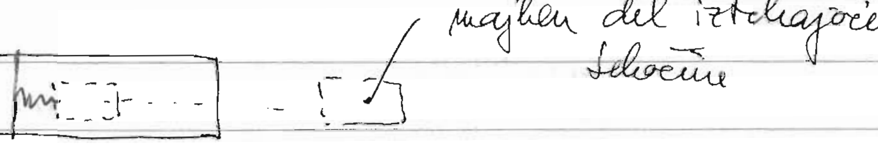
$$= \frac{0{,}5}{\pi}\cdot\frac{\cancel{dm^3}\,10^3\,cm^3}{s\,cm^2} = 159\,cm/s = 1{,}59\,m/s$$

$$F_c = 2\cdot\Phi_m\cdot v' = 2\cdot 0{,}5\,kg/s\cdot 1{,}59\,m/s = 1{,}59\,kgms^{-2} = \underline{\underline{1{,}59\,N}}$$

Nasprotna sila curka:



Na kaj vas to opominja? Na raketo. Iz izkušenj vemo, da na cev deluje sila iztekajočega curka. Od kod pride ta sila



Delci tekočine, ki odleti iz cevi, vzame s seboj gibalno količino. Ker se mora gibalna količina v celoti ohraniti (ni zunanjih sil), deluje na cev (šobo) sila curka, ki je enaka

$$\boxed{F_{reakc} = \Phi_m \cdot v}$$

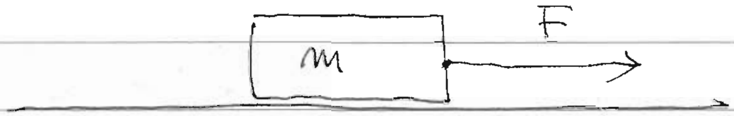
Φ_m ... masni pretok po cevi

v ... hitrost iztekajoče tekočine

Ohranitev energije točkastega telesa

1.4. Izrek o ohranitvi polne energije točkastega telesa

1.4.1. Kinetična energija in delo zunanjih sil



Telo z maso m je postavljeno na vodoravno podlago, po kateri lahko drsi brez trenja. Telo (s konstantno hitrostjo mu začnemo) vlečemo s konstantno silo $\vec{F}$ v smeri vzporedno s podlago. Definiramo delo zunanje sile F, ki premakne telo z maso m za razdaljo s:

$$\boxed{A = F \cdot s}$$

A .... delo zunanje sile
F .... zunanja sila
s .... premik telesa v smeri zunanje sile $\vec{F}$!

Poglejmo, ali se da povezati delo zunanje sile A in hitrost telesa, potem ko se je premaknilo za razdaljo s? Ker je F konstantna, se telo z maso m giblje enakomerno pospešeno:

$$F = m \cdot a \Rightarrow A = F \cdot s = m \cdot a \cdot s$$

Vemo pa, da velja za enakomerno pospešeno gibanje

$$v^2 = v'^2 + 2ax$$

v' ... začetna hitrost
v ... končna hitrost
x ... pot

$v^2 = v'^2 + 2as \Rightarrow a \cdot s = \frac{1}{2}(v^2 - v'^2)$

To vstavim v zgornjo enačbo za delo in dobim

$$A = m \cdot a \cdot s = m \cdot \frac{1}{2}(v^2 - v'^2) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v'^2$$

Definiram kinetično energijo točkastega telesa:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

$$\boxed{A = W_k - W_k'}$$

150 km/h = 41,6 m/s

120 km/h = $\frac{120}{3,6}$ m/s = 33,3 m/s

Primer 1: Kolikšna je kinetična energija avtomobila z maso 1200 kg, ki vozi s hitrostjo 120 km/h? Za kolikokrat se energija poveča pri hitrosti 150 km/h

$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 kg \cdot 33^2 m^2/s^2 =$

$= 600 \cdot 33^2 J = \underline{\underline{666\ kJ}}$ | $600 \cdot 41,6^2 J = 1 MJ$

4200 J/kgK : energija potrebna za segretje 1 kg vode za 1K. ⇒ z ~ 160 K

2 l vode segretje za 80°

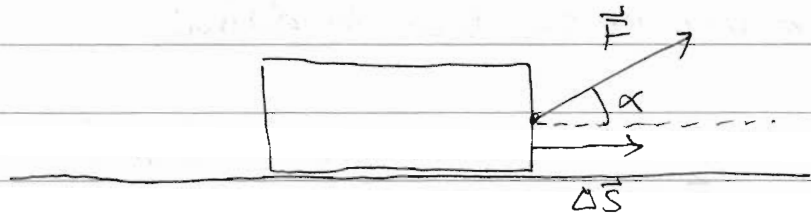
~~Delo zunanjih~~ To je izrek o kinetični energiji točkastega telesa, ki pravi:
delo zunanjih sil je enako spremembi kinetične energije.

V čem merimo delo in energijo:

$A = F \cdot s$ [N·m] = [J] Joule

Pomembno:
V splošnem je smer gibanja telesa različna od smeri posamezne sile, ker lahko delujejo še ostale sile.

Kot primer si oglejmo vlečenja telesa po vodoravni podlagi:



$\vec{F}$ .... zunanja sila
$\Delta\vec{s}$ .... premik telesa
α .... kot med silo in smerjo premika telesa

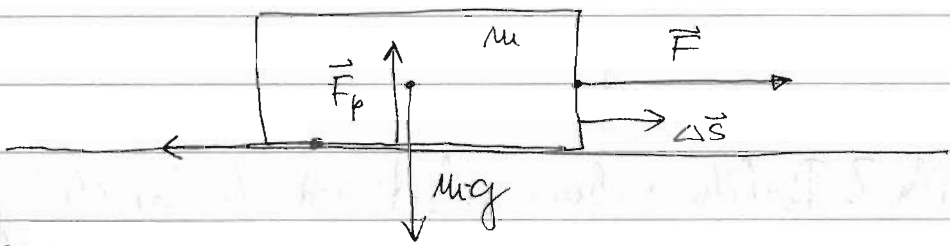
Sila $\vec{F}$ deluje pod kotom α glede na podlago, v smeri katere se telo giblje. Zato delo v splošnem definiram kot skalarni produkt

$$\boxed{\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \cos\alpha \cdot \Delta s}$$

$F \cos\alpha$ .... projekcija $\vec{F}$ na smer premika $\Delta\vec{s}$

Celotno delo sile na določeni poti dobim s seštevanjem prispevkov ΔA.
Kaj torej naredimo v primeru, ko imamo več sil, ki delujejo na dano telo? Upoštevati moramo delo vseh sil, vsake posebej.
Poglejmo si to na dveh različnih primerih:

Primer 1: Na vodoravni podlagi miruje telo z maso $m = 1\,kg$. Telo začnemo vleči s konstantno silo $2N$ v vodoravni smeri. Koeficient trenja s podlago je $k_{tr} = 0.1$. Kolikšna je kinetična energija telesa po $10\,m$ opravljene poti? Koliko dela opravimo? Kam gre razlika?



$F = 2N$

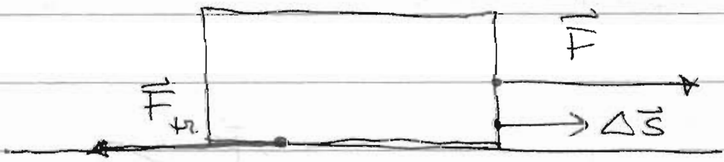
$m = 1\,kg$

$s = 10\,m$

$W_k = ?$

$A = ?$

Narišem vse sile, ki delujejo na telo. $\vec{F}_g$ in $\vec{F}_p$ sta v ravnovesju in delujeta pravokotno na premik $\Delta\vec{s}$. Zato je delo teh dveh sil enako 0. Moramo pa upoštevati silo trenja



$\Delta\vec{s}$ ... smer premika telesa

Delo zunanjih sil v smeri premika je torej sestavljeno iz dveh prispevkov:

$$\Delta A = \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{s} + \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \overset{\cos(180°) = -1}{-} F_{tr} \cdot \Delta s + F \cdot \Delta s = W_k - \underset{0}{W_k'} = W_k$$

$$W_k = F \cdot \Delta s - F_{tr} \cdot \Delta s = (F - F_{tr}) \cdot \Delta s = (F - mg\,k_{tr}) \cdot \Delta s =$$

$= (2N - 1kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cdot 0{,}1) \cdot 10m =$

$= (2N - 0{,}98 \underset{N}{kg\, m/s^2}) \cdot 10m = 1{,}02 \cdot 10\, Nm = \underline{\underline{10{,}2 J}}$

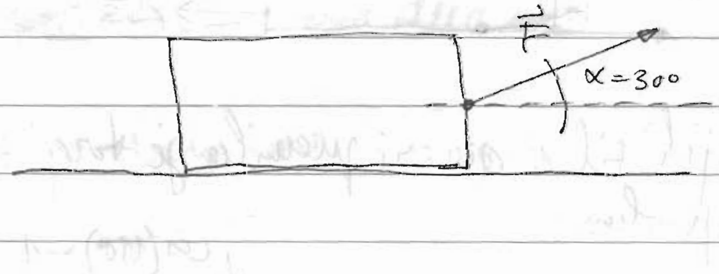
Kinetična energija telesa se poveča za 10,2 J.
Kolikšno delo opravi sila $\vec{F}$?

$A_{\vec{F}} = F \cdot \Delta s = 2N \cdot 10m = \underline{\underline{20 J}}$

Kam gre razlika? Razliko pobere sila trenja, katere delo je negativno (gre ven iz telesa) in se spremenija v toploto.

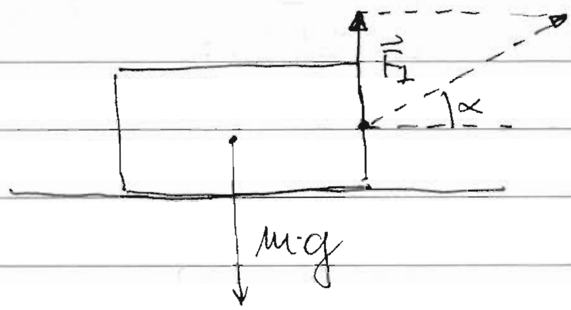
Primer 2: Na vodoravni podlagi miruje telo z maso $m = 1kg$. Telo začnemo vleči s konstantno silo 2N v smeri 30° glede na vodoravnico. Koeficient trenja s podlago je $k_{tr} = 0.1$. Kolikšna je kinetična energija telesa po 10 m opravljene poti?

$m = 1kg$
$F = 2N$
$k_{tr} = 0.1$
$\alpha = 30°$
$W_k = ?$



Ugotoviti moramo, kam se giblje telo, saj sila $\vec{F}$ ni edina sila, ki deluje na to telo. Vprašanje je ali se giblje v smeri vodoravno s podlago ali telo tudi dvignjeno!

Poglejmo sile, ki delujejo v navpični smeri! To sta sila teže in vertikalna komponenta sile $\vec{F}$:



$$F_\perp = F \cdot \sin\alpha$$

Če bo $F_\perp > mg$, bomo telo tudi privzdignili, kar pomeni, da ne bo trenja s podlago. Poglejmo, če se to res zgodi:

$$F_\perp > m \cdot g \text{ ? ali to velja}$$

$$\left.\begin{aligned} F_\perp &= F \cdot \sin\alpha = 2N \cdot \sin 30° = 2N \cdot 0{,}5 = 1N \\ m \cdot g &= 1kg \cdot 9{,}8 ms^{-2} = 9{,}8N \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_\perp < m \cdot g$$

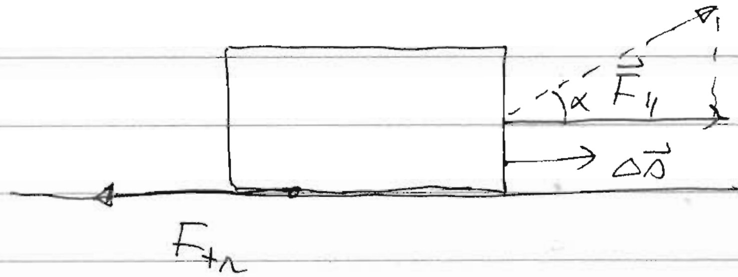
Telo je ves čas v stiku s podlago, nanjo pa pritiska s silo

$$F_p = m \cdot g - F_\perp = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$$

Ta sila na podlago povzroča silo trenja:

$$F_{tr} = k_{tr}(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha)$$

V vodoravni smeri tako delujeta dve sili:



$F_\parallel = F \cdot \cos\alpha$

$\Delta\vec{s}$ ... smer pomik

$$A = \vec{F}_\parallel \cdot \Delta\vec{s} + \vec{F}_{tr} \cdot \Delta\vec{s} = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s - F_{tr} \cdot \Delta s =$$

$$= F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s - (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha) \cdot k_{tr} \cdot \Delta s = W_k - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{W_k'}} = W_k$$

$$\boxed{W_k = \Delta s \cdot \left(F \cdot \cos\alpha - k_{tr}(m \cdot g - F \cdot \sin\alpha)\right)}$$

Izračunajmo kolikšna je v tem primeru W_k:

$$W_k = 10\,m \cdot \left(2N \cdot \cos 30° - 0{,}1 \cdot (9{,}8\,N - 1\,N)\right) =$$

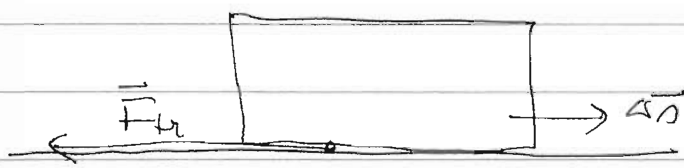
$$= 10\,m\,(1{,}73 - 0{,}88)\,N = \underline{\underline{8{,}5\,J}}$$, to je manj, kot v prejšnjem primeru!

Kolikšna je hitrost? $W_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}5\,kg\,m^2/s^2}{1\,kg}} = \underline{\underline{4{,}1\,m/s}}$$

Primer 3: Avtomobil mase m se giblje s hitrostjo $v = 72\,km/h$. V nekem trenutku blokiramo kolesa, tako da avtomobil začne drseti. Na kolikšni razdalji se avtomobil ustavi, če je koeficient trenja med kolesi in cesto $k_{tr} = 0.5$. Kolikšna je ta razdalja na poledenelem cestišču s koeficientom trenja $k_{tr} = 0,05$?

$$v = 72\,km/h = \frac{72\cdot 10^3\,m}{3{,}6\cdot 10^3\,s} = 20\,m/s$$



$$A = \vec{F}_{tr}\cdot\Delta\vec{s} = -F_{tr}\cdot\Delta s = \overset{\shortparallel 0}{W_k} - W_k' = -W_k' = -\frac{1}{2}m\cdot v^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_{tr}\cdot\Delta s = m g\cdot k_{tr}\cdot\Delta s$$

$$\boxed{\Delta s = \frac{v^2}{2 g k_{tr}}}$$

$$\Delta s_1 = \frac{20^2\,m^2/s^2}{2\cdot 9{,}8\,m/s^2\cdot 0{,}5} = 41\,m$$

$$\Delta s_2 = \frac{20^2\,m^2/s^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}05\,m/s^2} = \underline{\underline{410\,m}}$$

Primer 4: Neprožni trk dveh vozičkov na zračni progi. Zadnjič smo pokazali, da velja zakon o ohranitvi gibalne količine:

$m_1 = 10\,kg$
$v_1' = 10\,m/s$
$m_2 = 2\,kg$
$v_2' = 0$

$$\vec{F}\cdot\Delta t = \vec{G} - \vec{G}' \Rightarrow F\cdot\Delta t = 0 \qquad G = G'$$

$$(m_1 + m_2)v = m_1 \cdot v'$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot v'$$

Ker je $m_1 = m_2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}v'$

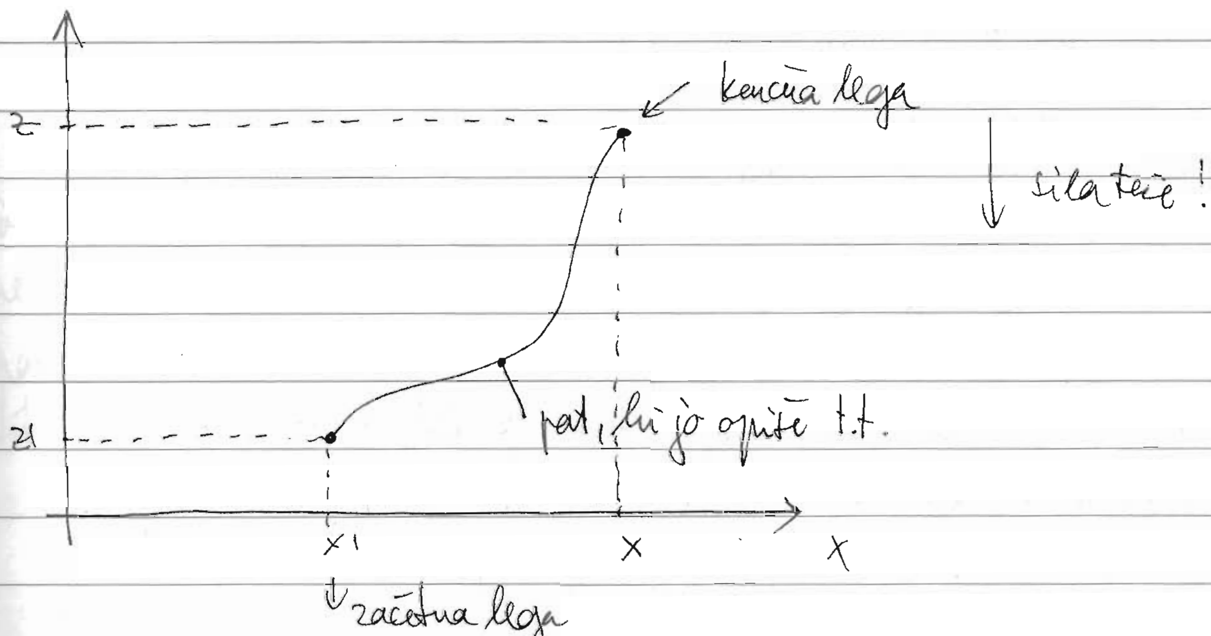
Kakšna pa je energija pred trkom in po njem?

$$W_k - W_k' = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 - \frac{1}{2}m_1 v'^2 = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\frac{v'^2}{4} - \frac{1}{2}mv'^2 =$$

$$= \frac{1}{4}mv'^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = -\frac{1}{4}mv'^2 < 0 \quad !!$$

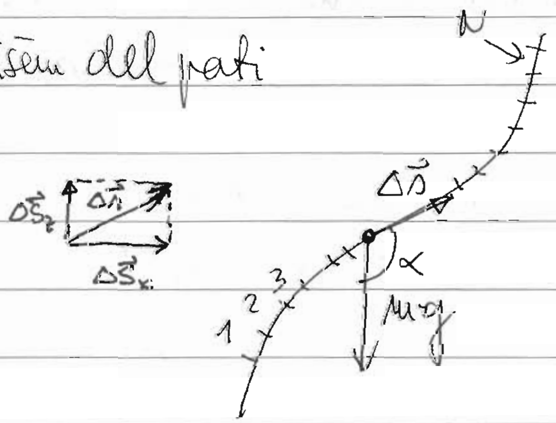
Kinetična energija se torej zmanjša! Kam je šla? Šla je v deformacijsko energijo, ziranu v gretje plutovinastega zamaška in igle.
Torej kljub temu, da je delo zunanjih sil enako nič, energijski zakon v taki obliki, kot smo ga zapisali ne velja!

1.4.2. Delo sile teže, potencialna energija t.t.



Poglejmo, koliko dela opravi sila teže, ko točkasto telo premaknemo iz začetne lege na višini z' do končne lege na višini z!

Narišem del poti



$$\Delta\vec{s} = (\Delta s_x, \Delta s_z)$$

$$\vec{F}_g = (0, -m \cdot g)$$

$$\Delta A = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{s} = -m \cdot g \cdot \Delta s_z$$

Če sedaj seštejem vse prispevke k delu, naj bo N odsekov

$$A_{\text{sila teže}} = \sum_{\text{po vseh odsekih}} -m \cdot g \cdot \Delta s_z = -m g \sum_{\text{po vseh odsekih}} \Delta s_z = -m \cdot g (z - z')$$

Delo je odvisno samo od razlike višin!! Ne glede na pot, ki jo opravimo vmes, je delo odvisno samo od razlike!

Trdimo, da je sila teže konservativna sila!
Celotno delo zunanjih sil razdelim na

$$A = A_{teže} + A_{\substack{ostale\\sile}} = W_k - W_k'$$

$$A_{\substack{ostale\\sile}} = W_k - W_k' - A_{teže} = W_k - W_k' + m \cdot g(z - z') =$$

$$= W_k - W_k' + m \cdot g \cdot z - m \cdot g \cdot z'$$

Uvedemo potencialno energijo telesa : $W_p = m \cdot g \cdot z$
Je odvisna samo od višine, na kateri se tl. nahaja!
Izrek o ohranitvi energije sedaj zapišemo :

$$\boxed{A_{\substack{ostale\\sile}} = W_k - W_k' + W_p - W_p'}$$

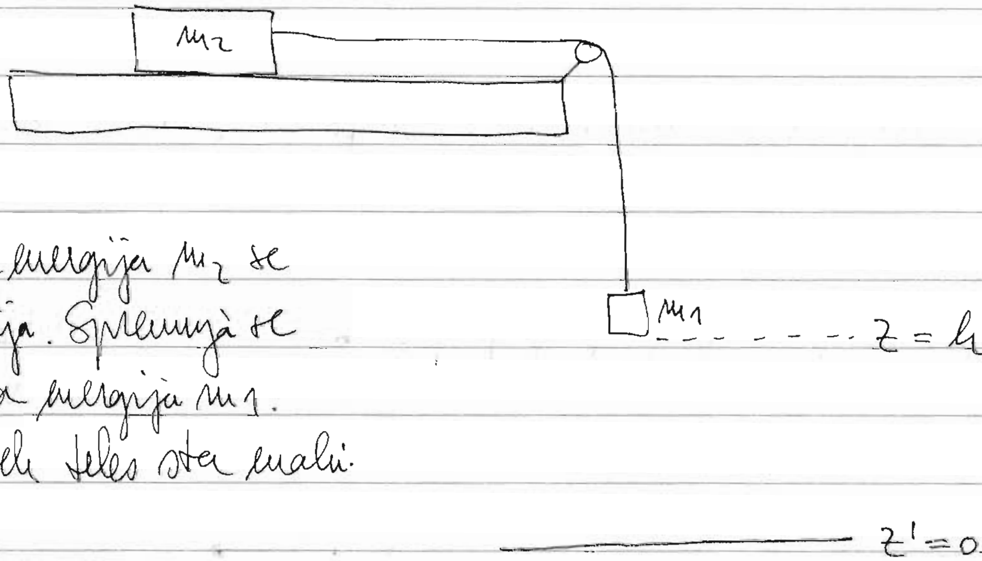
Delo zunanjih sil razen sile teže je enako ~~spremembi~~ vsoti kinetične energije in potencialne energije telesa.

Primer 1: Kroglico vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo 10m/s. Do katere višine se bo povzpela?

$$A_{\substack{ostale\\sile}} = 0 = \overset{0}{W_k} - \overset{-\frac{1}{2}mv^2}{W_k'} + W_p - W_p' = -\frac{1}{2}mv^2 + m \cdot g(z - z')$$

$$z - z' = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2 m^2/s^2}{2 \cdot 9{,}8 m/s^2} = \underline{5{,}1 m}$$

Primer 2: Pospeševanje telesa na zračni progi:



Potencialna energija m_2 se ne spreminja. Spreminja se potencialna energija m_1. Hitrosti obeh teles sta enaki.

$$A_{\substack{\text{ostale}\\ \text{sile}}} = 0 = W_k - W_k' + W_p - W_p' =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 - 0 + \cancel{m_1 g h}\, 0 - m_1 \cdot g \cdot h$$

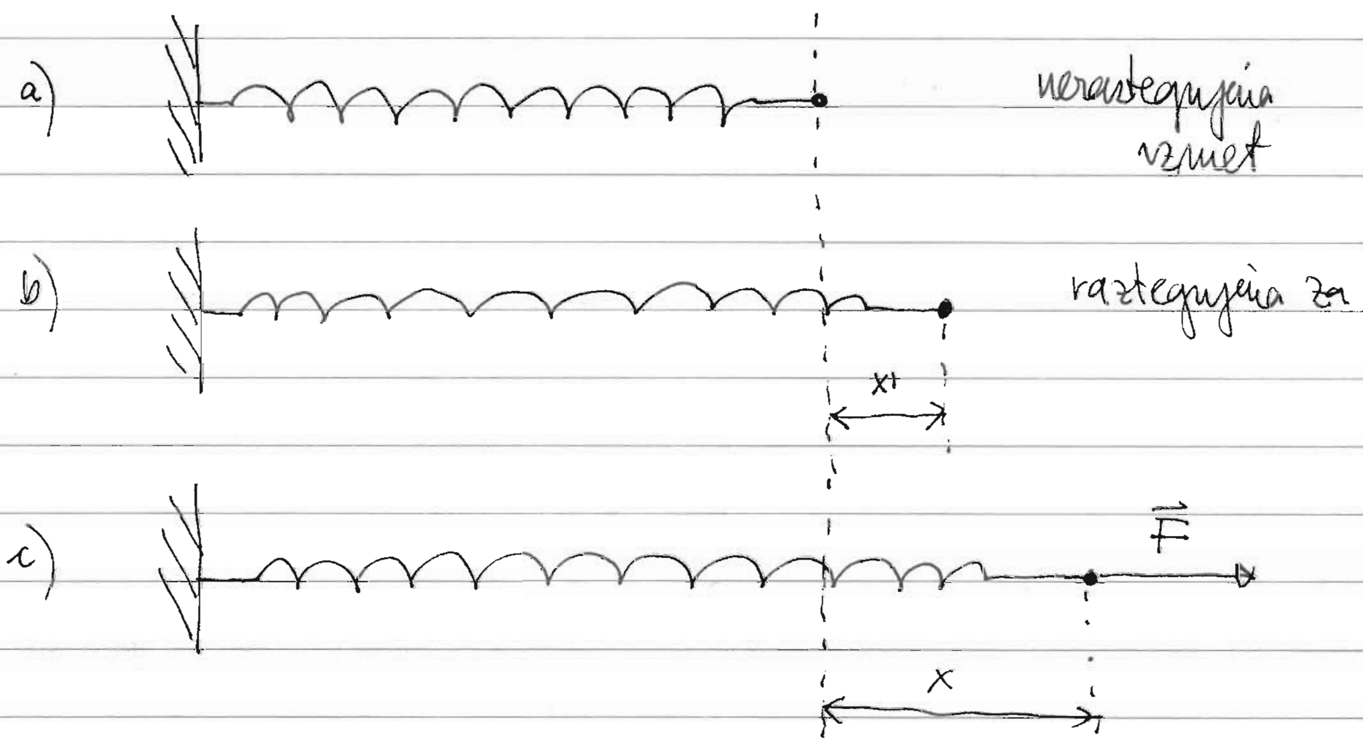
$$\frac{v^2}{2}(m_1 + m_2) = m_1 g h \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 m_1 g \cdot h}{m_1 + m_2}}}$$

Izmerim hitrost vozička z maso m_2 potem ko m_1 dotakne tla.

$v = 0{,}789\,m/s$

1.4.3. Prožnostna energija

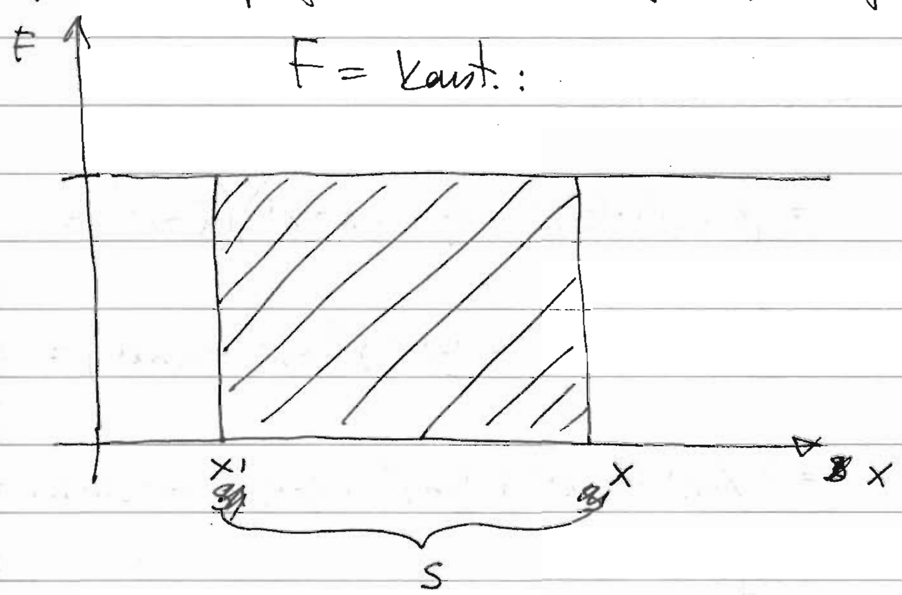
Poglejmo delo, ki ga opravlja zunanja sila pri raztegovanju vzmeti:



Z zunanjo silo raztegnem vzmet od začetnega raztezka x' do končnega raztezka x. Kolikšno delo opravi pri tem zunanja sila?

Ugotovimo: ko vzmet raztegujemo, se mora zunanja sila tem ustrezno povečevati, ni konstantna, ker velja $F = k \cdot x$. Sila se torej spreminja, medtem ko vzmet raztegujemo od začetne lege x' do končnega raztezka x. Kako v tem primeru izračunati delo sile?

Poglejmo si pojem dela, ki ga opravlja konstantna sila $\vec{F}$:

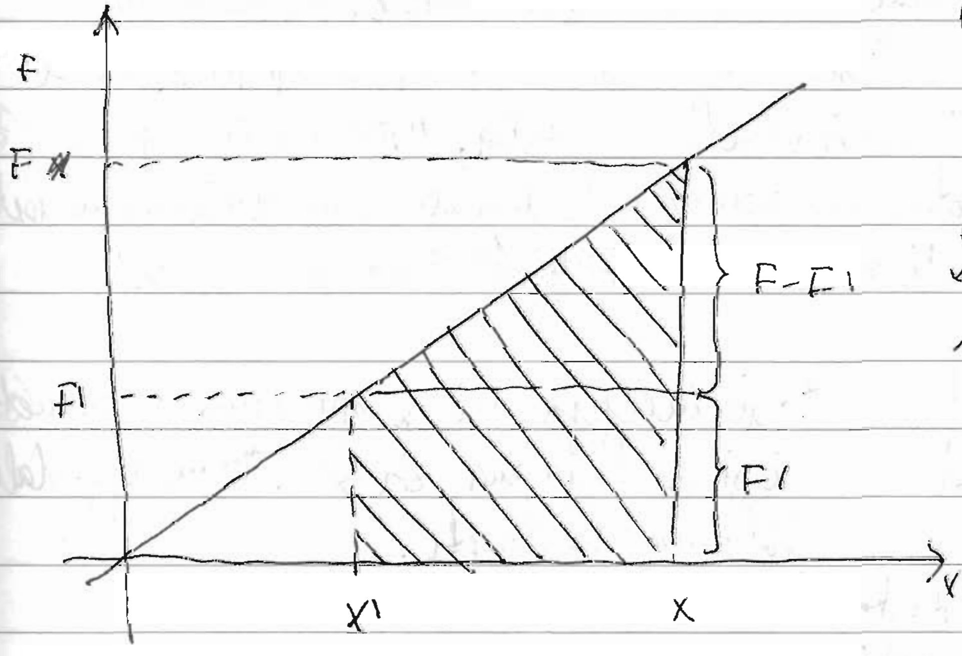


sila se s premikom ne spreminja

V tem primeru je $A = F \cdot s = F(x - x')$. To je torej enako ploščini like pod krivuljo, ki kaže odvisnost sile pri premikanju telesa.

Kaj pa pri vzmeti? Vemo, da sila narašča sorazmerno z raztezkom vzmeti:

$F = k \cdot x$ To je enačba premice



Delo je zopet ploščina like pod krivuljo, ki kaže odvisnost sile od raztezka (ali poti)

Izračunam ploščino osenčenega lika, ki predstavlja delo:

$$A = (x - x')F' + \frac{1}{2}(F - F')(x - x') =$$

Velja $F' = k \cdot x'$
$\underline{F = k \cdot x}$

$$= (x - x') \cdot k \cdot x' + \frac{1}{2} k (x - x')(x - x') =$$

$$= k \cdot x \cdot x' - k \cdot x'^2 + \frac{1}{2} k (x^2 + x'^2 - 2xx') =$$

$$= k \cancel{x} \cdot x' - k \cdot x'^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x'^2 - k \cancel{x} \cdot x' =$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k \cdot x'^2$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x'^2}$$

Delo, ki ga opravi zunanja sila pri stiskanju ali raztezanju vzmeti je torej odvisna samo od začetnega in končnega raztezka vzmeti, ne pa od tega, kar se je z vzmetjo dogajalo. Sila prožnosti je torej konservativna sila, notranja energija vzmeti pa je ~~od~~visna samo od končnega in začetnega raztezka. ~~Rečemo tu~~ Zaradi tega uvedemo prožnostno energijo:

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2} k x^2}$$

to je energija, ki je spravljena v vzmeti, če je raztegnjena za x. To energijo lahko dobimo iz vzmeti.

k ... prožnostna konstanta
x ... raztezek vzmeti

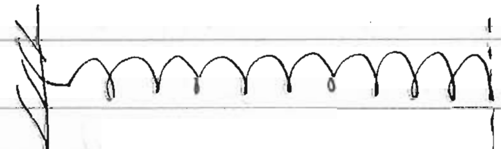
Izrek o ohranitvi energije se sedaj glasi:

$$\boxed{A_{zun} = W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_{prož} - W_{prož}'}$$

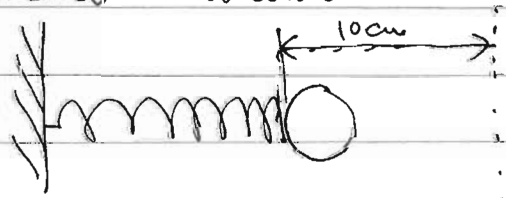
Delo zunanjih sil razen sile teže in sile vzmeti je enako vsoti sprememb kinetične, potencialne in prožnostne energije.

Primer 1: Vijačna vzmet s koeficientom $k = 10 N/m$ je postavljena v vodoravni smeri. Vzmet stisnemo za 10 cm in predenjo postavimo majhno kroglico z maso 10 g. S kolikšno hitrostjo odleti kroglica, potem ko vzmet spustimo. Maso vzmeti zanemari!

a) neraztegnjena vzmet

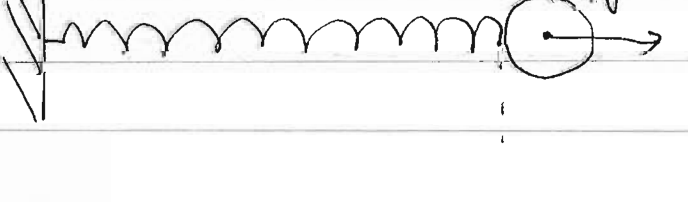


b) vzmet stisnemo:



$W_k' = 0$, $W_{prož}' = \frac{1}{2}kx'^2$

c) vzmet spustimo. Kroglica pospešuje do lege, v kateri je neraztegnjena



$W_k = \frac{1}{2}mv^2$ $W_{prož} = 0$

Ker drugih sil v vodoravni smeri ni, velja

$$A = 0 = W_k - W_k' + W_{prož} - W_{prož}'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

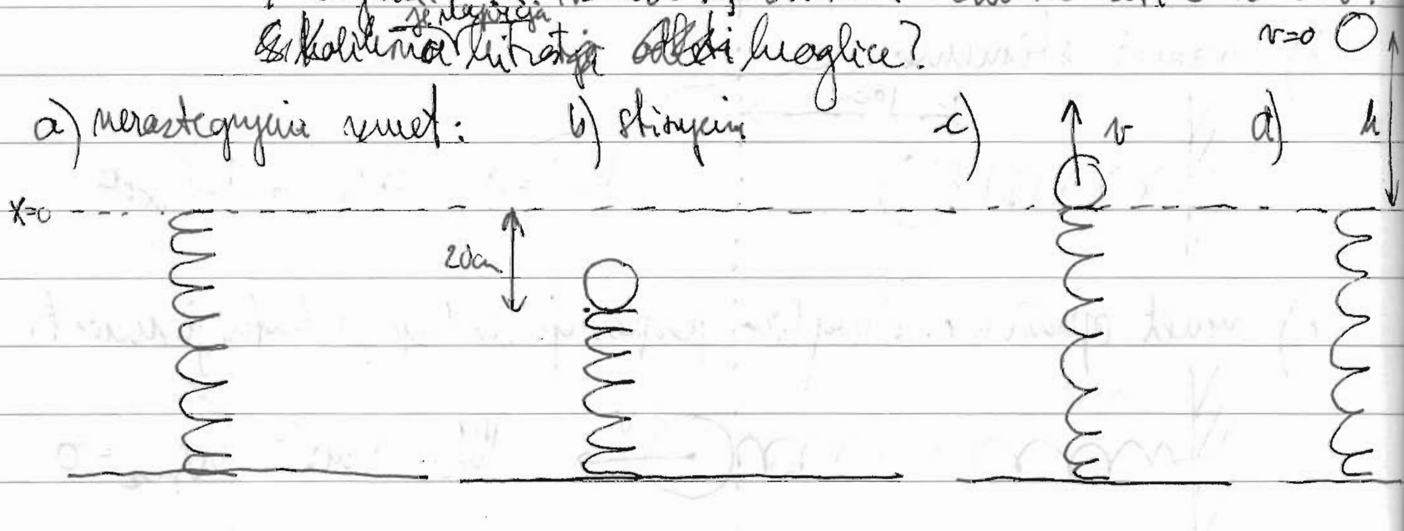
$$v^2 = \frac{k}{m} \cdot x^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x}$$

$$v = \sqrt{\frac{10\,N}{m \cdot 0{,}01\,kg}} \cdot 0{,}1\,m = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^2\,\cancel{kg}\,\cancel{m}/s^2}{\cancel{m} \cdot \cancel{kg}}} \cdot 0{,}1\,m = \sqrt{1000} \cdot 0{,}1\,m/s = \underline{3{,}1\,m/s}$$

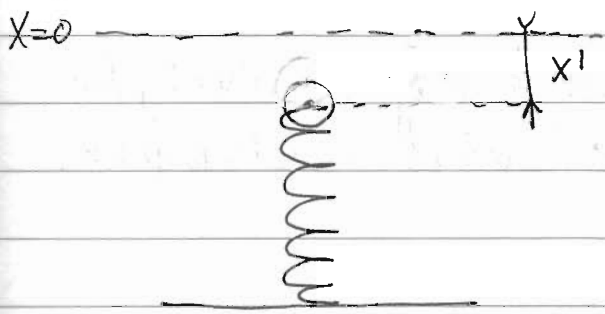
<u>Primer 2:</u> Vijačna vzmet s koeficientom 50 N/m je postavljena v navpični smeri. Vzmet stisnemo za 20 cm in na njen konec postavimo majhno kroglico z maso 20 g. Do kolikšne višine skoči kroglica, ko vzmet sprostimo. Maso vzmeti zanemari! Kolikšna je največja hitrost ~~odleti~~ kroglice?

a) nerastegnjena vzmet: b) stisnjena c) d)



Za začetno stanje si izberemo stisnjeno vzmet:

b)



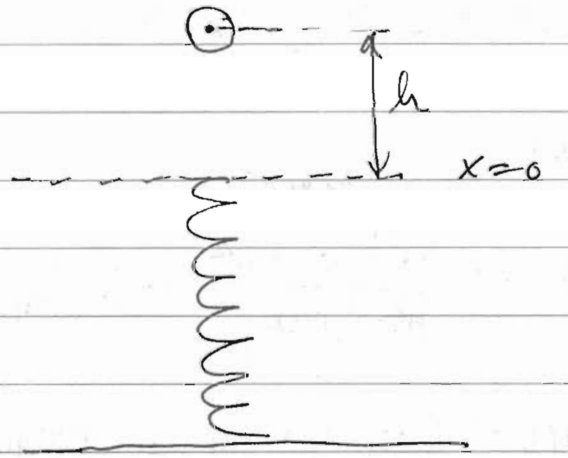
$$W_{prož}' = \frac{1}{2} k \cdot x'^2$$

$$W_p' = m \cdot g \cdot (-x')$$

$W_k' = 0$ (ker miruje)

Na koncu:

d)



$W_{prož} = 0$ ker ni razteg. niti stis.

$W_k = 0$ ker miruje

$W_p = +m \cdot g \cdot h$

Zapišemo izrek o ohranitvi energije

$$A = 0 = W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_{prož} - W_{prož}'$$

$$0 - 0 + mgh - (m \cdot g(-x')) + 0 - \frac{1}{2} k x'^2 = 0$$

$$m \cdot g h + m \cdot g \cdot x' - \frac{1}{2} k x'^2 = 0$$

$$\boxed{h + x' = \frac{1}{2} \frac{k}{m g} \cdot x'^2}$$

$N = \cancel{kg}\, m/s^2$

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{k}{mg}\,x'^2 - x' = \frac{1}{2}\cdot\frac{50\,N \cdot 0{,}2^2\,\cancel{m^2}}{\cancel{m}\cdot 0{,}02\,\cancel{kg}\cdot 9{,}8\,\cancel{m/s^2}} - 0{,}2\,m =$$

$$= \frac{50\cdot 0{,}2^2}{0{,}04\cdot 9{,}8}\,m - 0{,}2\,m = 5{,}1\,m - 0{,}2\,m = \underline{\underline{4{,}9\,m}}$$

Kolikšna je največja hitrost kroglice? Največja je takrat, ko vzmet neha pospeševati kroglice, ko je vzmet neraztegnjena. Energiji so takrat:

$$W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_{prož} - W_{prož}' = 0$$

$$W_k - 0 + m\cdot g\cdot 0 - (m\cdot g\cdot(-x')) + 0 - \frac{1}{2}kx'^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}m\cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2}kx'^2 - m g\, x'$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot x'^2 - 2gx'} = \sqrt{\frac{50\,\overset{kg\,m\,s^{-2}}{N}\cdot 0{,}2^2\,m^2}{\cancel{m}\cdot 0{,}02\,kg} - 2\cdot 9{,}8\,m/s^2\cdot 0{,}2\,m}$$

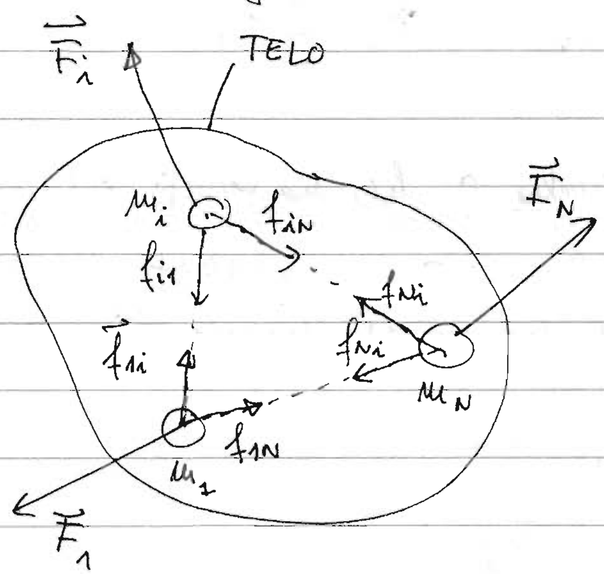
$$= \sqrt{\frac{50\cdot 0{,}2^2}{0{,}02} - 0{,}4\cdot 9{,}8}\cdot m/s = \sqrt{100 - 3{,}92}\,m/s = \underline{\underline{9{,}8\,m/s}}$$

2. MEHANIKA TOGIH TELES

Togo telo je tisto telo, ki je trdno v primerjavi s silami, ki na to telo delujejo.

2.1.1. Težišče togega telesa

Kot primer si mislimo togo telo sestavljeno iz N masnih točk, ki med seboj delujejo s silami, obenem pa na telo delujejo še zunanje sile



f_{1i} ... sila med prvim in i-tim ~~telesom~~ točko v telesu

f_{1N} ... sila med prvo in N-to točko v telesu

$\vec{F}_i$ ... zunanja sila na i-to masno točko

Zapišem gibalno količino N delcev, ki tvorijo telo:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} \vec{G}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i$$

m_i ... masa i-te točke
$\vec{v}_i$ ... hitrost i-te točke

Izračunam še spremembo gibalne količine:

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

to je torej celotna gibalna količina

Poglejmo sedaj podrobneje, ali notranje sile lahko prispevajo k spremembi gibalne količine

Gibalna količina i-te točke : $\vec{G}_i = m_i \vec{v}_i$

$$\frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{ki}}_{\text{notranje sile}} + \vec{F}_i$$

Taje posledica o gibalni količini

zunanje sile na i-to točko

Sedaj to seštejem za vse točke

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{ki} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

ta vsota je enaka 0, ker nastopajo sile v parih

napr. $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, zato se vse uniči.

Notranje sile ne morejo prispevati k spremembi gibalne količine

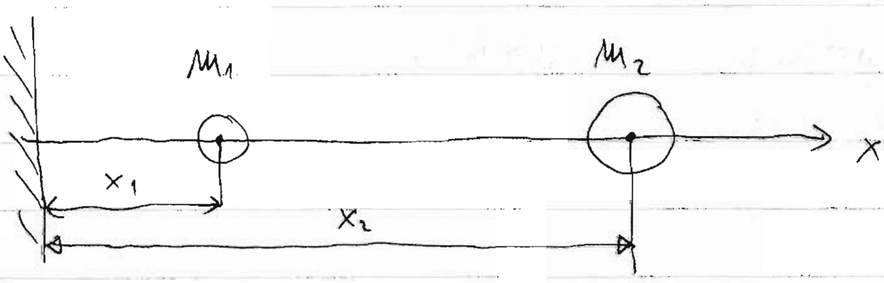
$$\boxed{\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{G}_i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$

Vidimo, da je s stališča gibalne količine gibanje togega telesa podobno gibanju točkastega telesa.

To poskusimo izraziti tako, da definiramo težišče, t.j. masno središče telesa:

2.1.1. Težišče togega telesa

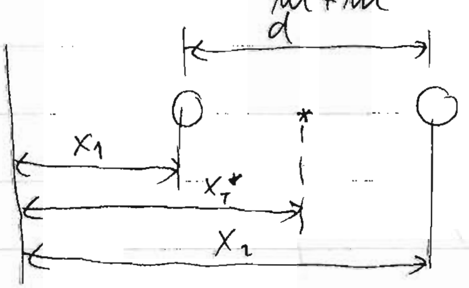
Vzemimo primer dveh teles z maso m_1 in m_2, ki sta postavljeni v razdalji x_1 in x_2 od izhodišča.
Definiram težišče dveh teles:



$$\boxed{x_T^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$

Poglejmo, kje je težišče dveh enakih teles, ki sta v razdalji d; $m_1 = m_2 = m$

$$x_T^* = \frac{m x_1 + m(x_1 + d)}{m + m} = \frac{2 m x_1 + m d}{2m} = x_1 + \frac{d}{2}$$



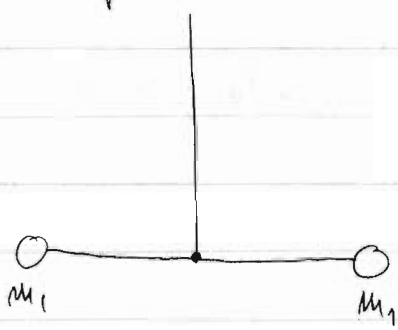
težišče je na 1/2 zveznice obeh mas, ki sta enaki.

Kaj pa, če sta masi različni? Vzemimo $m_2 = 2m_1$:

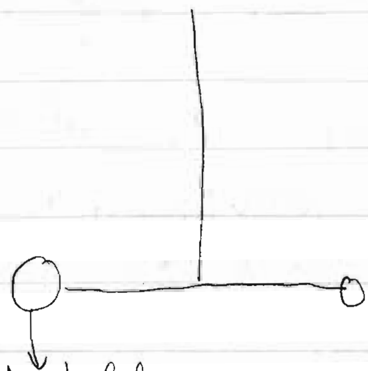
$$x_T^* = \frac{m_1 x_1 + 2m_1(x_1 + d)}{m_1 + 2m_1} = \frac{m_1 x_1 + 2m_1 x_1 + 2m_1 d}{3m_1} = x_1 + \frac{2}{3} d$$

Težišče se je premaknilo k težji masi m_2!

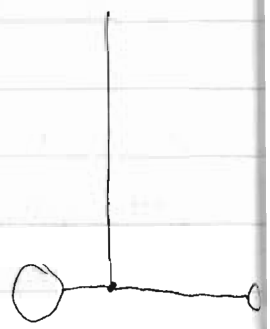
Pokaži poskus:



Če sta masi enaki, potem se zadeva ne vrti, če je vrvica pripeta na sredini, torej v težišču

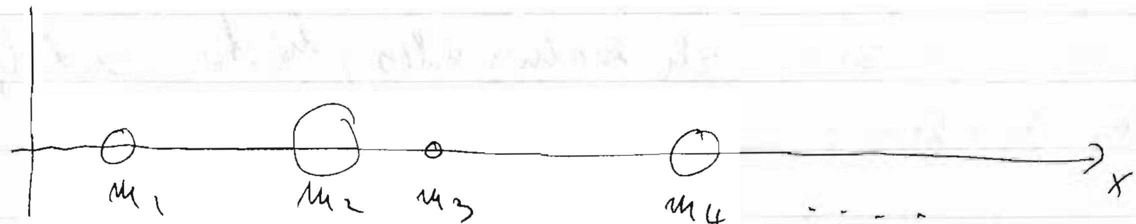


Nestabilno



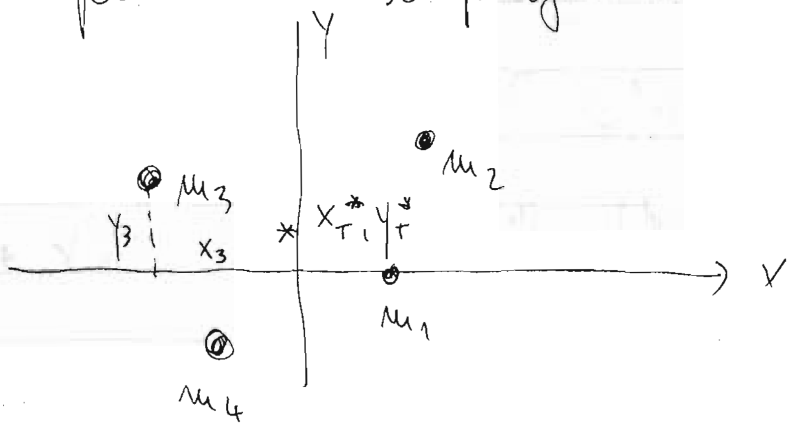
Če je pripeto v težišču, se ne vrti

Definicijo težišča posplošimo na N mas, ki so porazdeljene po osi x:



$$\boxed{x_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Mase pa so lahko razporejene v x-y ravnino:



Težišče v dveh dimenzijah je določeno z vektorjem

$$\vec{r}_T^* = (x_T^*, y_T^*) \qquad x_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

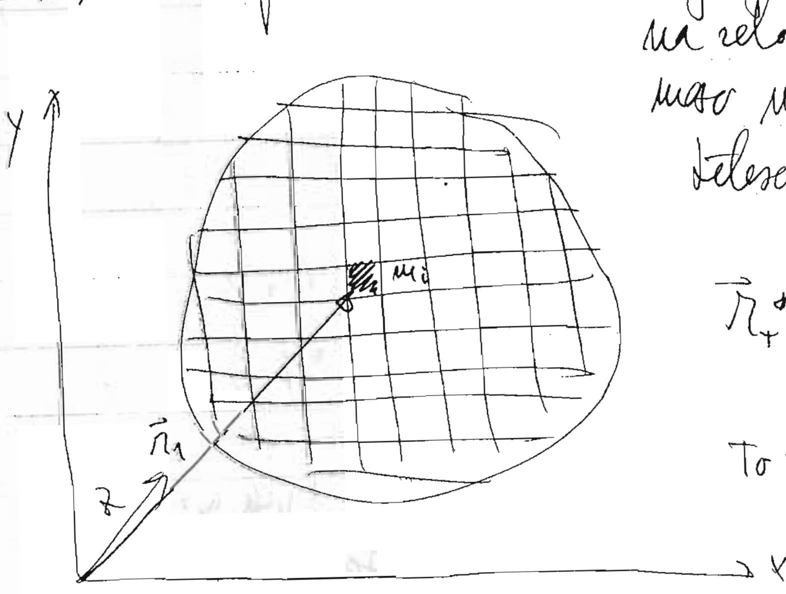
$$y_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

V treh dimenzijah pa dobimo še z-komponento težišča

$$\vec{r}_T^* = (x_T^*, y_T^*, z_T^*) \qquad z_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ali krajše: $\boxed{\vec{r}_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$ definicija težišča

Tako v bistvu poiščemo težišče togega telesa. Telo razdelimo na zelo drobne dele z maso m_i. Težišče togega telesa je potem



$$\vec{r}_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i}$$

To preide v integral

$$\vec{r}_T^* = \frac{\int dV \, \vec{r}_i \rho(\vec{r})}{M}$$

Težišče je pomembno pri gibanju togih teles. Gibanje togega telesa namreč lahko razstavimo na vsoto gibanja težišča (translatorno gib) in vrtenja okoli težišča.

2.1.2. Izrek o gibanju težišča togega telesa:

Izhajam iz definicije težišča; vzamem samo

$$\vec{r}_T^* = (x_T^*, y_T^*, z_T^*) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

skupna masa telesa

Sprememba $$\frac{\Delta \vec{r}_T^*}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}}{M}$$ če so vse mase po velikosti konstantne.

To pa je hitrost težišča:

$$\vec{v}_T^* = \frac{\Delta \vec{r}_T^*}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1} m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$

Pogledam spremembo hitrosti v časovni enoti:

$$\frac{\Delta \vec{v}_T^*}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}}{M}$$

To pa je pospešek težišča $$\vec{a}_T^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M} \qquad / \cdot M$$

$$M \cdot \vec{a}_T^* = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \vec{a}_i}_{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{ZUN}$$

$\vec{F}_i$ sila na i-to telo

Dobimo zakon o gibanju težišča $\boxed{M \cdot \vec{a}_T^* = \vec{F}_{ZUN}}$

Togo telo se giblje tako, kot da bi bila vsa njegova masa zbrana v težišču telesa.

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = m_t \cdot \frac{\Delta v^*}{\Delta t}$$

uvedemo pojem hitrosti težišča v^*

m_t .... skupna masa telesa

Torej

$$m_t \cdot \frac{\Delta v^*}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \vec{v}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \frac{\Delta \vec{r}^*}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}$$

$\vec{r}_i$ ... koordinata i-te točke

$$\Downarrow$$

$$m_t \cdot \vec{r}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\boxed{\vec{r}^* = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}$$

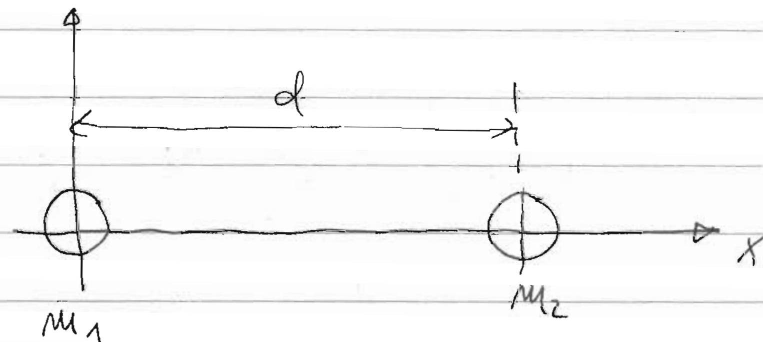
Tako se izračuna težišče telesa

To je seveda treba računati po koordinatah!

Primer izračuna težišča: dve telesi z masama po 7 kg in 4 kg sta med seboj povezani z zelo lahko prečko v razmiku 1,5 m. V kateri točki je težišče?

$m_1 = 7\,kg$
$m_2 = 4\,kg$
$d = 1,5\,m$

$x^* = ?$



$$x^* = \frac{1}{m_t} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^* \quad \text{to pride iz} \quad \vec{r}^* = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^*$$

$m_t = \sum_i m_i$ masa telesa

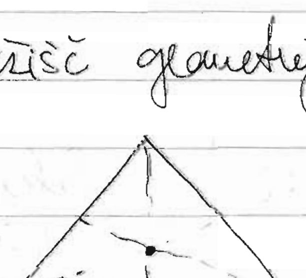
$$x^* = \frac{1}{m_1+m_2} \cdot \sum_{i=1}^{2} m_i \cdot x_i = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot d\right) = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot d =$$

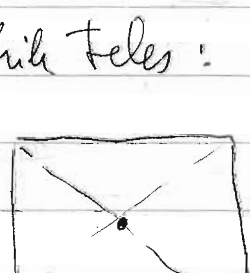
$$= \frac{4}{11} \cdot 1,5\,m = \underline{\underline{0,54\,m}}$$

Težišče telesa je v razdalji 0,54 m od težjega telesa

Primeri težišč geometrijskih teles:

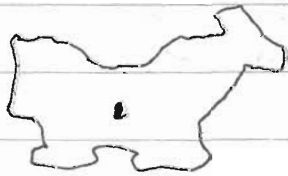
trikotnik:





pravokotnik

Slovenija



2.1.2. Izrek o gibanju težišča togega telesa

Ugotovili smo, da je za sistem z N točkami gibalna količina

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}^*$$

m_i .... masa i-te točke
$\vec{v}_i$ .... hitrost i-te točke

Prav tako smo ugotovili, da se sistem masnih točk pod vplivom zunanjih sil giblje tako, kot da bi bilo to točkasto telo, postavljeno v težišče sistema:

$$\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i = m_t \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t}$$

m_t .... masa telesa (vsota vseh mas v sistem telesa)
$\vec{v}^*$ .... hitrost težišča

<u>To pa je že izrek o gibanju težišča:</u>
težišče telesa se pod vplivom zunanjih sil giblje kot točkasto telo, v katerem bi bila zbrana vsa masa telesa in na katerega deluje vsota vseh zunanjih sil. To pomeni, da se težišče telesa giblje s pospeškom, ki je sorazmeren z vsoto ~~F~~ vseh zunanjih sil!

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{G} = m_t \cdot \Delta \vec{v}^* \rightarrow \boxed{\vec{F} = m_t \cdot \frac{\Delta \vec{v}^*}{\Delta t} = m_t \cdot \vec{a}^*}$$

2. Newtonov zakon torej velja tudi za gibanje težišče togega telesa.

Posledice izreka o gibanju težišča togega telesa:

1. Izrek o gibalni količini togega telesa: sunek zunanjih sil je enak spremembi gibalne količine težišča togega telesa:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}^*$$

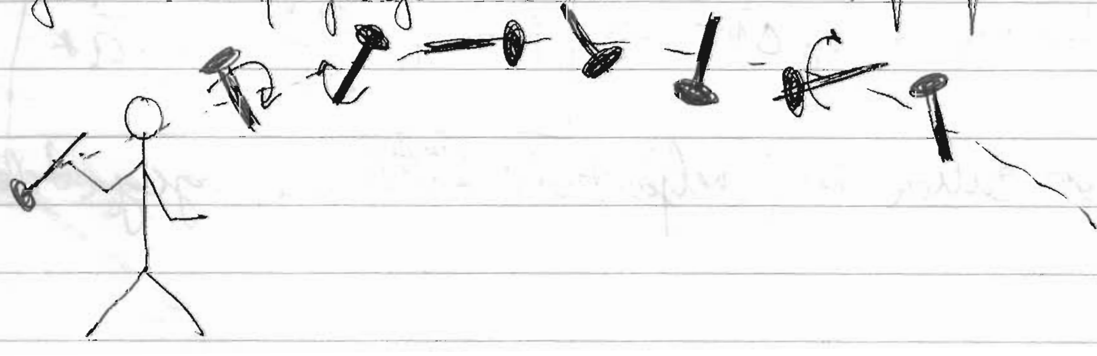
2. Izrek o potencialni energiji togega telesa:
Delo zunanjih sil razen sile teže je enako spremembi kinetične ~~in potencialne~~ energije telesa in potencialne energije težišča togega telesa

$$A_{ostalesile} = W_k - W_k' + W_p - W_p'$$

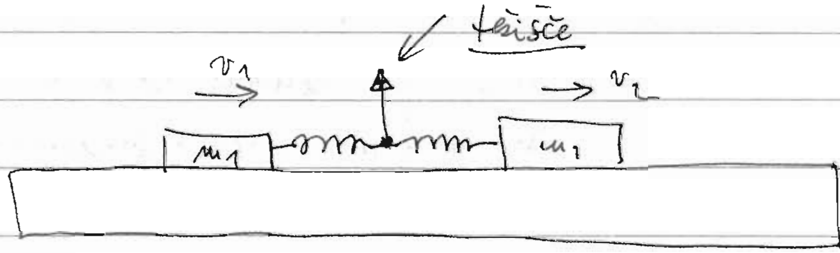
Potencialna energija togega telesa: $W_p = m \cdot g \cdot h^*$

h^* .... višina težišča tel

Primer 1: met toge palice s kroglo na eni strani. Palico vržem tako, da se vrti v zraku. Obenem se vidi, da se težišče, ki je označeno, giblje kot točkasto telo → po paraboli:

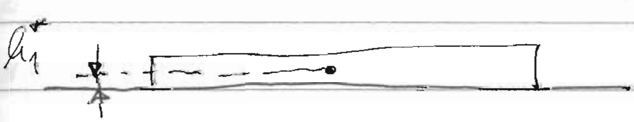


Primer 2: Dva vozička na zračni klopi sta opeta z dvema vzmetema. Med njima je kazalec, ki kaže gibanje skupnega težišča. En voziček sunem, da se oba premakneta. Vozička med seboj nihata, vidi pa se da težišče potuje z enakomerno hitrostjo.

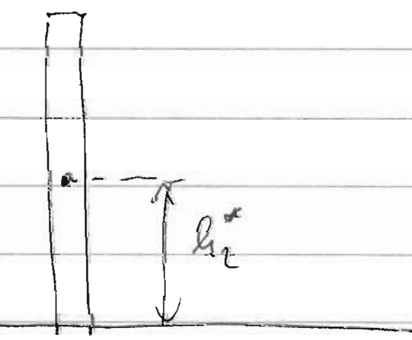


Primer 3: Kolikšno delo opravimo, če enakomerno debel drog s premerom 20 cm, maso 200 kg in dolžino 8 m postavimo iz vodoravne v navpično lego?

Na začetku:



Na koncu:



$$A = W_p - W_p' = m \cdot g \cdot (h_2^* - h_1^*) = 200\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2\,(4\,m - 0.1\,m) =$$

$$= \underline{\underline{7644\,J}}$$

2.2. Vrtenje togega telesa

2.2.1. Enakomerno pospešeno kroženje t.t.

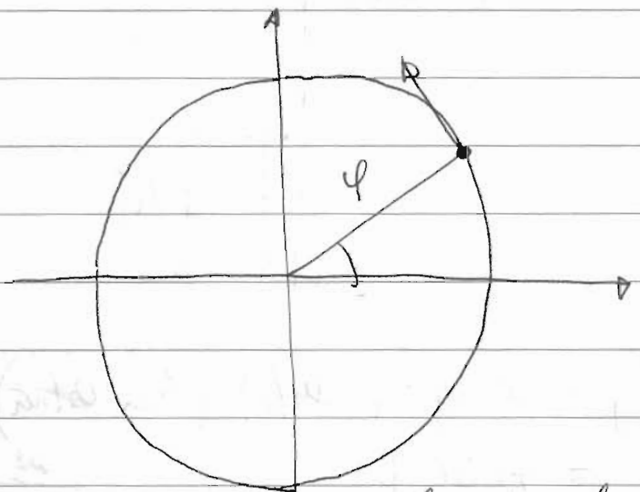
Imejmo točkasto telo z maso m, ki kroži v stalni razdalji r od središča kroženja. Kroženje je enakomerno pospešeno, če se kotna hitrost ω ~~pre~~ povečuje premo sorazmerno s časom:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \omega' + \alpha \cdot t \\ \alpha &= \frac{\omega - \omega'}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \end{aligned}}$$

ω'.... začetna kotna hitrost

α.... kotni pospešek

$[1/s^2]$ enota za kotni pospešek

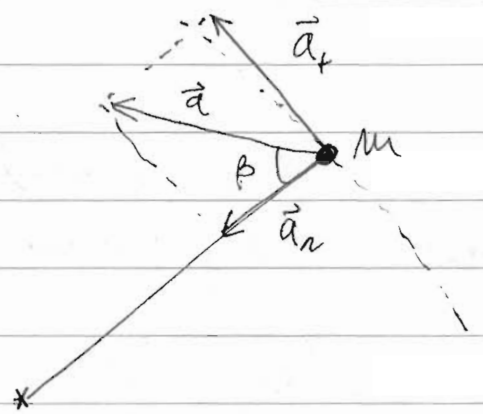


Kaj se dogaja s obodno hitrostjo pri enakomerno pospešenem kroženju?

$$\boxed{v = \omega \cdot r = \omega' \cdot r + \alpha \cdot r \cdot t = v' + a_t \cdot t} \qquad \boxed{a_t = \alpha \cdot r}$$

tangentni pospešek

Pri enakomerno pospešenem kroženju t.t. imamo torej dva pospeška: radialni in tangentni, ki sta oba vektorja in se zato sestavita v skupni vektor pospeška:



Velja: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

Velikost celotnega pospeška:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_r|^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2 r^2 + (r\omega^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2\omega^4}$$

Primer: točkasto telo z maso 0,5 kg kroži po krožnici z radijem 1m z enakomerno kotno hitrostjo, tako da opravi en obhod v 2s. V nekem trenutku začne enakomerno pospeševati s pospeškom $3/s^2$. Izračunaj velikost in smer ~~pospe~~ celotnega pospeška ob v trenutku začetka pospeševanja!

$m = 0,5\,kg$

$r = 1m$

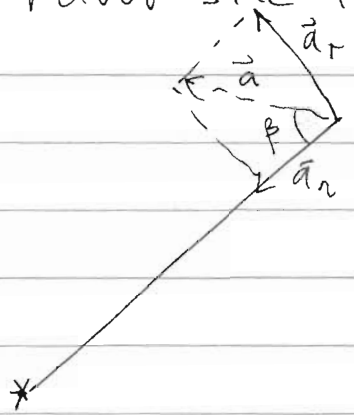
$t_0 = 2s \Rightarrow$ opravi kot $2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 3,14/s$

$\alpha = 3/s^2$ $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2 r^2 + r^2\omega_0^4} = 10,3\,m/s^2$

$|\vec{a}| = ?$

$\sphericalangle\beta = ?$

2.2.2. Navor sile in vztrajnostni moment

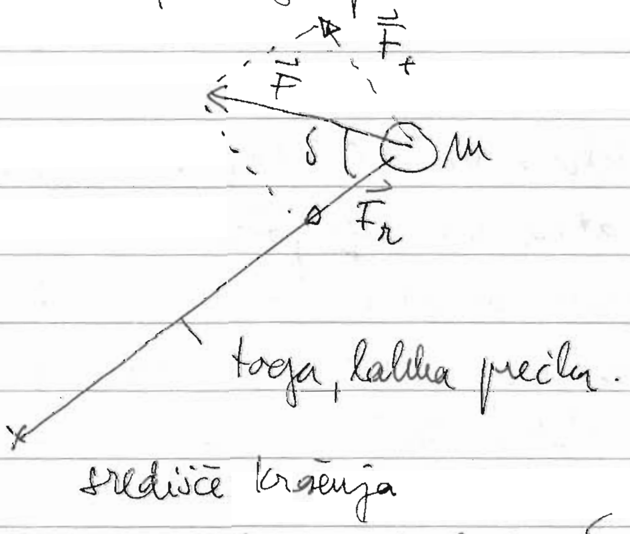


$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a_r}{a_t} = \frac{r\cdot\omega^2}{r\cdot\alpha} = \frac{\omega^2}{\alpha} = 3{,}28$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\ 3{,}28 = \underline{73^\circ}$$

Sedaj smo spoznali opis gibanja, nismo pa povedali zakaj točkasto telo kroži enakomerno pospešeno.

Vzemimo zopet telo z maso m, ki kroži v stalni razdalji r, ki je ni mogoče spremenjati (togo). Na telo naj deluje zunanja sila $\vec F$, kot je prikazano na spodnji sliki:



Zunanja sila naj deluje pod kotom δ glede na zveznico s središčem kroženja. To silo razstavim na radialno in tangentno komponento:

$$\vec F = \vec F_t + \vec F_r$$

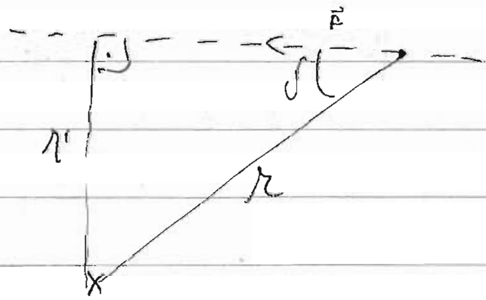
Radialna sila $\vec{F}_r$, ki ima smer proti središču kroženja nima vpliva na hitrost gibanja telesa, saj se razdalja ne more spremeniti. Kaj pa tangentna komponenta $\vec{F}_t$? Ta komponenta sile povzroči tangentno komponento hitrosti.

$$F_t = F\cdot\sin\delta = m\cdot a_t = m\cdot\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = m\cdot r\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = m\cdot r\cdot\alpha$$

$$F\cdot\sin\delta = m\cdot r\cdot\alpha \qquad /\cdot r$$

$$F\cdot r\cdot\sin\delta = m\cdot r^2\cdot\alpha$$

Poglejmo, kaj pomeni $r\cdot\sin\delta$



$\sin\delta = \frac{r'}{r} \Rightarrow$

$r' = r\cdot\sin\delta$

$r' = r\cdot\sin\delta$ imenujemo ročica sile. To je oddaljenost premice, na kateri deluje sila $\vec{F}$, od središča kroženja.
Enačbo sedaj zapišemo

$$F\cdot r' = m\cdot r^2\cdot\alpha$$

Definiramo: navor sile glede na dano os

$$\boxed{M = F\cdot r'}$$

Navor je produkt sile in njene ročice glede na to os

Definiramo: vztrajnostni moment točkastega telesa

$$\boxed{J = m \cdot r^2}$$

Vztrajnostni moment točkastega telesa je enak produktu mase telesa in kvadrata radija kroženja (razdalje od osi).

~~Vo~~ Enakomerno pospešeno kroženje pod vplivom stalnega ~~navora~~ sile torej zapišemo z navorom sile, vztrajnostnim momentom in kotnim pospeškom:

$$\boxed{M = J \cdot \alpha}$$

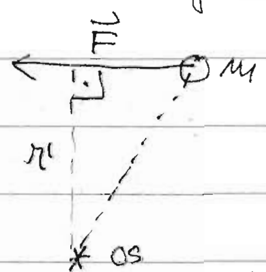
Navor zaradi sile je enak produktu vztrajnostnega momenta in kotnega pospeška. Izraz velja splošno, ne samo za točkasto telo. Za druga telesa je potrebno vztrajnostne momente izračunati.

Če je navor konstanten, se telo začne vrteti enakomerno pospešeno

Za točkasto telo smo izpeljali zvezo med navorom zunanje sile in kotnim pospeškom

$$M = J \cdot \alpha$$

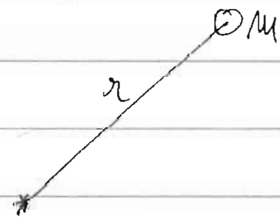
Pri tem je M navor zunanje sile:



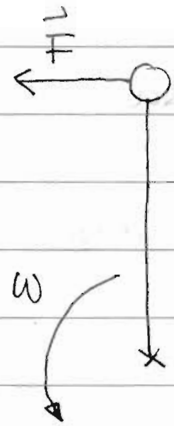
$$M = F \cdot r'$$

J pa je vztrajnostni moment točkastega telesa

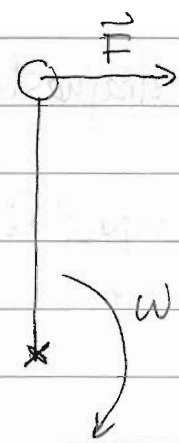
$$J = m \cdot r^2$$



Pod vplivom stalnega navora se točkasto telo torej vrti okoli stalne osi enakomerno pospešeno. Pomembno je še to, da navor suče telo lahko v smeri urinega kazalca ali pa v nasprotni smeri. Ločiti moramo torej smer sukanja navora, tako da se dogovorimo, katera smer je pozitivna in katera negativna.



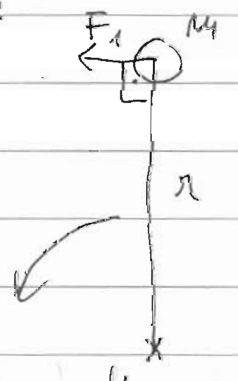
nasprotno smeri urinega kazalca



smer urinega kazalca

Pomembno je to, da se navori seštevajo. Če imam naprimer 2 sili ki vrtita telo, se njuna navora seštejeta. Pri seštevanju upošte- smer navora, tako da enega štejem pozitivno, drugega negati-

Dogovor:



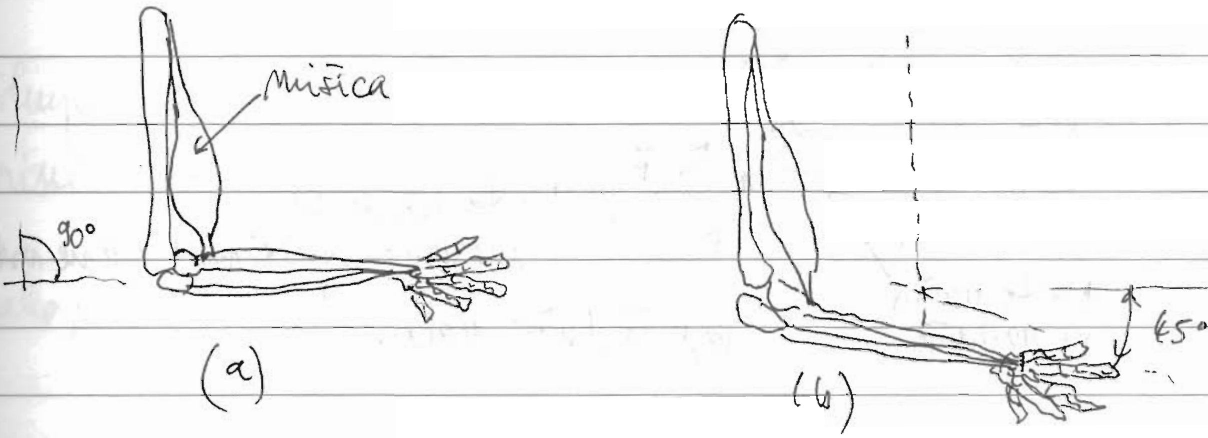
negativen navor

$M = +F_1 \cdot r$

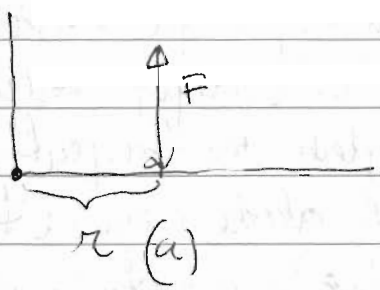
pozitiven navor

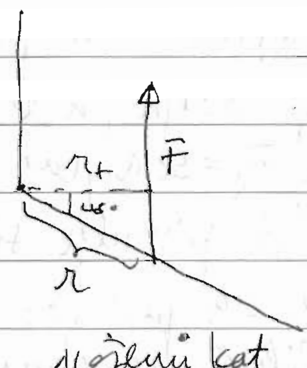
$M = +F_2 \cdot r$

Primer 1: Izračunaj navor na mišico ~~na~~ človeške roke, ki pritska s silo 700N, njeno prijemališče pa je 5cm od sklepa. V prvem primeru je ročica sile pravokotna, v drugem primeru pa pod kotom 45°, kot je prikazano na sliki.



Poglejmo kako bi to narisali drugače





$$\cos 45° = \frac{r_\perp}{r}$$

$$r_\perp = r \cdot \cos 45°$$

(b)

$r = 0{,}05\,m$
$F = 700\,N$

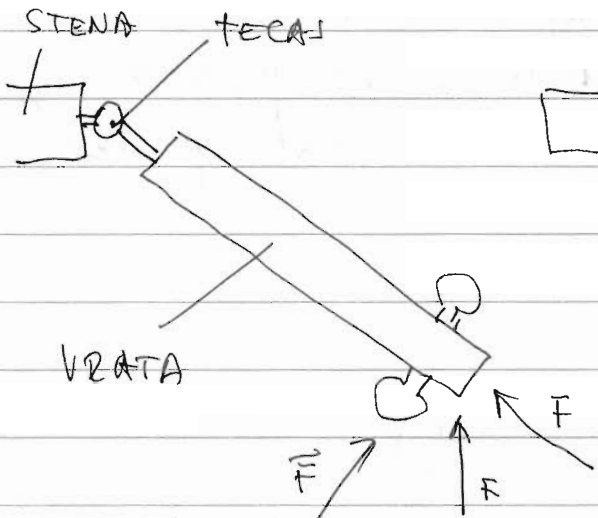
$M_a, M_b = ?$

a) $M = r_\perp F = 700N \cdot 0{,}05m = 35\,N \cdot m$

b) $M = r_\perp \cdot F = r \cdot F \cdot \cos 45° =$
$= 35\,Nm \cdot \cos 45° = 24{,}7\,Nm$

V primeru (b) je torej navor manjši!

Pojem navora lahko nazorno vidimo na vratih: če poskušamo vrata zapreti s silo, ji vemo, kako je sila usmerjena



Primer 2: Dva tanka valja sta med seboj pritrjena tako, da njuni geometrijski osi sovpadata. Premer prvega valja je 60 cm, premer drugega valja pa 100 cm. Na obodu večjega valja prijemlje sila $F_1 = 50\,N$ pod kotom 30° glede na tangento. Na obodu manjšega valja prijemlje sila $F_2 = 50\,N$ v smeri tangente in sicer tako, da poskuša vrtiti valja v obratni smeri kot sila F_1. Kolikšen je skupni navor obeh sil in v katero smer se valja vrtita?

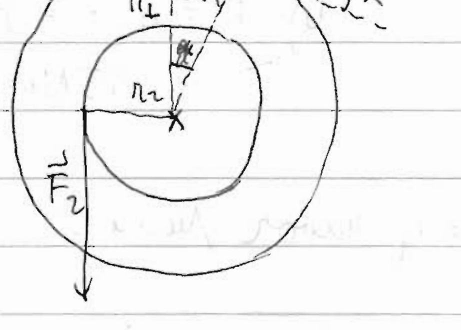
$2r_1 = 100\,cm$

$2r_2 = 60\,cm$

$F_1 = F_2 = 50\,N$

$\alpha = 30°$

$M = ?$



Navor sile F_1: $M_1 = F_1 \cdot r_{1\perp} = F_1 \cdot r_1 \cdot \sin 60°$

$M_2 = -F_2 \cdot r_2$

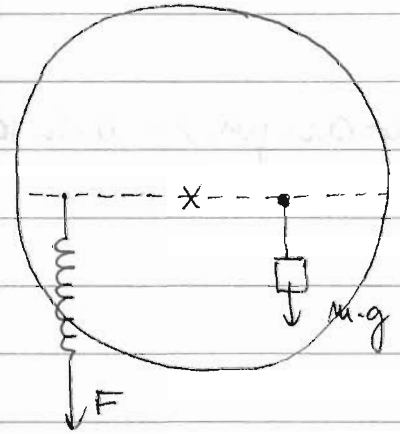
$$M = M_1 + M_2 = F_1 r_1 \sin\alpha - F_2 r_2 = 50N \cdot 0{,}5m \cdot \sin 60° - 50N \cdot 0{,}3m$$

$$= 21{,}6\,Nm - 15\,Nm = +6{,}6\,Nm$$

Skupen navor je pozitiven, valj se ~~kača~~ vrtita v smeri urinega kazalca.

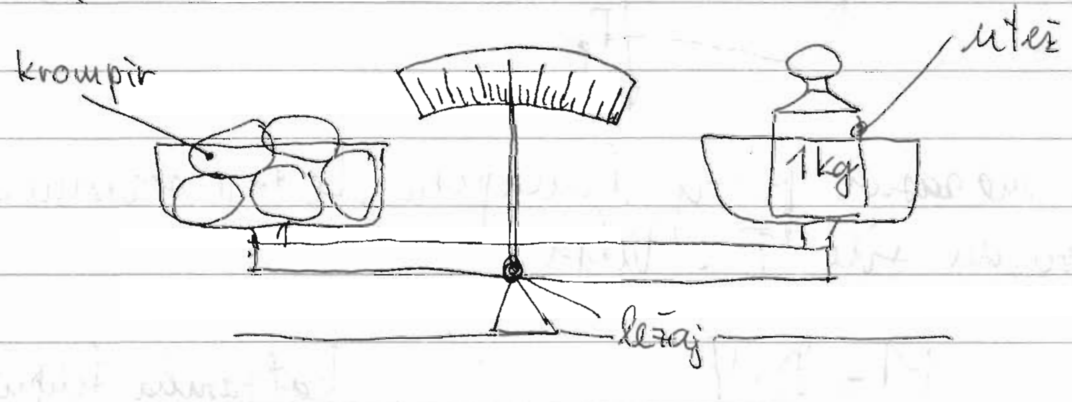
Kako merimo navore?

(a)

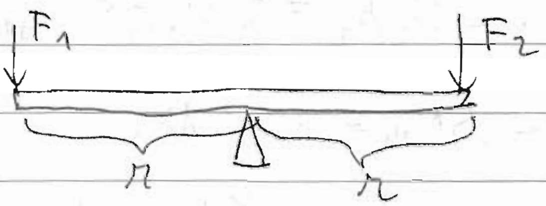


Imamo ravnovesje navorov: navor mase uravnovesimo z vzmetno tehtnico, ki prijemlje v znani razdalji

(b) Navadna tehtnica



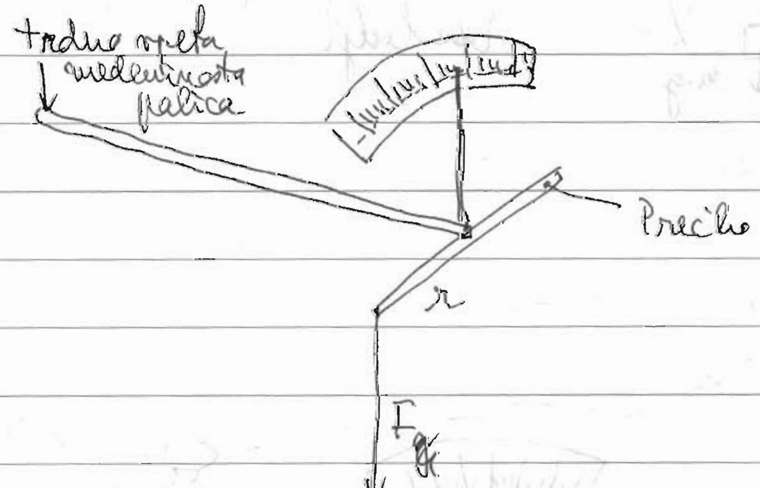
Tukaj nanonesimo dva navora zunanjih sil: sila teže uteži in sila teže neznane mase



Skupni navor $-F_1 \cdot r_1 + F_2 r = 0 \quad r(F_2 - F_1) = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

Tehtnica je uravnovešena, ko sta oba navora po velikosti enaka, po predznaku pa različna.

(c) torzijska tehtnica: zvijamo nitko ali pa kovinski drog



Merimo zasuk potega konca palice. Le-ta je sorazmeren z navorom sile F. Velja

$$M = D \cdot \varphi$$

φ.... kot zasuka tehtnice

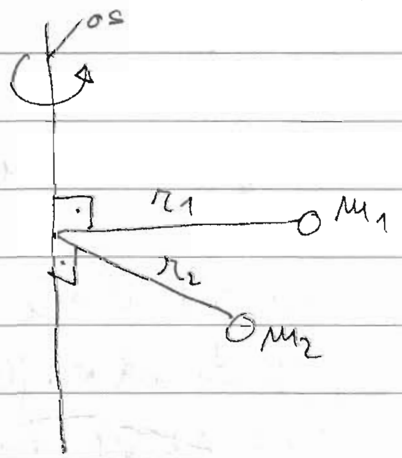
D..... torzijski koeficient žice ali palice

Poglejmo si sedaj, kako izračunamo vztrajnostne momente togih teles:

Pomembno: vztrajnostni moment togega telesa vedno navajamo (izračunamo) za določeno os. Če se os spremeni, se tem ustrezno spremeni vztrajnostni moment telesa.

Vztrajnostni moment togega telesa izračunamo tako, da telo razdelimo na zelo drobne delce, ki jih lahko vzamem za točkasto telo, potem pa seštejem vztrajnostne momente vseh delčkov. To si bomo ogledali na primeru.

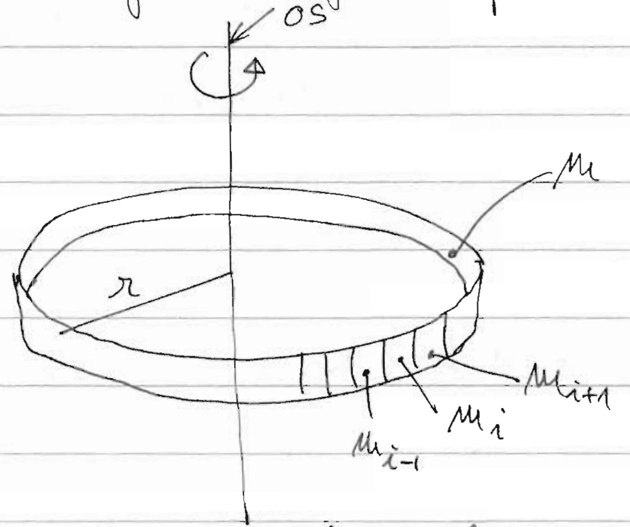
Primer 1: vztrajnostni moment dveh točkastih teles z masama m_1 in m_2 v razdaljah od osi r_1 in r_2



$$J = J_1 + J_2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Pazi: vztrajnostni moment je tem večji, čim večja je razdalja mase od osi

Primer 2: Izračunaj vztrajnostni moment zelo tankega obroča z maso m in premerom r glede na geometrijsko os obroča!



Obroč razdelimo na zelo majhne dele z maso m_i. Oddaljenost od osi obroča je za vse te delce enaka r. Skupni vztrajnostni moment je torej:

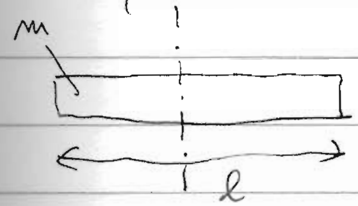
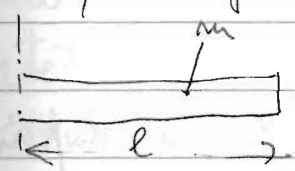
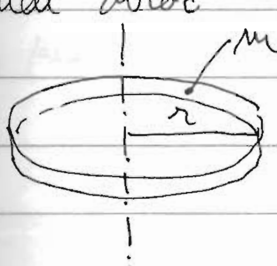
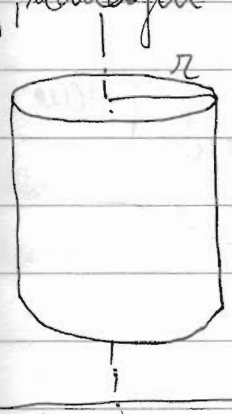
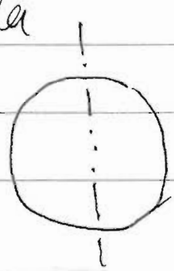
$$J = m_1 r^2 + m_2 r^2 + \dots + m_i r^2 + \dots + m_N r^2 =$$

$$= r^2 (m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_N) = r^2 \cdot m$$

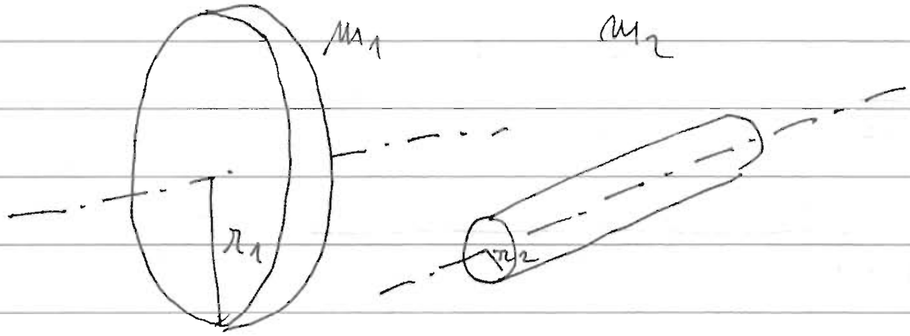
$$\boxed{J = m \cdot r^2}$$

To je vztrajnostni moment obroča z maso m in radijem r, glede na ~~os~~ geometrijsko os. Zanimivo, da je vztrajnostni moment enak vztrajnostnemu momentu točkastega telesa!

Primeri vztrajnostnih momentov različnih geom. teles

Telo	J
Palica, os v središču 	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
Palica, os v krajišču 	$J = \frac{1}{3} m l^2$
Tanek obroč 	$J = m \cdot r^2$
Valj, homogen 	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
Krogla 	$J = \frac{2}{5} m r^2$

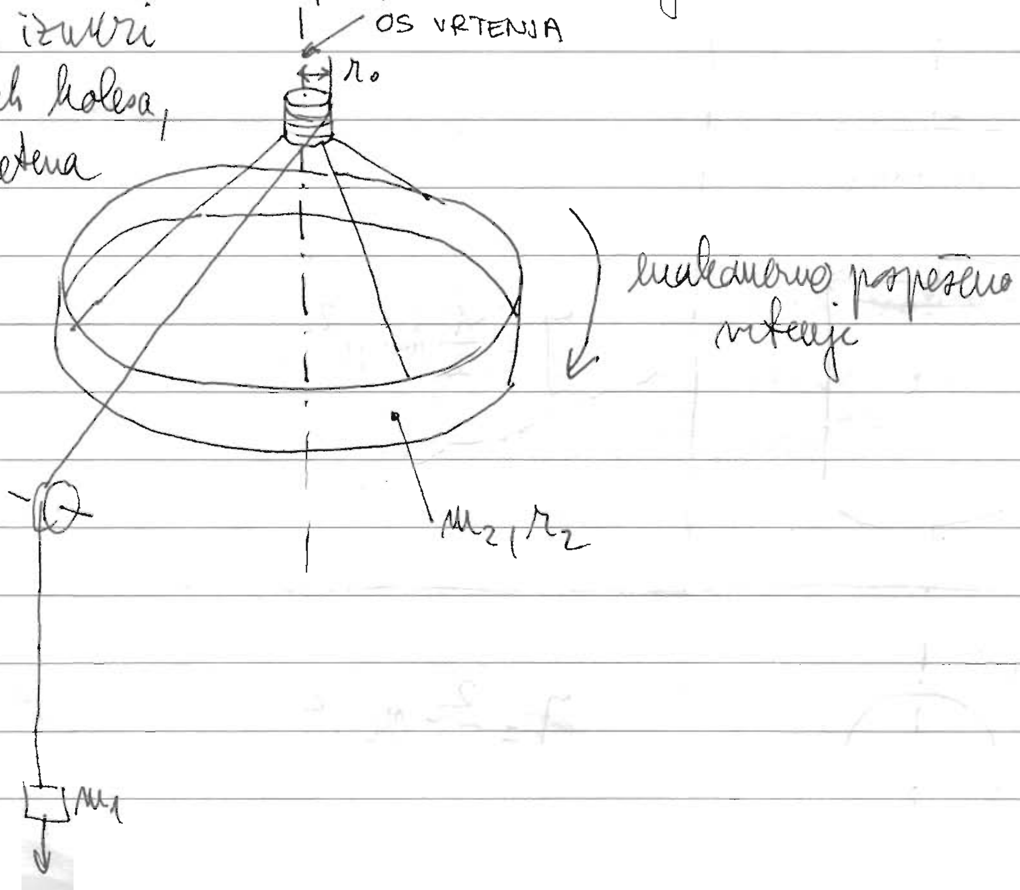
Pomembno je tole: če vzamemo dva valja, ki sta enako težka, pa različnih premerov, potem ima večji valj večji vztrajnostni moment kot pa manjši



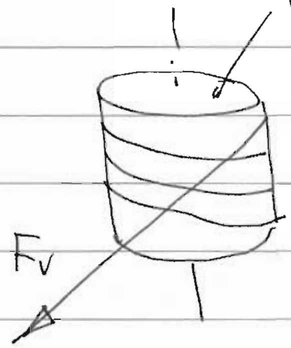
Kljub temu da je $m_1 = m_2$, je $J_1 > J_2$. Zato, ker je pri večjem valju masa razporejena na večjih razdaljah od osi, kot pri manjšem valju! To je pomembno

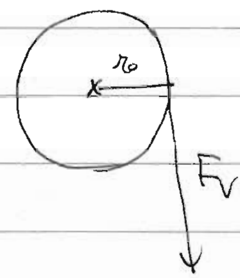
Primer 3: Enakomerno pospešeno vrtenje kolesa

Izračunaj mi izraz za kotni pospešek kolesa, ki je prek vretena in škripca povezano z utežjo.



Preko vrvice deluje sila teže mase m_1. Ta sila vrvice povzroči navor na vreteno.





$M_v = F_v \cdot r_0$

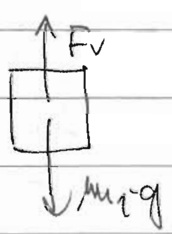
To je navor sile vrvice

Preko tega navora na vreteno se začne enakomerno pospešeno vrteti celoten veliki obroč. Poglejmo ali lahko izračunamo kotni pospešek?

Pogledam gibanje posameznih delov tega sistema

a) masa uteži m_1:

2. Newtonov zakon



$m_1 \cdot g - F_v = m_1 \cdot a$

$\hookrightarrow F_v = m_1 (g - a)$

b) Na kolo deluje preko vretena navor $M = F_v \cdot r_0$. Ta navor povzroči enakomerno pospešeno vrtenje kolesa

$M = J \cdot \alpha$

$F_v \cdot r_0 = J \cdot \alpha$

J .... vztrajnostni moment vrtečega kolesa

α ... kotni pospešek

Iz tega izračunam

$$F_v \cdot r_0 = m_1(g-a)r_0 = J \cdot \alpha$$

Velja še $a_t = \alpha \cdot r_0 = a$

$$m_1(g-a)r_0 = m_1 g r_0 - m_1 \cdot \alpha r_0^2 = J \cdot \alpha$$

$$m_1 \cdot g \cdot r_0 = J \cdot \alpha + m_1 r_0^2 \cdot \alpha = \alpha\left(J + m_1 r_0^2\right)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_1 g \cdot r_0}{J + m_1 r_0^2}}$$

To izračunam $J = m_{\pi} \pi R^2$ in dobim $\alpha =$ ___

Kako pa to izmerim? Spočetka kolo miruje, torej $\omega = 0$, nato pa začne ω naraščati s časom

$\alpha = \frac{\omega}{t}$ če merim t in ω ob tem času lahko izračunam kotni pospešek.

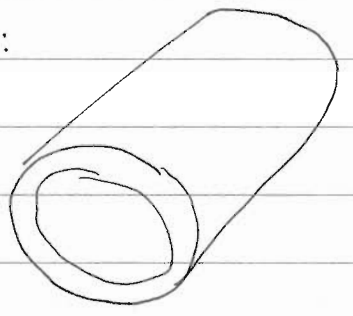
t merim takole: štopam, koliko časa uteč pospenuje kolo. To tem času ko kotna hitrost kolesa konstantna, zato jo lahko izmerim posebej, tako da štopam čas za en ali več obhodov

$\alpha = \frac{\omega}{t_0}$ t_0 dobočim

$\omega = \frac{2\pi}{t_1}$ $2\pi \rightarrow$ kot pri enem obhodu, $t_1 \rightarrow$ čas za 1 obhod

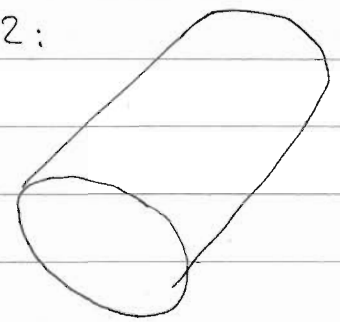
Primer 4: Dva ~~mala težka~~ valja z ~~malima premerama~~ postavimo na klanec. Eden od valjev je iz homogenega materiala, drugi pa je na sredini ~~prevrtan~~ votel. Valja spustimo. Kateri valj se bo gibal hitreje?

Valj 1:



votel

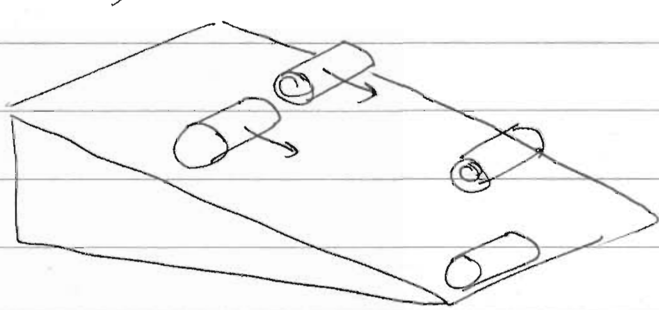
Valj 2:



poln

Oba valja imata enaki masi (poln je iz plastike, votli pa iz kovine).

~~Ker~~



Votli valj zaostaja. Zakaj?

Poglejmo za kotalno gibanje gre:

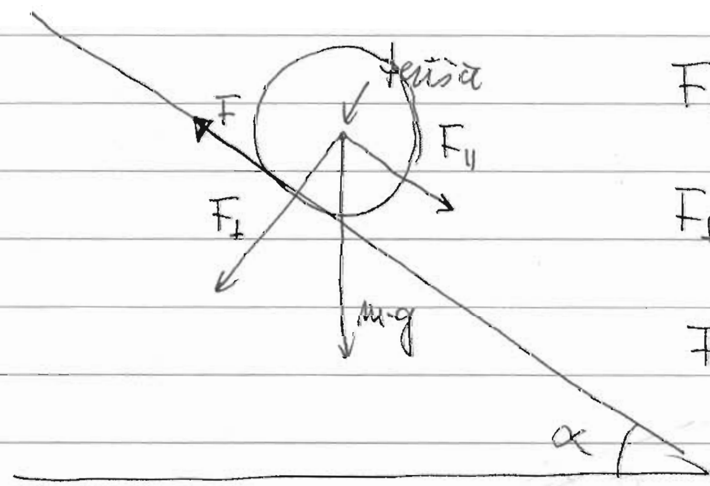
1. V obeh primerih je sila, ki gibanje vsiljuje enaka, to je vzporedna komponenta sile teže na klanec.
2. ~~Pa~~ Masi valjev sta enaki → torej ~~je~~ bi moral biti pospešek težišča enak → to je res, če valja zdrsujeta, se ne vrtita.
3. Kaj je različno, sta vztrajnostna momenta: votli valj

ima praktično vso maso zbrano na plašču, zato ima veliko večji vztrajnostni moment od polnega valja + enako maso in radijem.

Gre za dvoje vrst gibanj:

- gibanje težišča
- vrtenje valja okoli težiščne osi

Poglejmo si sedaj obe vrsti gibanj posebej:



$F_\parallel$ ... paralelna komponenta sile teže

$F_\perp$ ... pravokotna komp. sile teže

F ... sila, s katero podlaga vrti valj

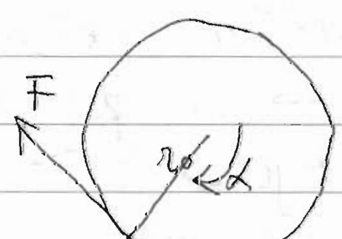
Valj se kotali, zato je $F < F_{tr}$!

a) gibanje težišča valja: $F_\parallel - F = m\cdot a^*$

$$m\cdot g\cdot \sin\alpha - F = m\cdot a^*$$

a^* ... pospešek težišča valja

b) Vrtenje okoli težiščne osi:



α ... kotni pospešek

$M = J\alpha$

$F\cdot r_0 = J\alpha$

c) Ker se valj kotali, velja $v^* = v_{obod} = r_0 \cdot \omega$

pospešek težišča $a^* = \frac{\Delta v^*}{\Delta t} = r_0 \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r_0 \cdot \alpha$

je kar enak tangentnemu pospešku!

Imam torej 3 enačbe:
$$\left.\begin{aligned} m \cdot g \cdot \sin\alpha - F &= m \cdot a^* \\ F \cdot r_0 &= J \cdot \alpha \\ a^* &= r_0 \cdot \alpha \end{aligned}\right\}$$

Neznanke so F, α in a^*, torej tudi 3, zato je sistem enačb rešljiv. Kako pa izračunam a^*? Znebiti se moram F in α

$$F \cdot r_0 = J \cdot \frac{a^*}{r_0}$$, to vstavim v 1. enačbo

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - J \frac{a^*}{r_0^2} = m \cdot a^*$$

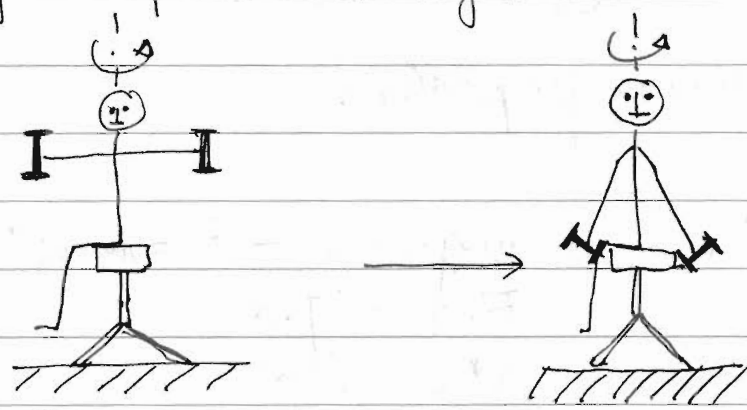
$$m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a^* + \frac{J}{r_0^2} a^* = a^* \left(m + \frac{J}{r_0^2}\right)$$

$$\boxed{a^* = \frac{m \cdot g \sin\alpha}{m + \frac{J}{r_0^2}}}$$

Sedaj pa poglejmo razliko med obema valjema. Masi in polmera sta enaka, pač pa je J votlega valja večji. Ker je to v imenovalcu, bo zato pospešek težišča votlega valja manjši. Zato gre tudi počasneje po strmini.

2.3. Izrek o vrtilni količini

Poglejmo si poskus na vrtljivem stolu



mož s stolom se vrti s kotno hitrostjo ω_1

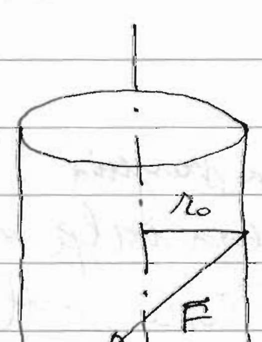
ω_1

mož se začne hitreje vrteti

ω_2

Ugotovimo $\omega_2 > \omega_1$. Vprašamo se zakaj je tako, ali da pojav lahko na kakšen način razložimo?

Poglejmo si vrtenje togega telesa, naprimer vrtenje valja okoli njegove geometrijske osi, ki je nepremična. Imejmo si zunanji navor M sile F:



Navor sile je

$$M = F \cdot r_0$$

Velja: $$M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad / \cdot \Delta t$$

$$M \cdot \Delta t = J \cdot \Delta\omega = J(\omega - \omega')$$

ω.... končna (kotna) hitrost

ω'.... začetna kotna hitrost

$M \cdot \Delta t$ ... sunek navora zunanjih

Definiram vrtilno količino togega telesa, ki se vrti okoli nepremične osi:

$$\boxed{\Gamma = J \cdot \omega}$$

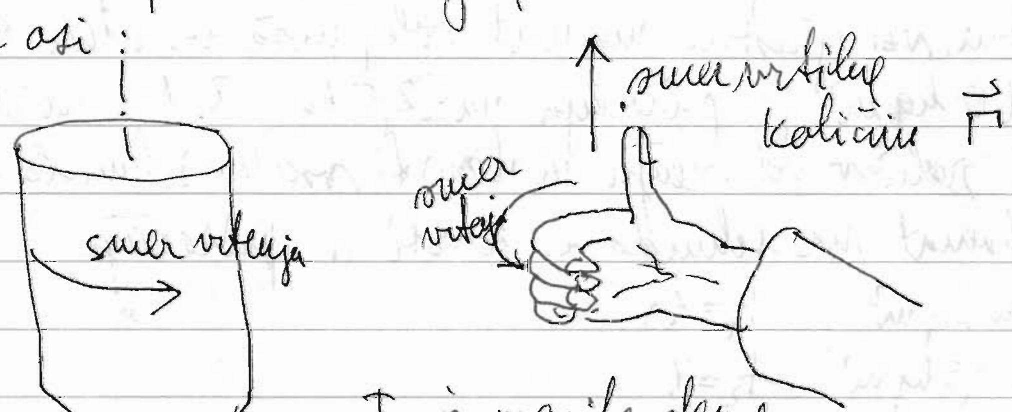
Tako da sunek sile lahko zapišem kot:

$$\boxed{M \cdot \Delta t = \Gamma - \Gamma'}$$

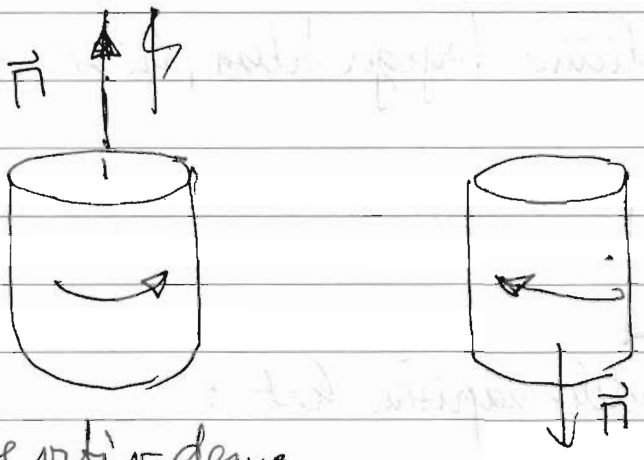
To enačbo imenujemo izrek o ohranitvi vrtilne količine, ki pravi: sunek zunanjih navorov glede na nepremično os je enak spremembi komponente vrtilne količine v smeri nepremične osi

Vrtilna količina ima vektorski značaj, saj se telo lahko vrti v levo ali v desno smer. Vrtilna količina $\Gamma = J \cdot \omega$ je torej lahko pozitivna ali pa negativna (ker ω lahko kaže v levo ali desno ma)

Kako si predstavljamo smer vrtilne količine? Za to uporabimo določeno pravilo, ki ga najlažje spoznamo na primeru valja, ki se vrti okoli težiščne osi:



To je pravilo desne roke



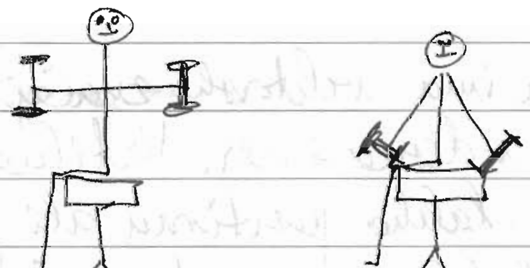
valj se vrti v desno

Valj se vrti v levo

Če se smer vrtenja obrne, se spremeni smer vrtilne količine

Ali je mogoče s tem zakonom pojasniti spremembo kotne hitrosti?

Primer 1:



(a) (b)

Mož sedi na vrtljivem stolu in drži v rokah enaki uteži. Celotni vztrajnostni moment stola, moža in uteži v odročenju je 10 kg m², v priročenju pa 2,5 kg m². Na začetku ima mož roki v odročenju in se zavrti vsako sekundo enkrat. Kolikokrat na sekundo se zavrti v priročenju?

$J_1 = 10\ kg\,m^2$ $\quad t_1 = 1 s$

$J_2 = 2,5\ kg\,m^2$ $\quad t_2 = ?$

$$M \cdot \Delta t = \Gamma - \Gamma' = J_2 \cdot \omega_2 - J_1 \omega_1 = 0$$

Ker ni zunanjih navorov, se komponenta vrtilne količine ohranja:

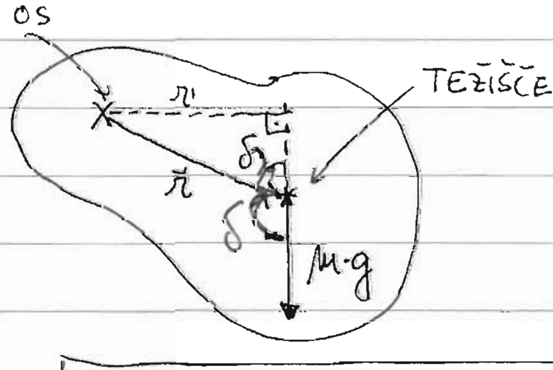
$$J_2 \cdot \omega_2 - J_1 \omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{J_1}{J_2} = \frac{2\pi}{t_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{t_2} = \frac{2\pi}{t_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} \Rightarrow \boxed{t_2 = t_1 \cdot \frac{J_2}{J_1}}$$

$$t_2 = 1s \cdot \frac{2{,}5\,kgm^2}{10\,kgm^2} = 0{,}25\,s$$ Vsako sekundo se zavrti 4x

2.3.1 Navor sile teže, statika togega telesa

Poglejmo si navor sile teže: pokazali smo da sila teže prijemlje v težišču telesa. Poglejmo si, kako je z navorom sile teže, če se telo lahko vrti okoli osi:



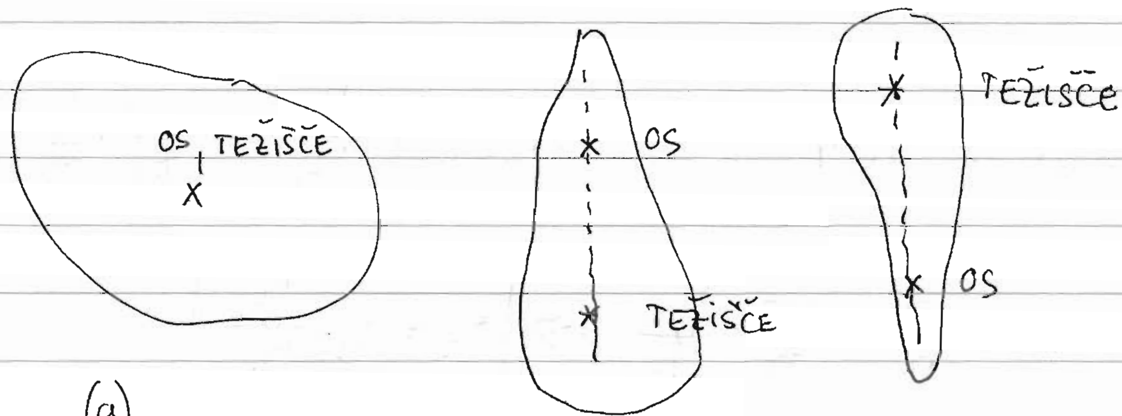
r' ..... ročica sile

r ..... razdalja osi od težišča telesa

Navor sile teže je: $\boxed{M_g = m \cdot g \cdot r' = m \cdot g \cdot r \cdot \sin\delta}$

Kdaj je ta navor enak nič? Dve možnosti sta

- os vrtenja je postavljena v težišče
- os vrtenja leži na navpični premici skozi težišče



(a) ročica sile je enaka 0!

(b) to je stabilna lega

(c) to ni stabilna le

Na ta način lahko določimo lego težišča → telo obesimo in povlec navpičnico skozi os. To naredimo za več različnih osi in iz presečišča premic določimo lego težišča.

Statika togega telesa:

Ugotovili smo, da težišče togega telesa miruje ali se giblje premo enakomerno, če je vsota vseh sil na to telo enaka nič. Vendar nismo povedali še ničesar o vrtenju telesa. Zato dodajmo:

Telo miruje ali se giblje premo enakomerno ali se enakomerno vrti, če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič in če ~~s~~ je vsota vseh zunanjih navorov enaka nič.

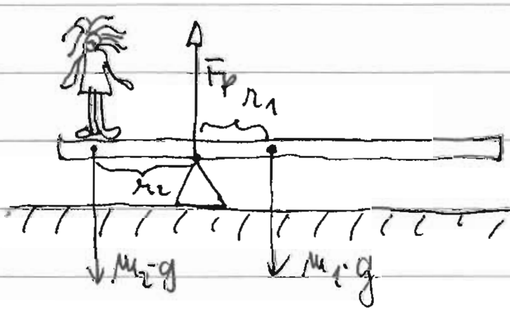
Ravnovesje: $\underbrace{\sum_i \vec{F}_i = 0}_{\text{(vsota vseh sil)}} \Rightarrow \vec{a}^* = 0$ $\quad \vec{a}^*$ ... pospešek težišča

$\sum_i M_i = 0 \Rightarrow \alpha^* = 0$ $\quad \alpha^*$ ... kotni pospešek glede na os skozi težišče.

Primer 1: Homogena deska dolžine 4m in mase 20kg je podprta na 1/3 svoje dolžine, tako, da se lahko prosto vrti okoli podporne točke. Na kateri strani in v kolikšni razdalji od osi mora stati otrok z maso 25kg, da deska miruje v vodoravnem položaju? S kolikšno silo pritiska deska na podporno točko?

$m_1 = 20\,kg$
$l = 4\,m$
$l_1 = 1/3\, l$
$m_2 = 25\,kg$

$r_2 = ?$
$F = ?$



$$r_1 = \frac{l}{2} - l_1 = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{3-2}{6} l = \frac{l}{6}$$

Pogoj za ravnovesji: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ in $\sum_i M_i = 0$

Koliko sil deluje ~~a~~ na desko? Sile teže deske, sila podlage in sila teže otroka.

(a) Ravnovesje sil: $-m_2 \cdot g - m_1 \cdot g + F_p = 0$

$$\boxed{F_p = (m_1 + m_2) g}$$

$$F_p = 45\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = \underline{\underline{441\,N}}$$

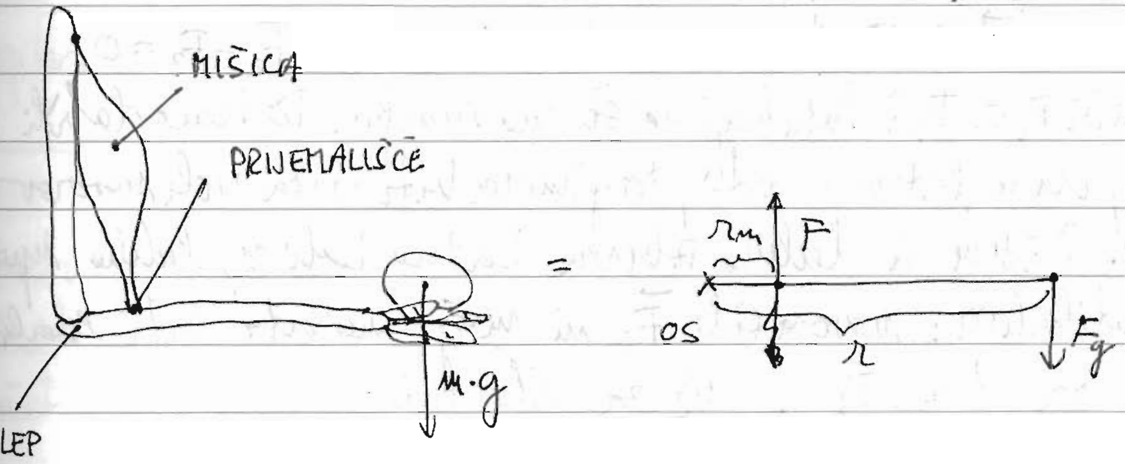
(b) Kako je z navori? Navor sile podlage je enak nič, ker je ročica te sile enaka nič. Ostaneta še navora sile teže deske in sile teže otroka

$$m_1 \cdot g \cdot r_1 - m_2 \cdot g \cdot r_2 = 0$$

$$r_2 = r_1 \frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{6} \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

$$r_2 = \frac{4\,m}{6} \cdot \frac{20}{25} = \underline{\underline{0{,}53\,m}}$$

Primer 2: Izračunaj s kolikšno silo mora delovati mišica na roki, če drži v roki 5kg utež, kot kaže slika. Razdalja med komolcem in utežjo je 40 cm, prijemališče mišice pa je 5cm od komolčnega sklepa.



Navora morata biti enaka $F_g \cdot r - F \cdot r_m = 0$

$$\boxed{F = F_g \cdot \frac{r}{r_m}}$$

$$F = 5kg \cdot 9{,}8\, m/s^2 \cdot \frac{40\, cm}{5\, cm} = \underline{\underline{392\, N}}$$

Primer 3: Lestev dolžine 5m in maso 20kg je prislonjena ob navpično steno, tako da sega do višine 4m. Izračunaj velikosti sil v obeh dotikališčih lestve, pri čemer upoštevaj, da na navpični steni ni lepenja, na vodoravni pa je.

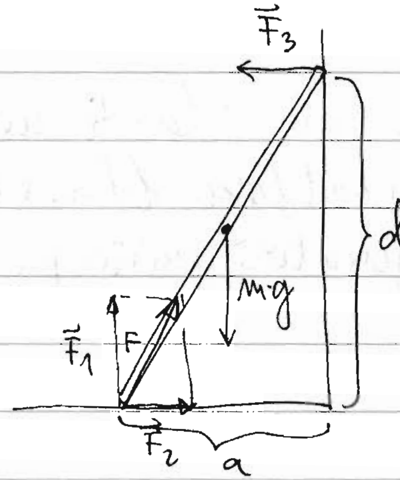
$l = 5m$

$m = 20\,kg$

$d = 4m$

$F_1, F_2 = ?$

$F_3 = ?$



Ravnovesje sil:

v navpični smeri $F_1 - m\cdot g = 0$

$$\boxed{F_1 = m\cdot g}$$

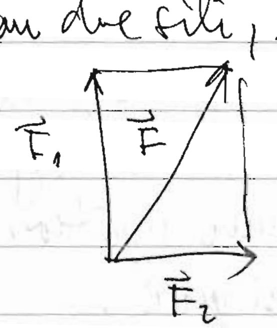
v vodoravni smeri $F_2 - F_3 = 0$

Kako dobiti F_2 in F_3? Potrebujemo še eno enačbo. To bomo dobili iz pogoja, da se lestev ne vrti, torej mora biti vsota vseh navorov enaka 0. Prijemališče si lahko izberem katerokoli, lahko npr. tudi dotikališče: navora sile $\vec{F}_3$ in $m\cdot\vec{g}$ morata biti enaka. Ročici sta d za F_3 in $a/2$ za silo teže.

$$m\cdot g\cdot \frac{a}{2} - F_3\cdot d = 0$$

$$F_3 = m\cdot g\,\frac{a}{2d} = m\cdot g\,\frac{\sqrt{l^2-d^2}}{2d} = 196\,\frac{\sqrt{25-16}\,N}{2\cdot 4} = \frac{196\cdot 3}{8}$$

Izračunam še celotno silo v posameznem dotikališču. V spodnjem imam dve sili, ki se vektorsko seštejeta:



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2g^2}{4d^2}(l^2-d^2)} =$$

$$= m\cdot g\sqrt{1 - \frac{1}{4} + \frac{\cancel{m^2g^2}\,l^2}{4d^2}} = m\cdot g\sqrt{3/4 + \frac{\cancel{m^2g^2}\,l^2}{4d^2}}$$

$$\boxed{F = m\cdot g\sqrt{3/4 + \frac{l^2}{4d^2}}}$$

$F_1 = m\cdot g = 20\cdot 9{,}8\,N = \underline{\underline{196\,N}}$

$F_{sp} = 196\,N\sqrt{3/4 + \frac{25}{4\cdot 16}} = \underline{\underline{209\,N}}$

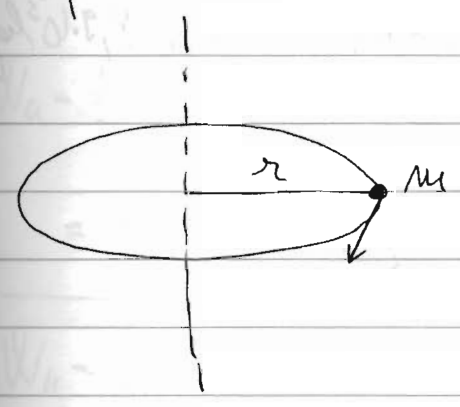
2.4. Kinetična energija togega telesa

Poljubno gibanje togega telesa lahko sestavimo iz gibanja težišča in vrtenja togega telesa okoli osi skozi težišče.

$$\boxed{\text{gibanje togega telesa} = \underset{\text{(točke)}}{\text{gibanje težišča}} + \underset{\text{okoli težišča}}{\text{vrtenje telesa}}}$$

Kinetična energija togega telesa je zaradi tega enaka vsoti kinetične energije zaradi gibanja težišča in rotacijske kinetične energije.

Rotacijska kinetična energija:



masa m (točka) kroži v razdalji r s kotno hitrostjo ω

W_k zaradi kroženja:

$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m \cdot r^2}_{=J} \omega^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$$\boxed{W_k = W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

To velja splošno, ne samo za točkasto telo!

Kinetična energija togega telesa je potem:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2}$$

v^* .... hitrost gibanja težišča

ω .... kotna hitrost vrtenja telesa okoli težišča

Zapišimo sedaj energijski zakon za togo telo:
Delo zunanjih sil razen sile teže je enako vsoti spremembe kinetične energije zaradi gibanja težišča, spremembe potencialne in rotacijske energije.

Primer 1: Bakreno kroglo s polmerom 5 cm usmerimo tako, da se kotali po ravni podlagi s hitrostjo 1 m/s. Kolikšna je kinetična energija krogle? Gostota baker je $8,9 \cdot 10^3 kg/m^3$

$r = 5 cm$

$v^* = 1 m/s$

$\rho = 8,9 \cdot 10^3 kg/m^3$

$W_k = ?$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2$$

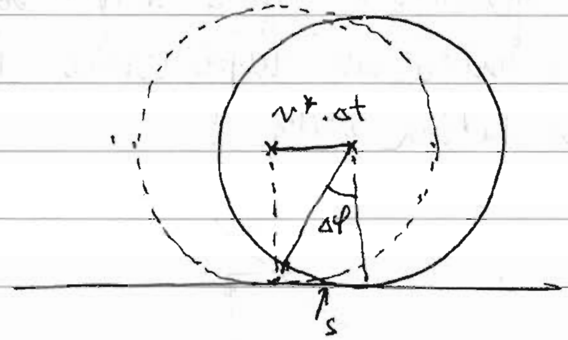
Ne poznam m, J in ω

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot 8,9 \cdot 10^3 kg/m^3 \cdot (0,05 m)^3 =$$

$$= \frac{4\pi}{3} 8,9 \cdot 10^3 kg/\cancel{m^3} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^3 \cancel{m^3} = \frac{4\pi \cdot 8,9 \cdot 125}{3} \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} kg$$

$$= \underline{\underline{4,6 kg}}$$

Kako pa določim kotno hitrost pri kotaljenju?



Lok je mali dolžini premike težišča!

$$s = v^* \cdot \Delta t = r \cdot \Delta\varphi \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v^*}{r}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v^*}{r}}$$ Povezava pri kotaljenju (ali $v^* = \omega \cdot r$ obodna hitrost!)

$$W_k = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{5} m \cdot \cancel{r^2}}_{J} \cdot \frac{v^{*2}}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{5} m v^{*2} =$$

$$= \frac{5+2}{10} m v^{*2} = \frac{7}{10} m \cdot v^{*2}$$

$$\boxed{W_k = \frac{7}{10} m \cdot v^{*2}}$$

$$W_k = \frac{7}{10} \cdot 4{,}6\,kg \cdot 1\,m^2/s^2 = \underline{3{,}2\,J}$$

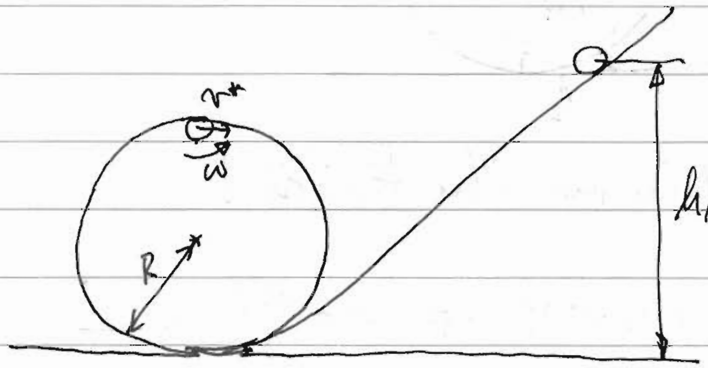
Primer 2: Kroglica z radijem 1cm in maso 50g se kotali po nagnjenem žlebu, katerega spodnji del je zavit v krog z radijem R = 20cm. Izračunaj s katere najmanjše višine moramo opustiti kroglico, da se ves čas dotika žleba!

$r = 1cm$

$m = 50g$

$R = 20cm$

$h_{min} = ?$



Začetno stanje: $W_k' = 0$

$W_p' = m \cdot g\, h$

$W_{rot}' = 0$

Končno stanje: $W_k = \frac{1}{2} m v^{*2}$

$W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

$W_p = m \cdot g \cdot 2R$

$$A = 0 = \frac{1}{2} m v^{*2} - 0 + m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} J \omega^2 - 0 = 0$$

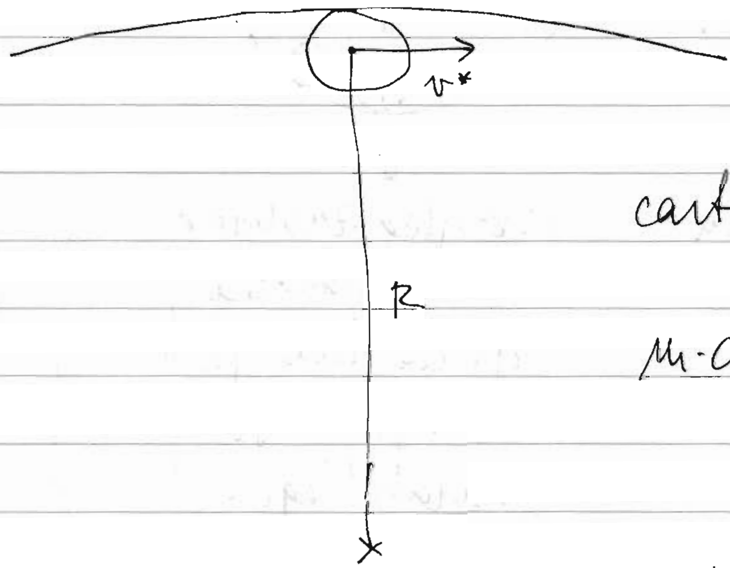
$$m \cdot g\, 2R - m \cdot g h + \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J \omega^2 = 0$$

Velja: $J = \frac{2}{5} m r^2$, $v^* = \omega \cdot r$; to dvoje velja v zg. točki

$$m \cdot g \cdot 2R - m \cdot g\, h + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 r^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = 0$$

$$m \cdot g\, 2R - m \cdot g h + \frac{7}{10} m \cdot \omega^2 r^2 = 0$$

Tu nam sedaj manjka ω, kako ga dobiti? Poglejmo gibanje kroglice, ko je v zgornjem delu. Kroglica se mora tam še gibati zato da centrifugalna sila kompenzira sile teže!



centrifugalna sila je

$$m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^{*2}}{R} = m \cdot g$$

$$v^{*2} = R \cdot g$$

$$\omega^2 r^2 = R \cdot g$$

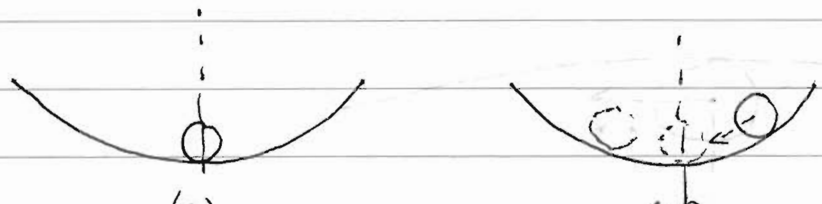
Postavim v prejšnjo enačbo in dobim

$$\cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot 2R - \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot h + \frac{7}{10} \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot R = 0$$

$$\boxed{h = 2R + \frac{7}{10} R}$$

3. Nihanje

Poglejmo si primer kroglice, ki je dana v kotanjo:



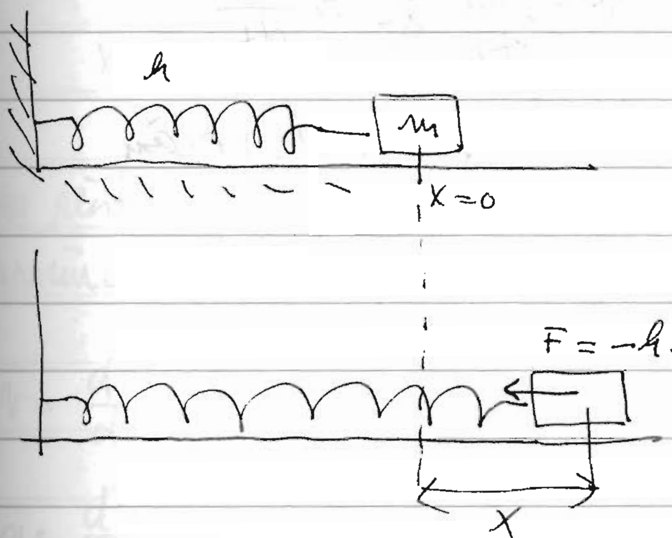
(a) Kroglica je v mirovni legi

(b) Če kroglico izmaknemo, sili k mirovni legi, gre čez, takrat pa se zopet pojavi sila proti mirovni legi. } posledica tega je nihanje kroglice

Zakaj kroglica niha: ko jo izmaknemo iz ravnovesne lege, se pojavi sila, ki vrača kroglico v ravnovesno lego. To je bistvo nihala: sila, ki je sorazmerna odmiku nihala od ravnovesne lege in ki vrača nihalo v ravnovesno lego.

3.1. Nihalo na vijačno vzmet

Telo z maso m lahko brez trenja drsi po vodoravni podlagi. Poglejmo, kaj se zgodi z nihalom, ko telo prestavim iz ravnovesne lege:



Kaj se bo zgodilo? masa m bo šla preko ravnovesne lege v drugo skrajno lego in zopet nazaj. To se bo periodično ponavljalo, tako da dobimo nihanje, vzmet in masa m pa tvorita nihalo.

Poglejmo sile, ki delujejo na nihalo v vodoravni smeri:

Velja Newtonov zakon $F = m \cdot a$

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

$$m \cdot a + k \cdot x = 0$$

$$a + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Sedaj moramo nihalo izračunati $x(t)$ iz te enačbe.

Za tak račun si moramo ogledati odvode funkcije. Naj koordinato telesa opiše funkcija $x(t)$

Takrat je hitrost $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, to smo izračunali pri kinematiki

Definiram hitrost kot odvod $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$

$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$ hitrost je prvi odvod koordinate po času

Kaj pa pospešek? $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$ pospešek je prvi odvod hitrosti po času

Kaj pa zveza med pospeškom in koordinato?

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2}}$ pospešek je drugi odvod koordinate po času.

To definicijo pospeška uporabim v gibalni enačbi našega nihala:

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0}$ Dobil sem diferencialno enačbo za odmik $x(t)$ nihala.

Kaj pravzaprav pomeni ta enačba: dobiti moram takšno funkcijo $x(t)$, da bo tej enačbi zadoščala.
Iz matematike dobro poznamo rešitve take enačbe. To so harmonične funkcije (sinusi in kosinusi). Poglejmo ali je funkcija

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)$$

x_0 .... amplituda nihanja
Ω .... krožna frekvenca nihanja
ϕ .... faza

res rešitev te enačbe?
Izračunati moram prvi in nato drugi odvod te funkcije

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \cdot (-\sin(\Omega t + \phi)) \cdot \Omega = -x_0 \cdot \Omega \sin(\Omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)$$

To sedaj vstavim v enačbo in dobim

$$-x_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) + \frac{k}{m} \cdot x_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi) = 0$$

$$x_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

To mora biti izpolnjeno za vsak čas. Možnosti so

a) $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$, nič se ne zgodi, masa ne miruje, ker je njena koordinata stalno enaka 0.

b) $-\Omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ To je lastna krožna frekv. nihala.

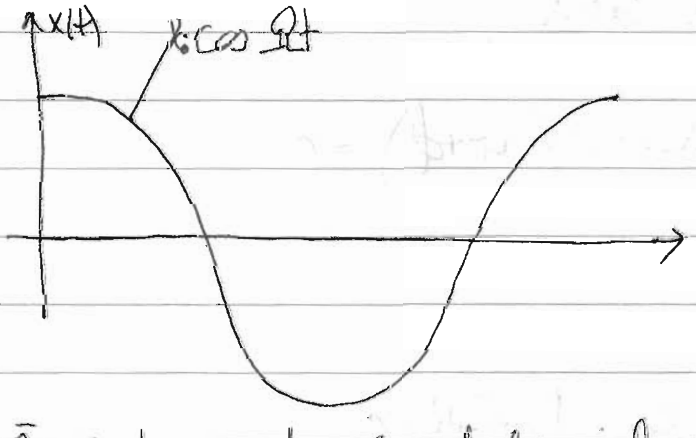
Nihalo potem res niha

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \phi\right)}$$

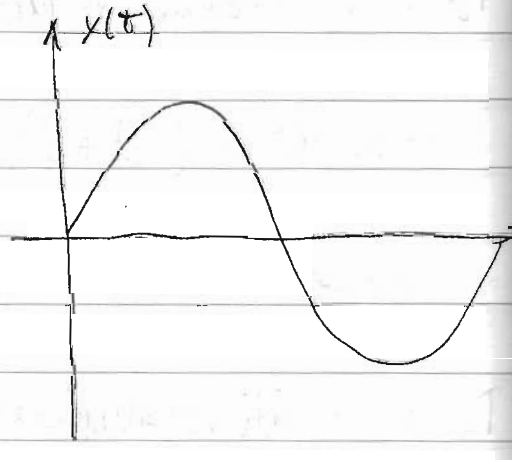
Kaj določa amplitudo? Ta je določena s tem, kolikšno smo pognali nihalo, kako močno niha. Kaj pa ϕ? To pa določa odmik ob času $t=0$.

$$x(0) = x_0 \cdot \cos\phi$$

Če izberemo $\phi = 0$, potem je odmik ob času $t=0$ največji. To bi ustrezalo temu, da nihalo napnemo in potem ob času $t=0$ spustimo.
Če izberem $\phi = \pi/2$, potem je odmik ob času $t=0$ najmanjši.
Narišimo to



ali

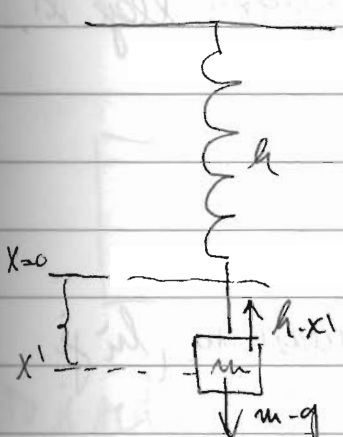


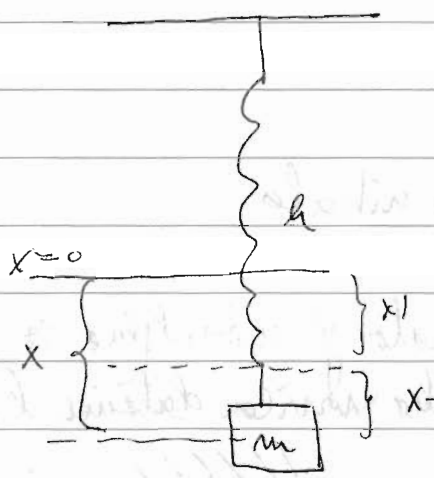
Če je $\phi \neq 0$ in $\phi \neq \pi/2$ dobim nihaj vmes.

Ω je lastna krožna frekvenca nihala. Velja $\Omega = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{t_0}$

ν ... frekvenca nihala, t_0 ... nihajni čas

Kaj pa če isto nihalo postavim pokonci? Ali bo nihalo z isto frekvenco? Poskusimo premisliti: vse kar se zgodi je to, da se vzmet zaradi sile teže raztegne za določen del. Ta sila teže je stalna, ni odvisna od odmika nihala, zato ne more vplivati na nihanje nihala.





To je nova mirovna lega
V njej sta sila teže mg in sila vzmeti uravnoteženi

$$m\cdot g = k\cdot x'$$

Vsota vseh sil:

$$m\cdot g - k\cdot x = m\cdot a$$

odmik x zapišimo kot

$$x = x' + (x - x')$$

$$m\cdot g - k(x' + (x - x')) = m\cdot a$$

$$\underbrace{m\cdot g - k\cdot x'}_{\text{to se uniči}} - k(x - x') = m\cdot a$$

$$m\cdot a + k(x - x') = 0$$

$$a + \frac{k}{m}(x - x') = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x') = 0}$$

x' je neka konstanta, zato velja

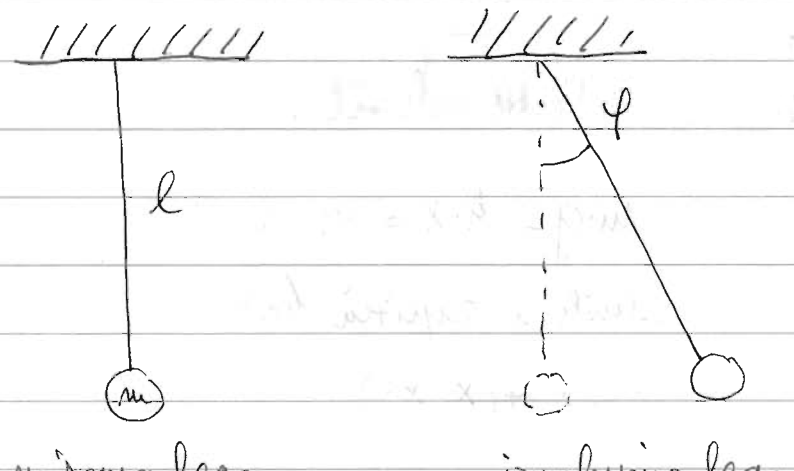
$$\frac{dx'}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(x-x')}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2(x-x')}{dt^2} + \frac{k}{m}(x-x') = 0}$$

To pa je enačba nihanja za $x(t)$, merjena od nove ravnovesne lege x'.

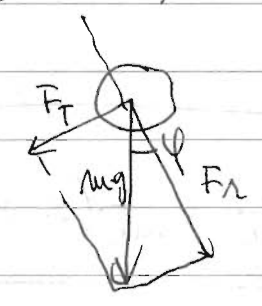
3.2. Matematično nihalo

Matematično nihalo je sestavljeno iz točkaste mase m, ki je obešeno na lahko vrvico dolžine l.



mirovna lega   izmaknjena lega

Kaj sili kroglico v mirovno lego? Edina sila teže jo lahko, toda s čim? Silo teže razstavim na dve komponenti, tangentno in radialno.



$|F_t| = m \cdot g \cdot \sin\varphi \approx m \cdot g \cdot \varphi$ to velja za majhne kote.

Pazim še na predznak. Biti mora −, saj sila vleče tako, da hoče zmanjšati φ, torej ima obratno smer!

$$F_t = -m \cdot g \cdot \varphi = m \cdot a_t = m \cdot \frac{dv_T}{dt} = m \cdot l \cdot \frac{d\omega}{dt} = m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$-m \cdot g \cdot \varphi - m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0}$$

To je sedaj diferencialna enačba za kot $\varphi(t)$, ki je funkcija časa. Zopet uganemo rešitev:

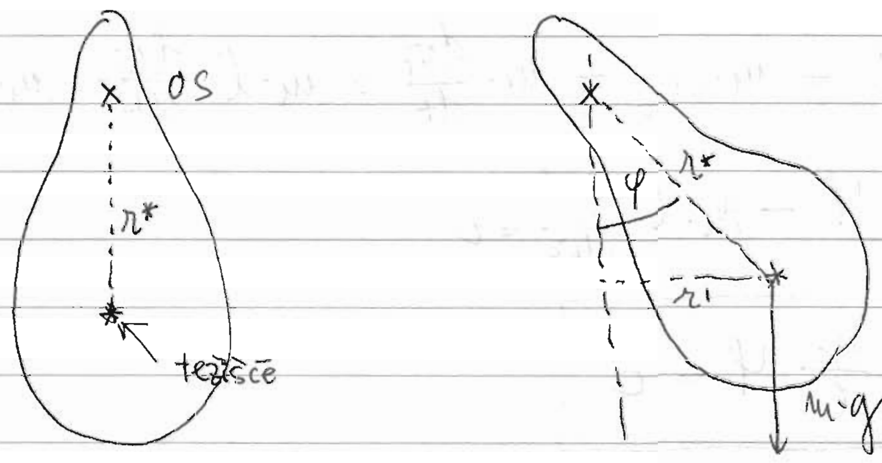
$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi)$$ φ_0 ... amplituda nihanja

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$ krožna frekvenca matematičnega nihala

Je neodvisna od mase!

3.3. Fizično nihalo

Telo z vztrajnostnim momentom J obesimo tako, da je os v razdalji r^* od težišča:



$r' = r^* \cdot \sin\varphi$

Kaj hoče vrniti telo v mirovno lego? Navor sile teže, ki vrti telo. Sila teže prijemlje v težišču.

$$-m \cdot g \cdot r^* \sin\varphi = M$$

$$-m \cdot g \cdot r^* \cdot \varphi = M = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot r^* \varphi = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot r^*}{J} \cdot \varphi = 0}$$

To je gibalna enačba za fizično nihalo.

Rešitev poznamo $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\Omega t + \delta)$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r^*}{J}}}$$

krožna frekvenca nihala

34. Dušeno nihanje, vsiljeno nihanje in resonanca

Najprej si poglejmo kako je z energijo pri navadnem nihalu na vijačno vzmet. Energijo nihala sestavljata kinetična in prožnostna energija nihala.

$$W = W_k + W_{prož} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(-x_0 \Omega \cdot \sin(\Omega t + \phi)\right)^2 =$$

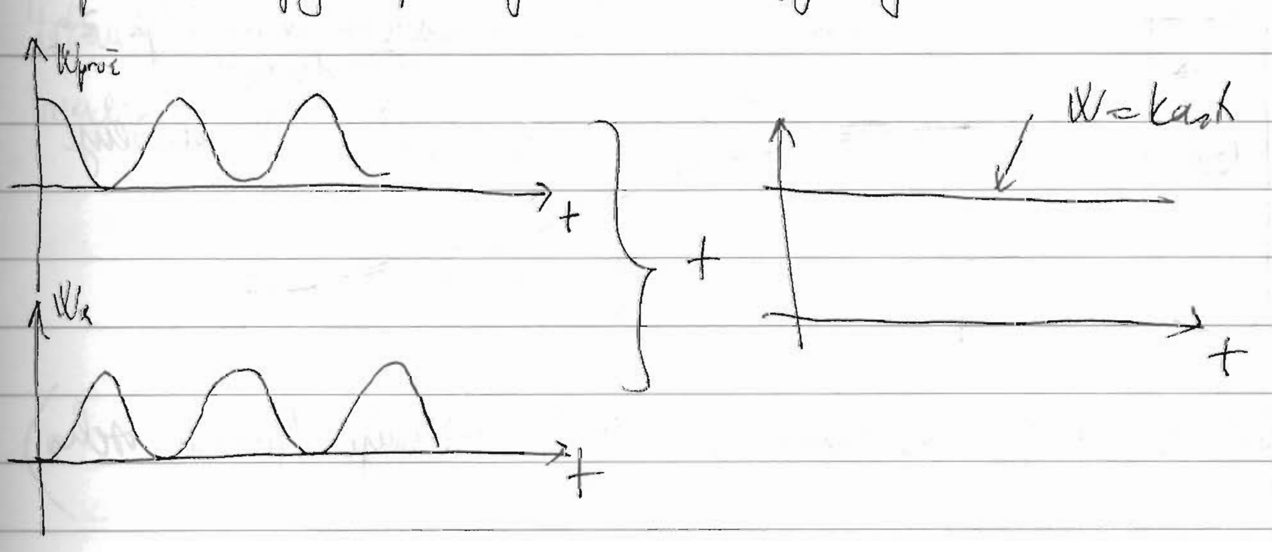
$$= \frac{1}{2} m x_0^2 \Omega^2 \cdot \sin^2(\Omega t + \phi)$$

$$W_{prož} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\Omega t + \phi) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

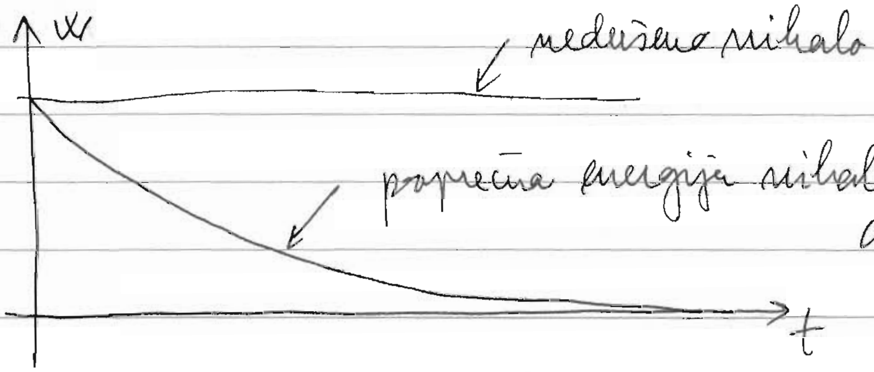
$$W = W_k + W_{prož} = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot x_0^2 \frac{k}{\cancel{m}} \cdot \sin^2(\Omega t + \phi) + \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\Omega t + \phi) =$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \left(\sin^2(\Omega t + \phi) + \cos^2(\Omega t + \phi)\right) = \frac{1}{2} k x_0^2$$

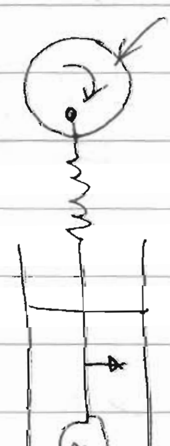
Energija se ne spreminja s časom. Četudi se kinetična in prož. energija spreminjata s časom, je njuna vsota stalna!

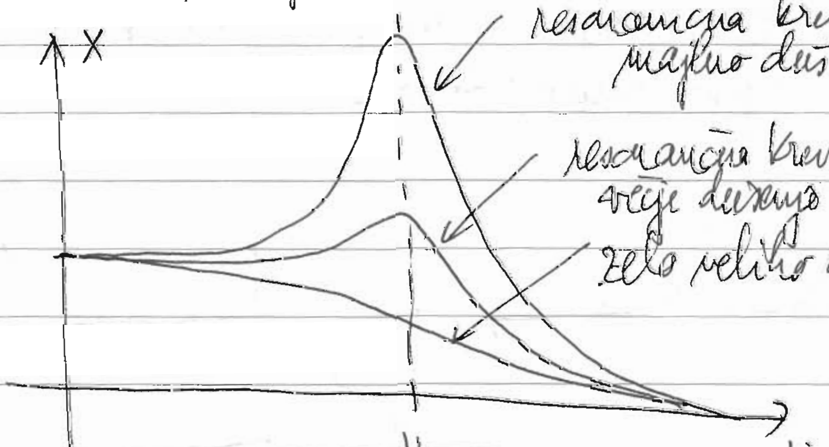


To velja za idealen primer, v resnici pa so nihala dušena. To pomeni, da izgubljajo energijo, npr. s trenjem ipd., tako da se nihalo na koncu ustavi



Kaj je to vsiljeno nihanje? Na nihalo delujemo z neko zunanjo silo, ki niha, gledamo pa odziv nihala. Ugotovimo, da je odziv nihala zelo odvisen od frekvence zunanje sile! Pri določeni frekvenci so odmiki vsiljenega nihanja nihala zelo veliki, pravimo da je nihalo v resonanci.





Pojavi v naravi → resonanca!, vsiljeno nihanje (plima, oseka)

3. Elastične deformacije trdnih teles

Ločimo tri agregatna stanja snovi:

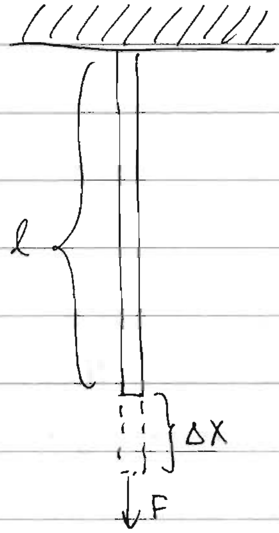
- plin
- tekočina
- trdna snov

Togo telo je trdno v primerjavi s silami, ki na to telo delujejo. To pomeni, da so deformacije togega telesa zanemarljivo majhne. Pri trdnem telesu pa so deformacije lahko znatne. Če trdno telo na primer raztegnemo, se podaljša, če ga stisnemo, se skrajša.

deformacija ..... sprememba oblike telesa
elastična (prožna) .... takšna deformacija, pri kateri se telo povrne v prvotno obliko, ko preneha delovati zunanja sila.

Pri velikih deformacijah lahko pridemo do meje prožnosti in nastopi "plastična" deformacija. Pri taki deformaciji se telo ne povrne v prvotno obliko, ko preneha delovati zunanja sila.

3.1. Hookov zakon in prožnostni modul



Vzemimo žico, ki je pritrjena na steno in jo obremenimo s silo F. Zaradi te sile se bo žica podaljšala za Δx.

Velja Hookov zakon pri majhnih raztezkih:

$$F = k \cdot \Delta x$$

F... zunanja sila
k.... elastični koeficient
Δx... podaljšek žice

Hookov zakon torej opisuje raztezanje ali skrčenje telesa pod vplivom zunanje sile. Poskusimo ugotoviti, od česa je ta koeficient k zares odvisen!

Raztezek bo tem večji, čim večja bo začetna dolžina žice. Če bo ta dvakrat daljša, bo raztezek tudi dvakrat večji, torej $\Delta x \propto l$, pa tudi s silo

$$\Delta x \propto l \cdot F$$

Raztezek bo manjši, če bom vzel žico z manjšim presekom,

$$\Delta x \propto \frac{l \cdot F}{S}$$

To pa so torej vsi geometrijski podatki. Definiram še prožnostni modul E: čim večji je ta modul, tem manjši

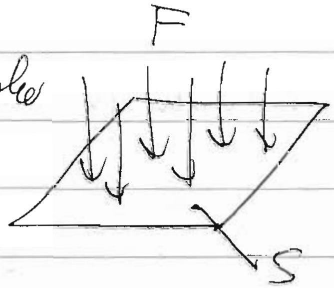
Ko raztezek in dobim

$$\Delta x = \frac{l}{E} \cdot \frac{F}{S}$$

Ponavadi to pišem $\boxed{\frac{F}{S} = \frac{E \cdot \Delta x}{l}}$

Količina F/S imenujem tudi tlak (ali napetost v tehniki)

$\boxed{p = \frac{F}{S}}$ to je torej sila na površinsko enoto:



Enota za tlak je $N/m^2 = Pa$ (Pascal).
V rabi je še bar, ki je $1\,bar = 10^5\,Pa = 10^5\,N/m^2$, ker je 1 Pa zelo majhna enota.

Zapišimo si še elastične module za različne snovi E:

jeklo: $20 \cdot 10^{10}\,N/m^2$
steklo: $5 \cdot 10^{10}\,N/m^2$
kavčuk: $0{,}8 \cdot 10^{10}\,N/m^2$

Koliko pa so raztezki? To si izračunajmo na primeru.

Primer: na 5m dolgi jekleni žici s premerom 1mm obesimo 50 kg težko breme. Za koliko se podaljša žica? Kolikšen je tlak v žici?

$l = 5\,m$

$2R = 1\,mm$

$m = 50\,kg$

$E = 20 \cdot 10^{10}\,N/m^2$

$\Delta x = ?$

$$\Delta x = \frac{F}{S} \cdot \frac{l}{E} = \frac{m \cdot g \cdot l}{E \cdot \pi R^2}$$

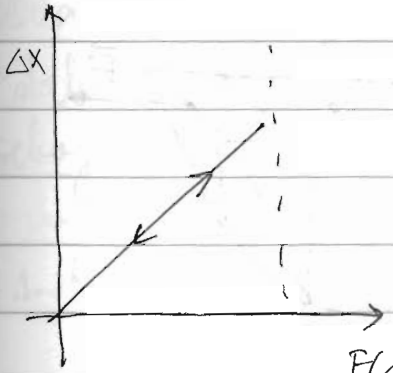
$$\Delta x = \frac{50\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 5\,m}{\pi (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2 m^2 \cdot 20 \cdot 10^{10}\,N/m^2} = \underline{\underline{15{,}6\,mm}}$$

Kolikšen je tlak v žici?

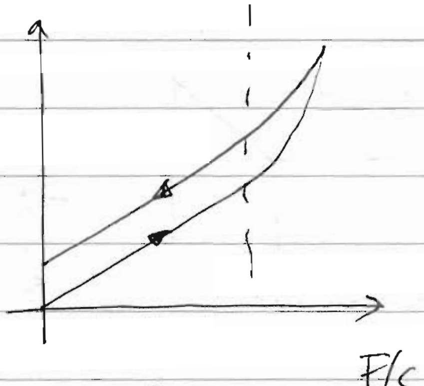
$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{\pi r^2} = \frac{50\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2}{\pi (0{,}5 \cdot 10^{-3}\,m)^2} = 6{,}24 \cdot 10^8\,N/m^2 = \underline{\underline{6200\,ba}}$$

Seveda snovi ne moremo v nedogled obremenjevati, saj slej ko prej popusti. Narišimo, kaj se dogaja z elastiki:

Za materiale torej sile ne smejo preseči določene meje, preko katere se začnejo plastične deformacije. Razlika med elastično in plastično deformacijo žice:



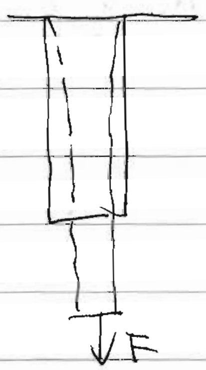
pri elastični deformaciji se telo povrne v prvotno obliko



če prekoračimo elastično področje, se telo ne povrne v prvotno obliko. Pravimo da se plastično deformira.

Pokazni eksperimenti:

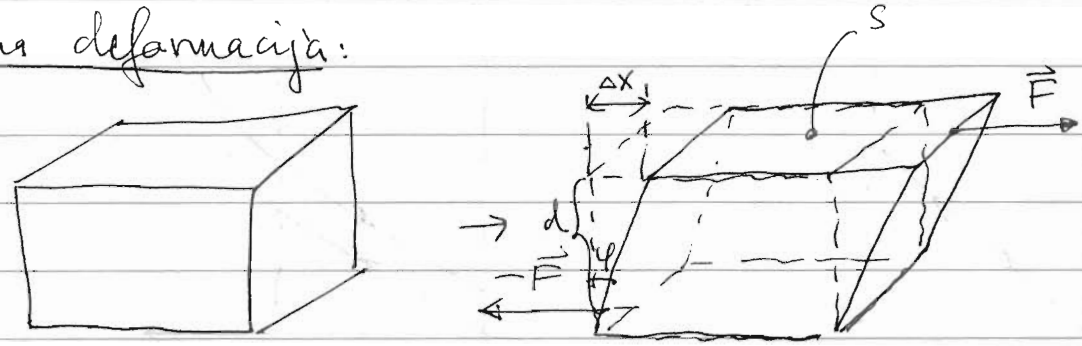
1) Hookov zakon: natezanje žice
2) Hookov zakon: raztezanje kavčuka
3) Plastična deformacija
4) Trdnost stekla: steklenica s kapilaro
5) Trdnost stekla: steklena folija 0,15 mm in pa optično vlakno.
6) Prečna skrčitev



7) guma ohladi v dušiku → postane krhka.

3.2. Strižna deformacija in torzija

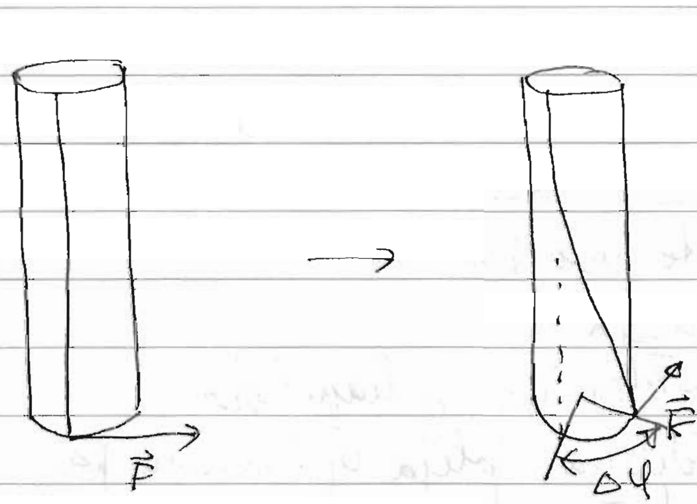
Strižna deformacija:



$\frac{F}{S} = G \cdot \frac{\Delta x}{d} = G \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$ G.... strižni modul

Primer: deformacija modela iz penaste gume

Torzija



Sila $\vec{F}$ ima navor! Spodnji del se je zasukal za $\Delta\varphi$, ki je sorazmeren z navorom

$M = D \cdot \Delta\varphi$ D.... torzijski koeficient

Primer: cev

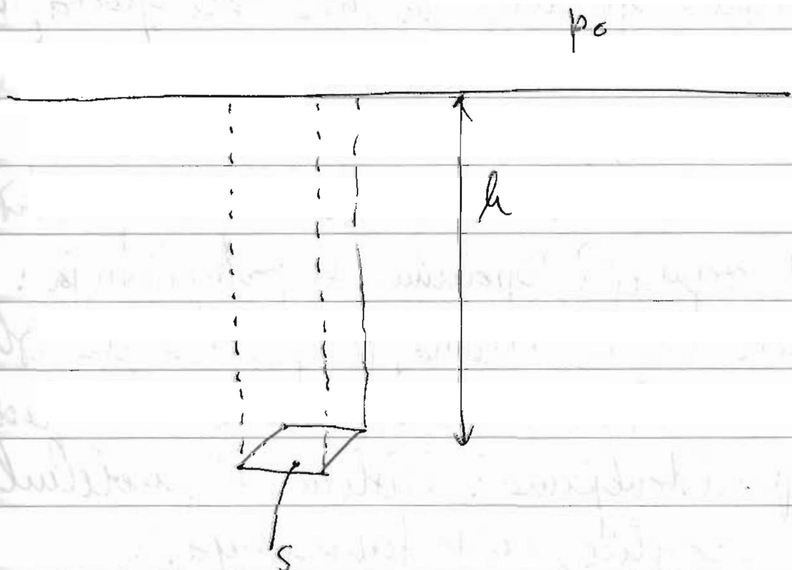
4. Mehanika tekočin

Osnovna lastnost tekočin je ta, da lahko tečejo, torej nimajo "stalne" oblike, temveč se posamezni deli tekočine med seboj gibljejo neodvisno.

4.1. Hidrostatika tekočin: hidrostatski tlak in vzgon

Pri hidrostatiki obravnavamo statiko tekočin:

<u>Hidrostatski tlak:</u>



Tlak v globini h: to je sila na ploskovno enoto, $p = \frac{F}{S}$. Od kod izvira torej v tekočini tlak? Očitno k temu prispeva teža tekočine, ki je nad določenim mestom in pritiska na ploskev S. Ta sila je

$$F = mg = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot S \cdot h \cdot g$$

Sila na ploskovno enoto, to je tlak pa je

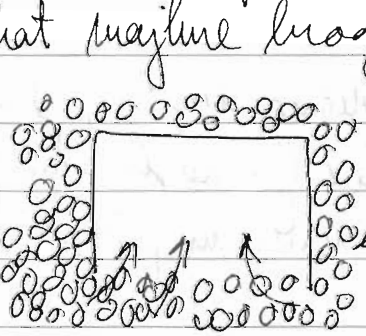
$p = \frac{F}{S} = \rho g h$ $\boxed{p = \rho \cdot g \cdot h}$ to je hidrostatski tlak zaradi tekočine

Če je nad tekočino še tlak p_0, potem moramo ta tlak še dodatno prišteti,

$\boxed{p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h}$ p_0 ... tlak nad tekočino

Od kod izvira atmosferski tlak? Od teže zraka nad nami! Zato se ta tlak z višino spreminja in nas boli glava, ko gremo v hribe.

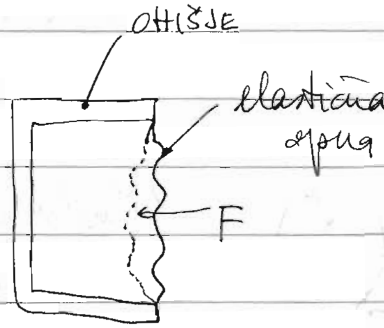
Kako je s smerjo tlaka? Ali tlak ~~pritr~~ tekočine pritiska samo v smeri od zgoraj? Spomnimo se potapljanja: tu čutimo tlak od vseh strani enako, torej voda pritiska od vseh smeri enako. Trdimo, da je tlak izotropen. Kako si to lahko predstavljamo? Mislimo si molekule vode kot majhne kroglice, ki so tesno skupaj:



kroglice silijo v notranjost, ker se med njimi sile prenašajo tako da zgornje kroglice pritiskajo na spodnje, te pa naprej v notranjost.

To preverimo s poskusom:

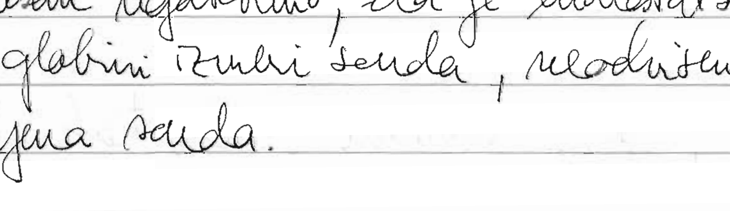
Manometer na opno:



Elastična opna se pod vplivom tlaka deformira (upogne). Upogib je sorazmeren z deformacijo, na ta način pa merimo tlak. S poskusom ugotovimo, da je hidrostatski tlak, ki ga na dani globini izmeri sonda, neodvisen od smeri, v katero je obrnjena sonda.

Zgled: izračunaj hidrostatski tlak, ki ga mora prenesti podmornica v globini 500 m! S kolikšno silo deluje voda na vsak kvadratni meter ~~stene~~ oklepa?

$$p = p_0 + \rho g h = 1\,\text{bar} + 10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot 5\cdot 10^2\,\text{m} =$$
$$= 1\,\text{bar} + 49\cdot 10^5\,\text{kg m/s}^2/\text{m}^2 =$$
$$= 1\,\text{bar} + 49\cdot 10^5\,\text{N/m}^2 = 1\,\text{bar} + 49\,\text{bar} = \underline{\underline{50\,\text{bar}}}$$



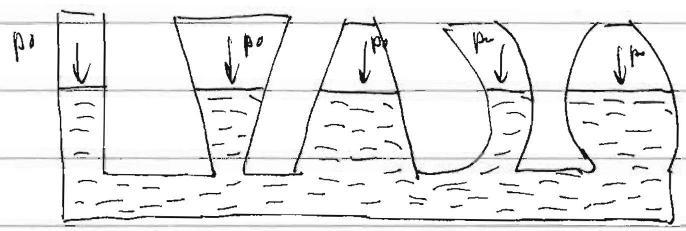
Razlika tlakov je 49 bar

$$\frac{F}{S} = p_z - p_n \Rightarrow F = S\cdot(p_z - p_n) = 1\,\text{m}^2 \cdot 49\cdot 10^5\,\text{N/m}^2 = 4{,}9\cdot 10^6\,\text{N}$$

1 tona $= 10^3$ kg $\rightarrow \underline{\underline{10^4\,\text{N}}}$; sila ustreza masi $\underline{\underline{490\ \text{ton}}}$!!

Kako merimo tlak? Merimo ga z manometri

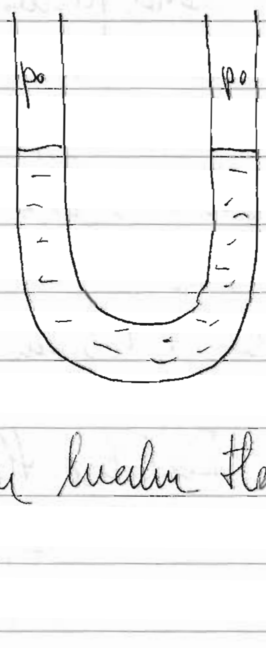
Najbolj preprosti manometri so izvedeni v obliki veznih posod:



Gladina tekočine je v vseh krakih enaka, ker je nad vsako gladino enak zračni tlak.

Vzamem odprto cevko v obliki U in dobim

a) odprti manometer ; p_0.... navadni zračni tlak

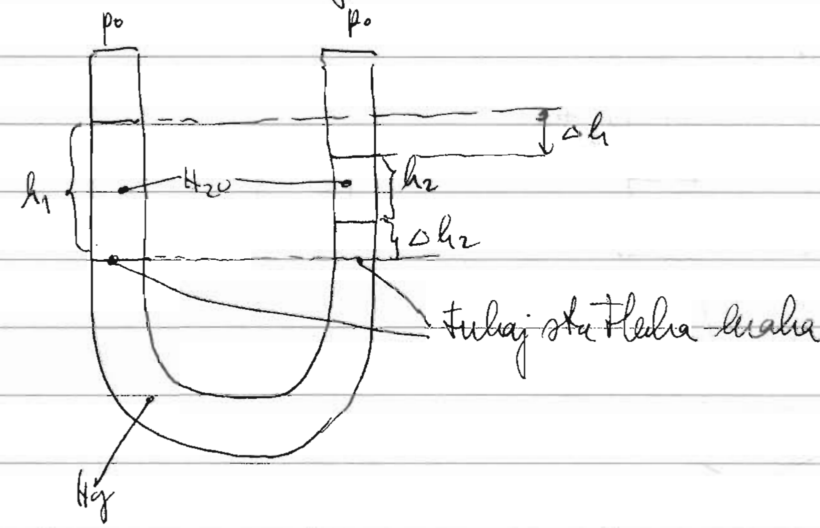


$1 bar = 10^5 N/m^2 = 750 tor$
$1 m bar = 0,75 tor$
Običajen zračni tlak je 760 tor, t.j. 1010 m bar

Če v enem kraku tlak povečamo, postaneta višini stolpcev različni.

Primer 1: ~~Vzzapadem~~ V cevi U je živo srebro z gostoto 13,6 g/cm³. V levi krak nalijemo 10 cm visok stolpec vode in v desni krak 6 cm visok stolpec vode. Kolikšna je višinska razlika v krakih

$h_1 = 10\,cm$
$h_2 = 6\,cm$
$\rho_{Hg} = 13{,}6\,g/cm^3$
$\Delta h = ?$

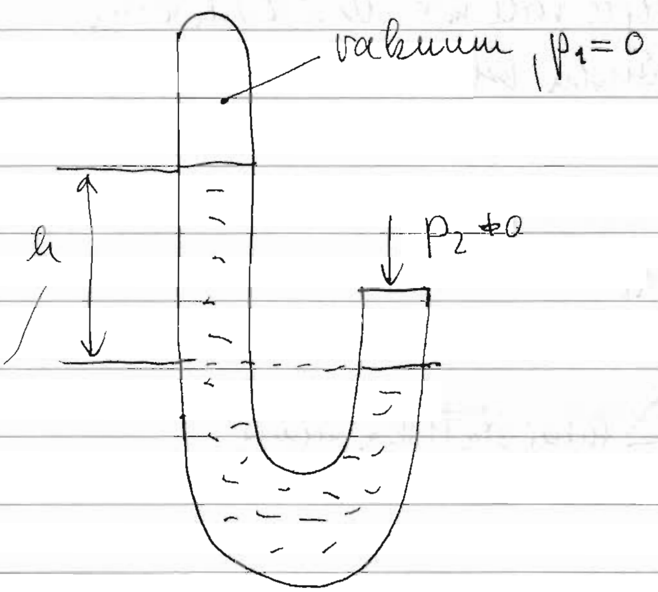


$$p_0 + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_1 = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_2 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h_2 + p_0$$

$$\Delta h_2 = \frac{\rho_{H_2O} \cdot (h_1 - h_2)}{\rho_{Hg}} = 0{,}29\,cm$$

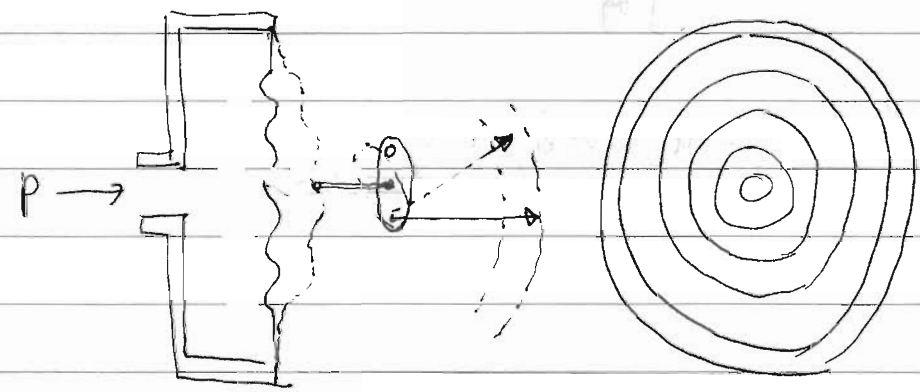
$$\Delta h = h_1 - h_2 - \Delta h_2 = \underline{\underline{3{,}7\,cm}}$$

b) zaprti manometer



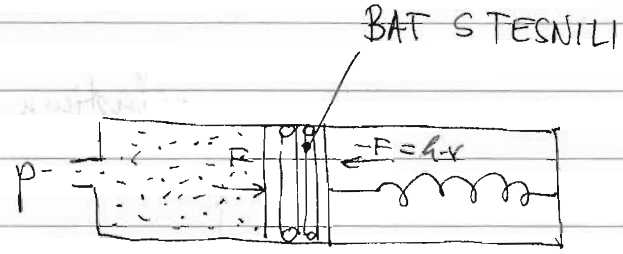
$$p_2 = \rho \cdot g \cdot h$$

c) manometer na elastično membrano



Na membrano je pritrjena ročica, ki preko vzvoda premika kazalec. Tak manometer je potrebno umeriti.

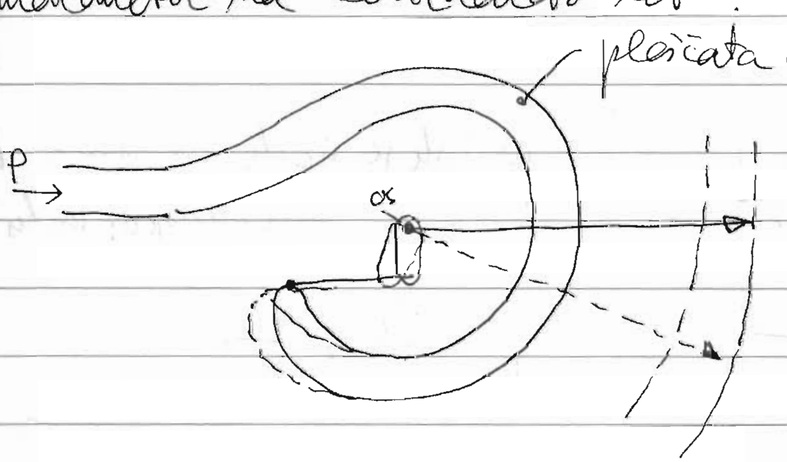
d) manometer na bat:



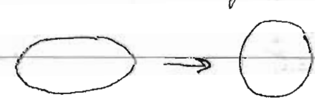
Bat se zaradi pritiska premakne, tako da se vzmet skrči.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{k \cdot x}{S}$$

e) manometer na Bourdonovo cev:



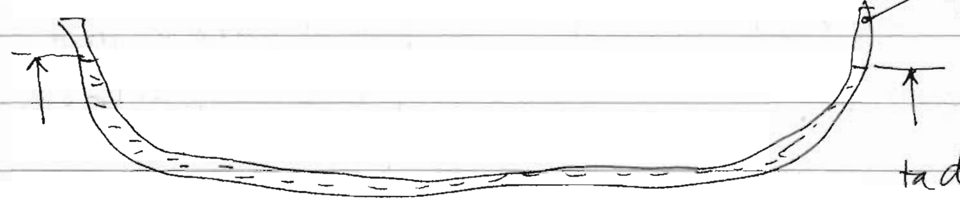
Cev mora biti ploščata



da se pod pritiskom rahlo zaokrogli, kar povzroči poravnavo cevi

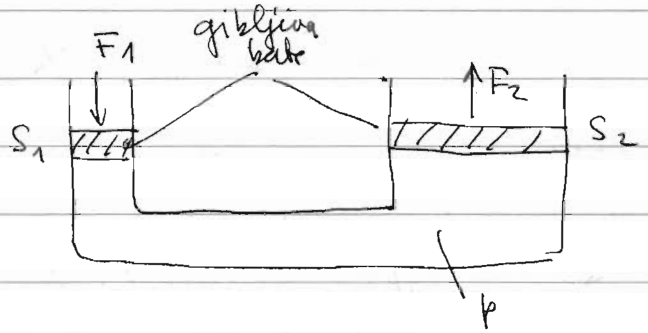
Poglejmo si še dva primera uporabe hidrostatičnega tlaka: vodna tehtnica in pa hidravlična stiskalnica

vodna tehtnica:



ta dva konca sta na enaki višini (ker je enak tlak nad njima)

hidravlična stiskalnica

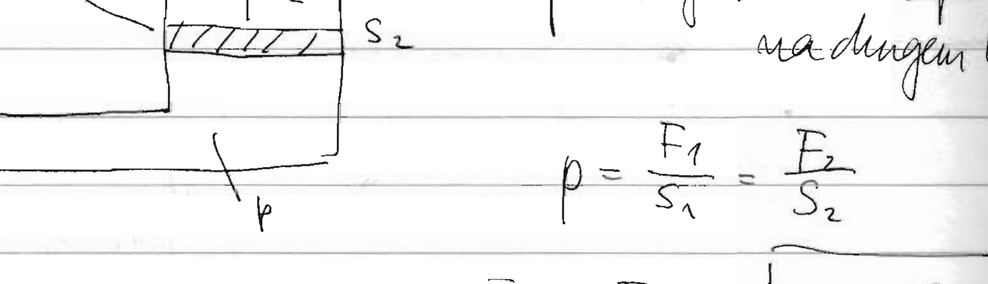


pritisk je enak na prvem, kot na drugem batu

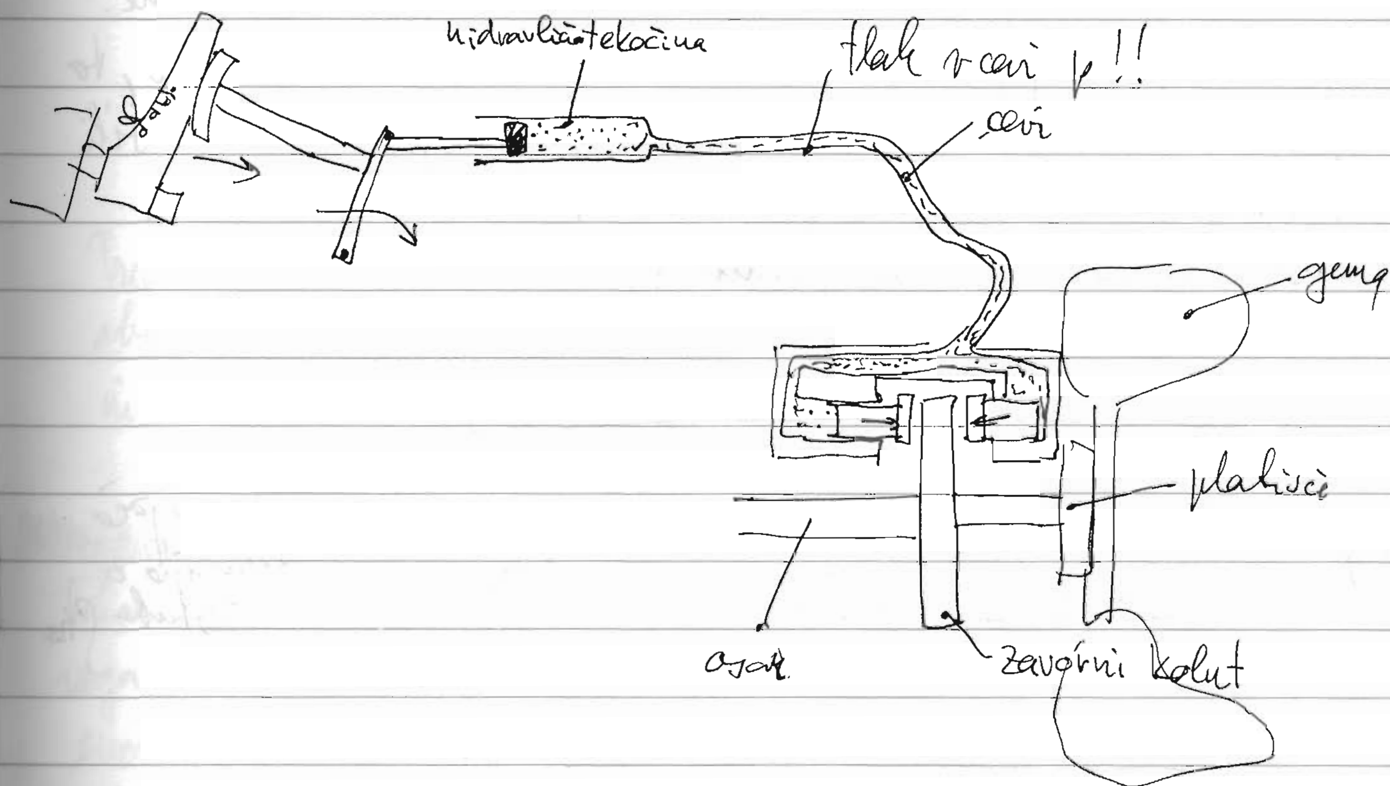
$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1}$$

Primer, če je $S_2 \approx 100 \cdot S_1$, je sila F_2 100x večja!!
Na tem principu delujejo hidravlične stiskalnice ali pa npr. hidravlična dvigala



Hidravliko uporabljamo še v letalih, vozilih (hidravlične zavore) itd.



→ primer $S_1 = 1\,cm^2$
$S_2 = 400\,cm^2$ → $F_2 = 400 \cdot F_1$

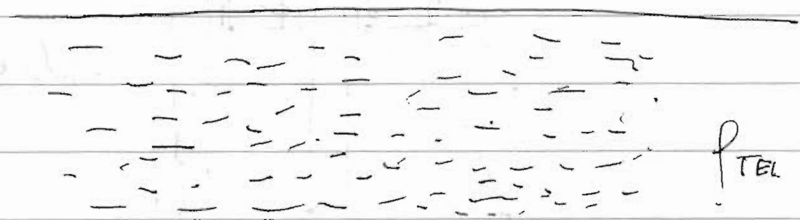
Če je F_2 sila teže avtomobila z maso $m_2 = 1200\,kg$ ⇒

$F_2 = m_2 \cdot g$ $\qquad m_2 = 400 \cdot m_1 \Rightarrow m_1 = \frac{1200}{400} = 3\,kg$

$F_1 = m_1 \cdot g$ $\qquad$ S 3 kg mase lahko dvignemo 1200 kg avtomobil !!!

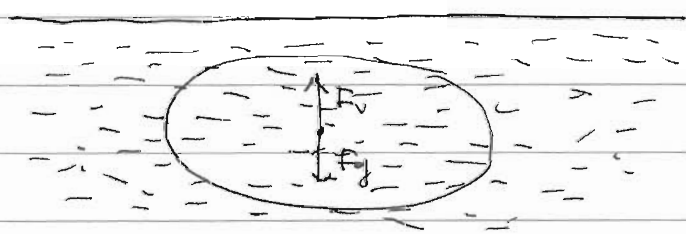
Vzgon v tekočinah

Iz izkušenj vemo, da nekatera telesa plavajo, druga pa ne. Vprašamo se, kaj je vzrok za to. Če telo plava na tekočini, to pomeni, da na telo deluje dodatna sila, ki je nasprotna sili teže. Izvor te sile je pojasnil že Arhimedes s svojim znamenitim miselnim poskusom:

(a) 

ρ_{TEK}

Vzamem mirujočo tekočino z gostoto ρ_{TEK}

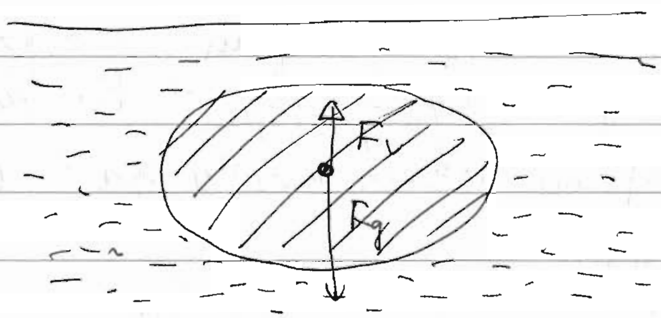
(b) 

V tej tekočini si zamislim ~~odprt~~ zaklopljen plašč, ki objema tekočino ~~s~~ z volumnom V

Ta tekočina miruje, torej mora nanjo delovati neka sila vzgona okoliške tekočine, F_v, ki kompenzira težo te tekočine

$$F_v = -F_g = -\rho_{TEK} V_{TEK} g$$

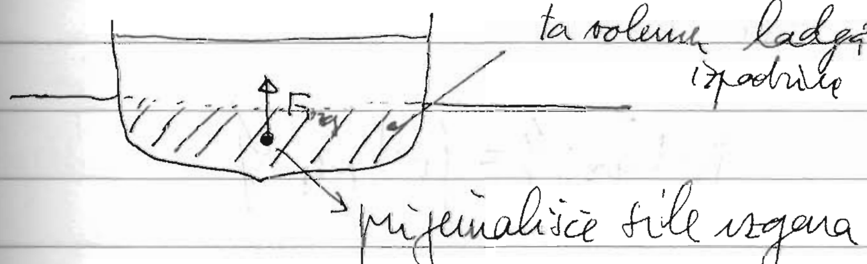
(c) Če dam namesto vode sedaj neki drugi predmet, bo ta sila vzgona še vedno enaka!



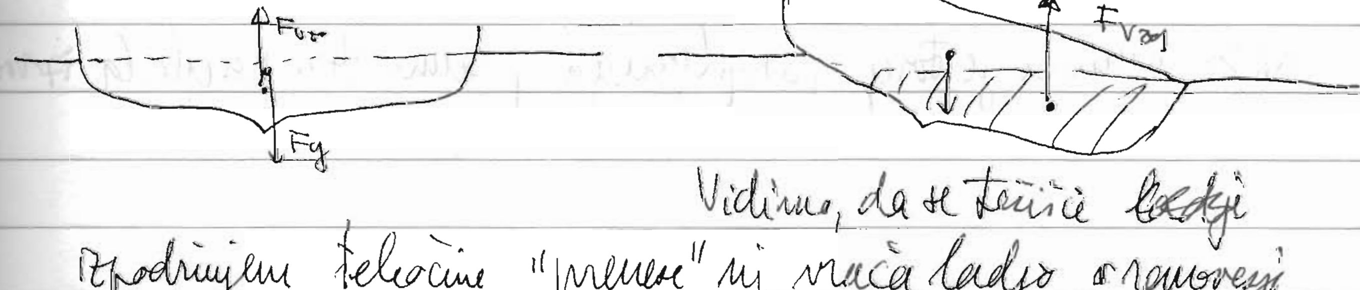
Predmet bo torej navidezno lažji! Sila ne bo odvisna od oblike potopljenega telesa temveč samo od volumna telesa in gostote izpodr. tekočine.

Vzgon je navpična projekcija rezultante vseh sil, s katerimi tekočina pritiska na potopljeno telo. Prijemališče sile vzgona je v težišču izpodrinjene tekočine, po velikosti pa je enaka sili teže izpodrinjene tekočine.

Ladja: prečni presek

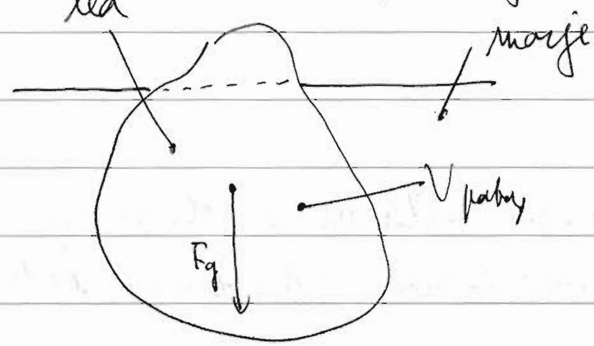


Kaj se dogaja pri zibanju ladje?



Vidimo, da se težišče ~~ladje~~ izpodrinjene tekočine "prenese" in vrača ladjo v ravnovesje

Primer: Ledena gora z gostoto $\rho_L = 0{,}95\ g/cm^3$ plava po gladini morske vode z gostoto $\rho_V = 1{,}1\ g/cm^3$. Kolikšen del prostornine ledene gore gleda iznad morske gladine?



$\rho_L = 0{,}95\ g/cm^3$

$\rho_V = 1{,}1\ g/cm^3$

$\frac{V_{gore}}{V_{patopl.}} = ?$ $\frac{V_{patoplj}}{V_{gore}} = ?$

Celotna sila teže ledene gore je $F_g = \rho_L \cdot V_{gore} \cdot g$

Sila vzgona je enaka teži izpodrinjene tekočine

$$F_{vzg} = \rho_V \cdot V_{patop} \cdot g$$

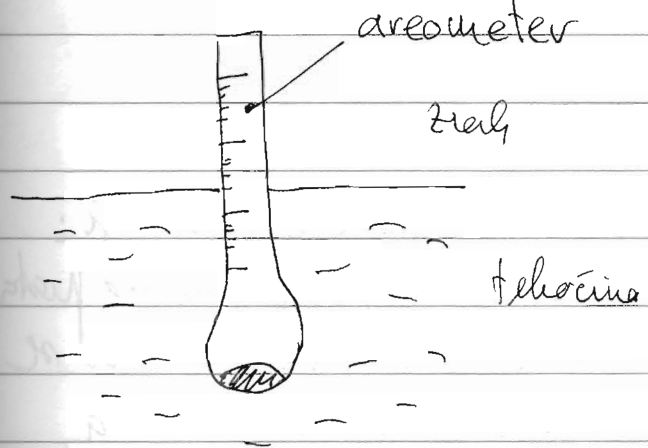
V ravnovesju sta ti dve sili enaki

$$F_g = F_{vzg} \qquad \rho_L \cdot V_{gore} \cdot \cancel{g} = \rho_V \cdot V_{patop} \cdot \cancel{g}$$

$$\frac{V_{patop}}{V_{gore}} = \frac{\rho_L}{\rho_V} = \frac{0{,}95}{1{,}1} = 0{,}86 = \underline{\underline{86\%}}$$

86% volumna je torej potopljenega, samo 14% pa gleda iz vode

Areometer: naprava za merjenje gostote tekočine



Areometer plava zaradi sile vzgona. Čim redkejša je tekočina, tem globlje se bo potopil, ker da se sila vzgona izpodrinjene tekočine izenači s silo teže

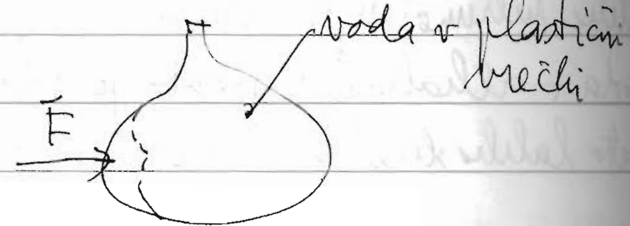
Z areometri merimo gostoto tekočin. S posebnimi areometri lahko merimo npr. koncentracijo raztopine (alkoholmeter) (voda + alkohol: gostota je odvisna od vsebnosti alkohola, zato lahko neposredno merimo kar koncentracijo alkohola).

4.2. Hidrodinamika tekočin: tok tekočine in Bernoullijeva enačba

Tok tekočine

Osnovna lastnost tekočine je ta, da teče. To pomeni naslednje: Trdna snov lahko prenaša statične sile, medtem ko prava tekočina ne more prenašati statičnih sil. Trdna snov se pod vplivom zunanje sile deformira. Ko sila preneha, se trdno telo povrne v prvotno obliko. Tekočina pod vplivom sile teče, lahko se meša. Ne more pa prava tekočina prenašati statične sile.

Trdno telo prenaša statično silo

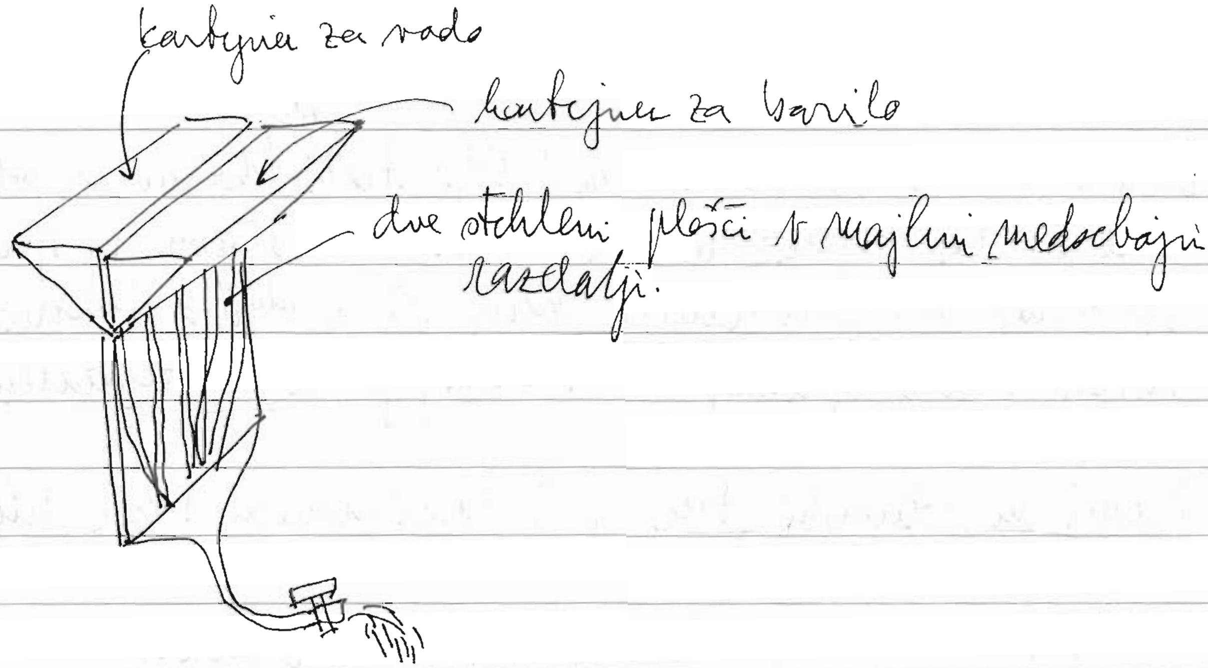


Tekočina pod vplivom statične sile teče!

Gibanje tekočine je dosti bolj komplicirano od gibanja togega telesa, ker se posamezni deli tekočine (molekule) mešajo, t.j. spreminjajo svojo lego glede na druge dele tekočine.

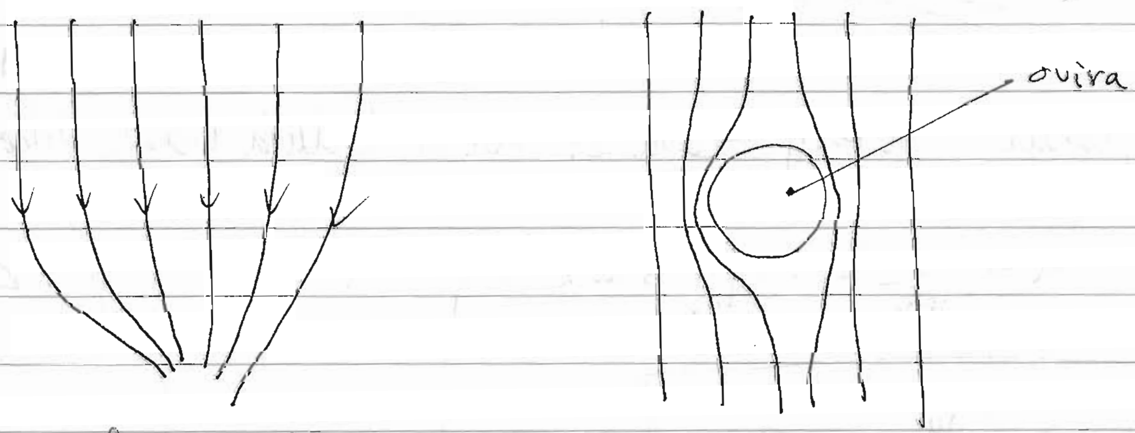
Gibanje tekočine lahko opazujemo na tak način, da v tekočino damo vidne delce, ki se gibljejo skupaj s tekočino. Na ta način lahko spremljamo gibanje tekočine. Ti delci so lahko žaganje, opilki, barvilo ip.d.

Tokovni primer: Pohlov aparat

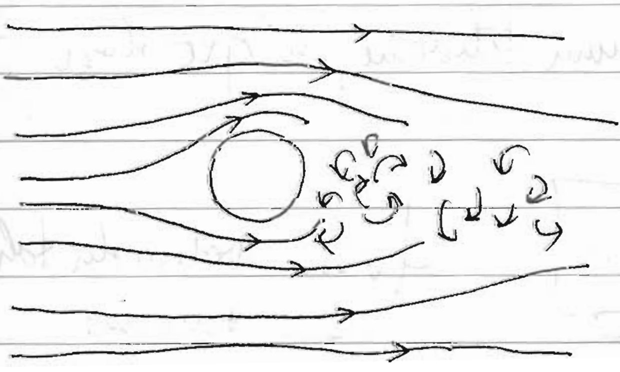


Tok tekočine si grafično predstavimo s tokovnicami. To so poti, po katerih se gibljejo posamezni deli tekočin. Glede na obliko tokovnic razlikujemo dve vrsti tokov:

1) Laminarni tok: Tokovnice so med seboj lepo urejene. Ni vrtincev. (kot lepo počesani lasje)



2) Turbulentni (vrtinčasti) tok. Z vrtinci (razkuštrani lasje)

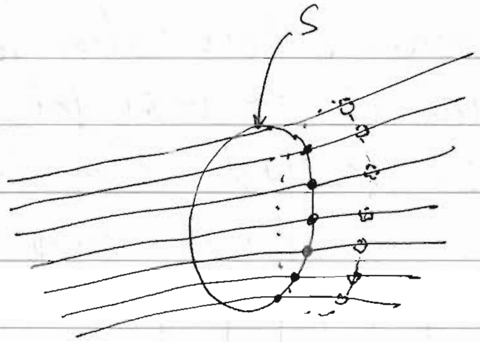


Tok okoli ovire je turbulenten.

Od česa je odvisna oblika toka? Od hitrosti toka tekočine in od viskoznosti. Če se oblika tokovnic in hitrost tekočine s časom ne spreminjata, govorimo o <u>stacionarnem</u> toku. Če se oblika tokovnic in hitrost tekočine spreminjata s časom, je tok <u>nestacionaren</u>.

<u>Masni in volumski tok</u> pri laminarnem toku tekočine

Masni tok je masa tekočine, ki gre skozi površino S v časovni enoti.



V času Δt se deli tekočine premaknejo za

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \qquad v \ldots \text{hitrost tekočine}$$

Skozi ploskev S je torej v času Δt šla naslednja masa tekočine

$$\Delta m = \rho_{tek} \Delta V = \rho_{tek} S \cdot \Delta x = \rho \cdot S \cdot v \cdot \Delta t \qquad / : \Delta t$$

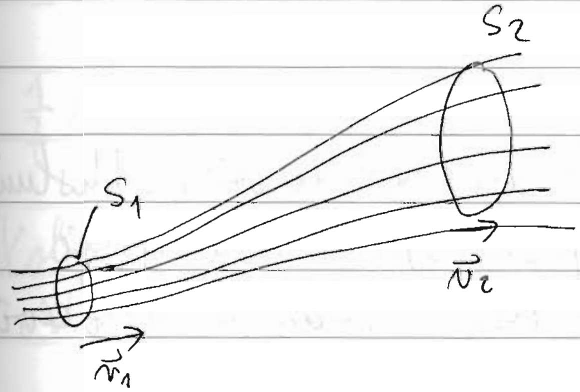
$$\boxed{\Phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_{tek} S \cdot v} \qquad \Phi_m \ldots \text{masni tok tekočine}$$

Volumski tok pa je enak volumen tekočine, ki gre skozi površino S v časovni enoti.

$$\boxed{\Phi_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \cdot \Delta x}{\Delta t} = S \cdot v} \qquad \Phi_V \ldots \text{volumski tok tekočine}$$

Velja oveza $\Phi_m = \rho_{tek} \cdot \Phi_V$

Pri stacionarnem gibanju tekočine je v = konst in je masni tok konstanten. Toliko tekočine kot priteče v dan volumen, jo tudi izteče (se ne izgubi). Če je ~~tekočina nestisljiva velja~~ :



$$\Phi_{m1} = \Phi_{m2}$$

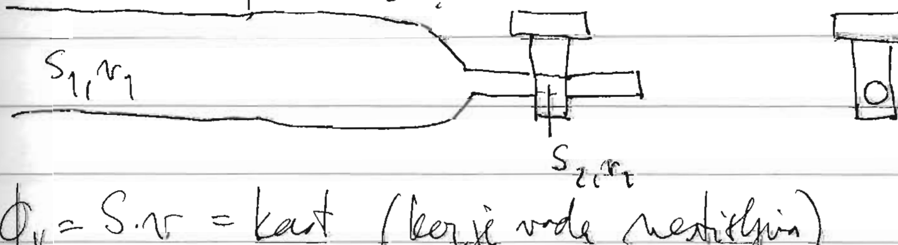
$$\boxed{\rho_{t1} S_1 v_1 = \rho_{t2} S_2 v_2}$$

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$ ← Če je tekočina nestisljiva

Kontinuitetna enačba. Če se presek tokovne cevi zmanjša, teče tekočina hitreje. Na ožjih delih cevi torej teče tekočina hitreje.

Primer: Po vodovodni cevi s premerom 2 cm priteče v pipo vsako minuto 10 l vode. Kolikšna je hitrost vode v cevi? Kolikšna je hitrost vode v ventilu vodovodne pipe, kjer je premer cevi samo 5 mm?

$V = 10\,dm^3$ $\quad 2r_1 = 2\,cm$ $\quad v_1 = ?$
$t = 60\,s$ $\quad 2r_2 = 0{,}5\,cm$ $\quad v_2 = ?$



$\Phi_V = S \cdot v$ = konst (ker je voda nestisljiva)

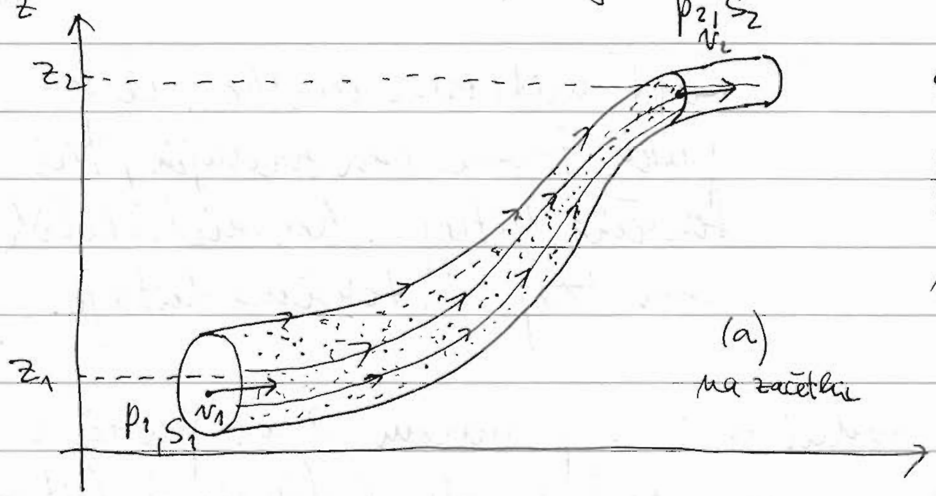
$$v_1 = \frac{\Phi_v}{S_1} = \frac{10\,dm^3}{60\,s \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{10^3\,cm^3}{6\pi \cdot 1\,cm^2} = 0{,}53\,m/s$$

$$v_2 = \frac{\Phi_v}{S_2} = \frac{10 \cdot 10^3\,cm^3}{60\,s \cdot \pi \cdot 0{,}25^2\,cm^2} = 8{,}5\,m/s$$

Hitrosti vode se na ožjih mestih znatno povečajo!

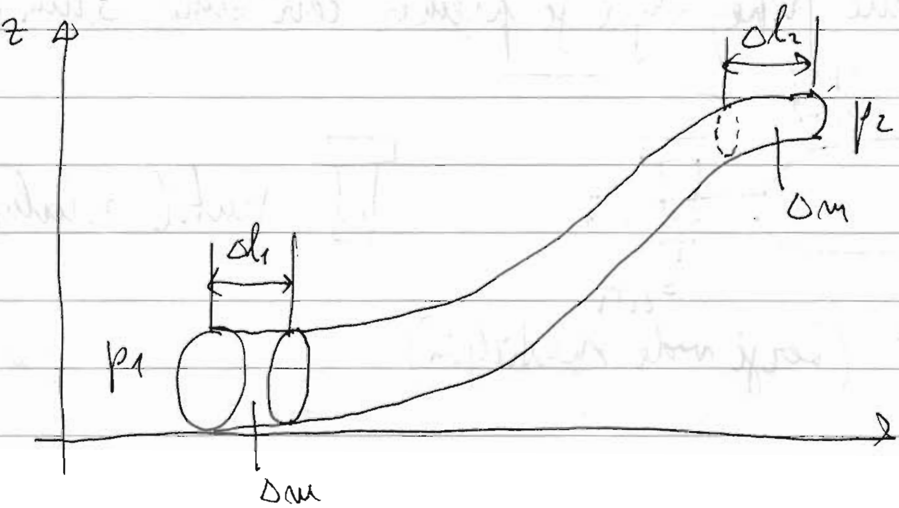
Bernoullijeva enačba

Obravnavamo laminarni in stacionarni tok tekočine. Mislimo si tok tekočine po cevi, ki ima spremenljiv presek in je na različnih višinah. Opazujemo tok tekočine po tej cevi:



S.... presek cevi
p.... tlak v tekočini
z... višina tekočine
v.... hitrost tekočine

V času Δt se tekočina premakne v spodnjem delu za Δl_1, v zgornjem pa za Δl_2



Zapišimo energijski zakon za tok tekočine:

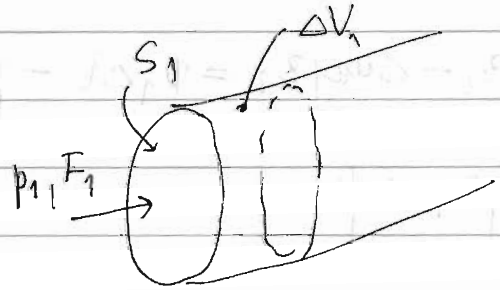
$$W_k - W_k' + W_p - W_p' = A_{zun}$$

Vsota spremembe kinetične in potencialne energije vode je enaka delu zunanjih sil razen sile teže.

$$\frac{1}{2}\Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m \cdot g \cdot z_2 - \Delta m \cdot g \cdot z_1 = A$$

Kolikšno pa je delo zunanjih sil razen sile teže? Sestavljeno je iz dveh prispevkov $A = A_1 + A_2$

Na levem koncu ostala tekočina s tlakom p_1 deluje na tekočino v cevi in jo premakne za Δl_1. To delo je pozitivno

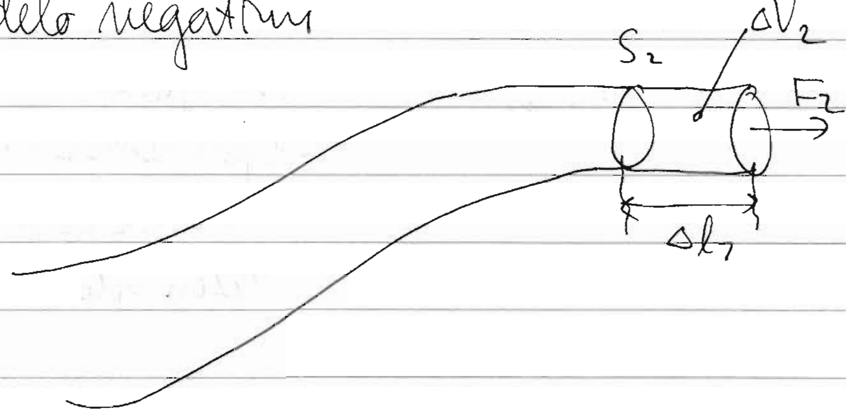


$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

Delo te sile je pozitivno, ker ~~dod~~ potiska tekočino

$$A_1 = F_1 \cdot \Delta l_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta l_1 = p_1 \cdot \Delta V_1$$

Na desni strani pa tekočina izteka ven in oddaja delo, torej bo to delo negativno



$$A_2 = -F_2 \cdot \Delta l_2 = -p_2 \cdot S_2 \cdot \Delta l_2 = -p_2 \cdot \Delta V_2$$

Celotno delo je torej: $A = A_1 + A_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$

Ker je tekočina nestisljiva, je $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ in $A = (p_1 - p_2)\Delta V$
To vstavim v enačbo in dobim

$$\frac{1}{2}\Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g z_2 - \Delta m g z_1 = p_1 \Delta V - p_2 \cdot \Delta V \quad / : \Delta V$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_2 - \rho g z_1 = p_1 - p_2$$

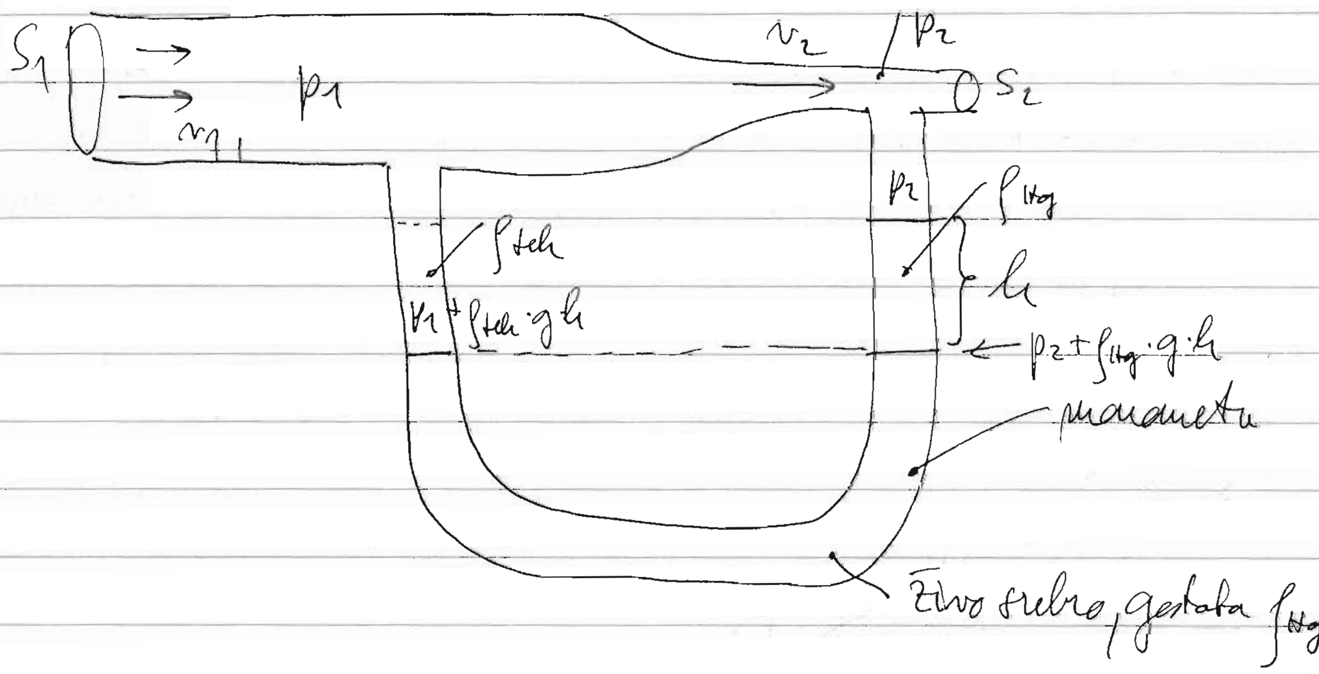
$$\boxed{p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1}$$

Bernoullijeva enačba. Opisuje laminaren in stacionaren tok tekočin. Enačba velja samo približno, ker nismo upoštevali notranjega trenja pri toku tekočine (viskoznost)

Navadno je pisano tudi $\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{konst}}$

Primeri uporabe Bernoulli-jeve enačbe :

a) Venturi-jeva cev



Ker se v ozkem delu cevi hitrost pretoka poveča, se tlak v tekočini (plin) zmanjša. Če poznamo preseke S_1 in S_2 ter izmerimo h, lahko določimo hitrost pretoka tekočine.

Za tlak velja $p_1 = p_2 + (\rho_{Hg}-\rho_{tek})\, g\cdot h$ $\qquad p_2 = p_1 - (\rho_{Hg}-\rho)\, g\cdot h$

Ker je $z_1 = z_2$, velja : $p_2 + \frac{1}{2}\rho_{tek} v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho_{tek} v_1^2$ (Bernoulli)

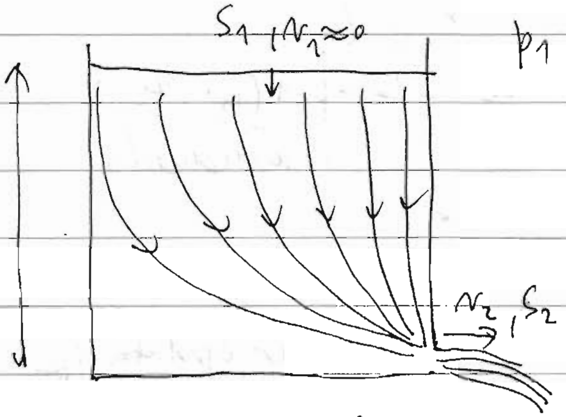
Poleg tega velja kontinuitetna enačba $S_1 v_1 = S_2 v_2$

$$\frac{1}{2}\rho_{tek} v_2^2 + \cancel{p_1} - (\rho_{Hg}-\rho_{tek})\, g\cdot h - \cancel{p_1} - \frac{1}{2}\rho_{tek}\cdot v_2^2\,\frac{S_2^2}{S_1^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} v_2^2\cdot\rho_{tek}\left(1-\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = (\rho_{Hg}-\rho_{tek})\, g\, h$$

$$v_2^2 = \frac{2(\rho_{Hg} - \rho_{tek}) \cdot g h}{\rho_{tek}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho_{tek}) \cdot g \cdot h}{\rho_{tek}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}}}$$

2) Iztekanje ~~posode~~ tekočine iz posode: S kakšno hitrostjo v ~~iztek iz posode tekočina~~ izteka skozi luknjo na dnu posode tekočina, če sega v posodi do višine 1m nad luknjo?



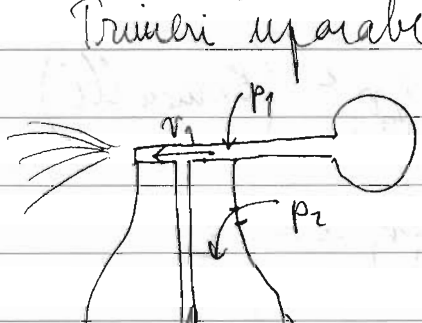
$p_1 \approx p_2$, to je atmosferski tlak!

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_t \cancel{v_1^2}^{\,0} + \rho_t \cdot g \cdot h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \cdot \cancel{h}^{\,0}$$

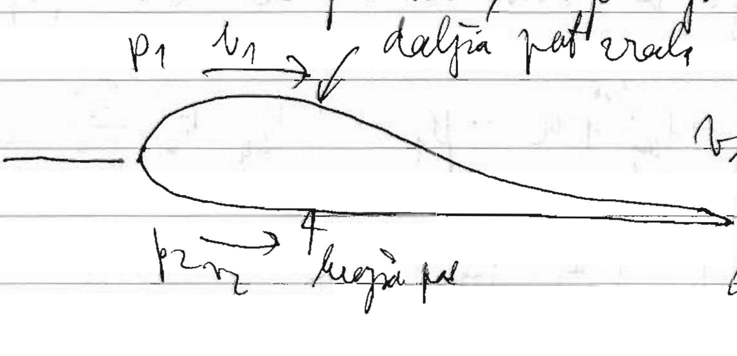
$$\frac{1}{2}\rho \cdot v_2^2 = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \qquad v = 4{,}4\,m/s$$

Hitrost je ista, kot če bi tekočina prosto padala.

Primeri uporabe Bernoullijeve enačbe:



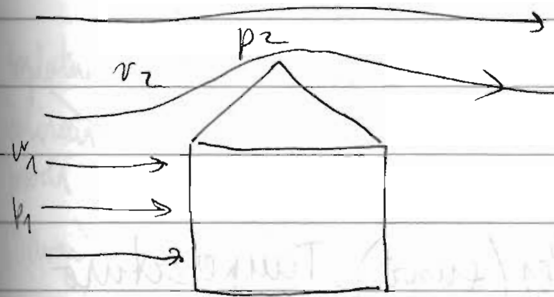
ker je v_1 zelo velika, je p_1 majhen, zato nastane podtlak, ki potegne tekočino v šobo.



letalsko krilo

$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p_2$

nastane podtlak na zgornjem delu kr

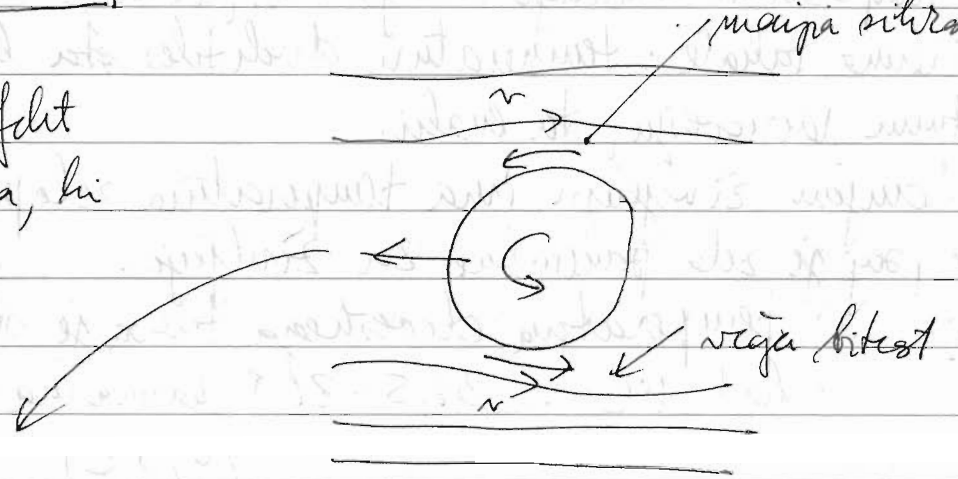


$p_2 < p_1$, kjer je hitrost večja!

$v_1 < v_2$

Magnusov efekt

vrtea se žogica, ki se hitro giblje



Žoga zavije z idealne poti →

5. Toplota

5.1. Temperatura

Pojem temperature označuje stanje teles (snovi). Temperaturo definiramo takole: temperaturi dveh teles ~~sta~~ ki sta v toplotnem ravnovesju, sta enaki.

V vsakdanjem življenju ima temperatura zelo pomembno vlogo, saj je zelo pomembna za življenje.

Primeri: a) temperatura človeškega telesa je stalna na bolj kot 1°C : 36,5 – 36,8 normalna temperatura (0,3°C)

nad 37°C → povišana T, slabo počutje

nad 39°C → nevarno za življenje

b) temperatura človeške okolice: 20°C ± 2°C

težave nad 35°C in pod −10°C

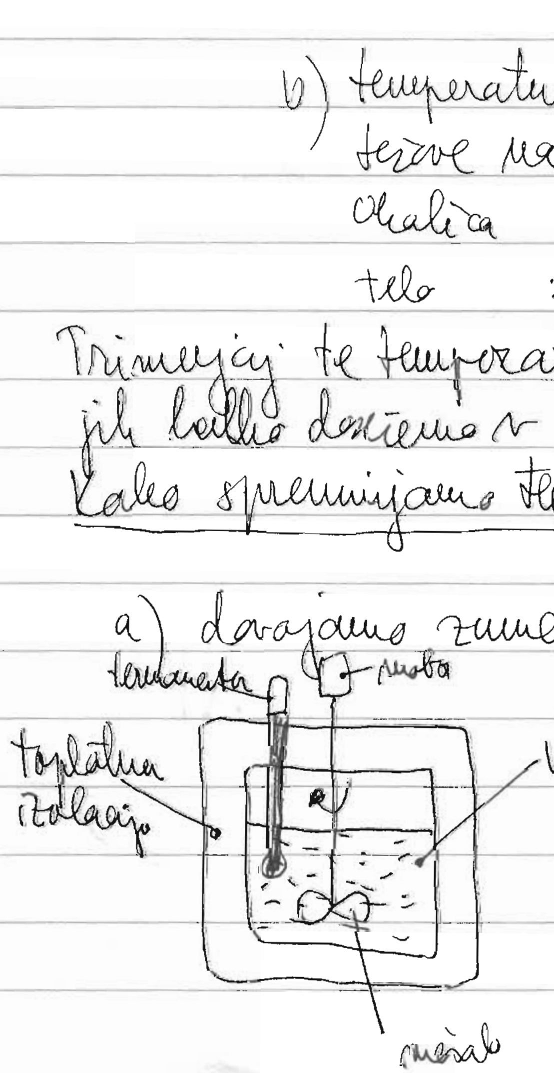
Okolica : 40–50°C razpona

telo : nekaj °C razpona

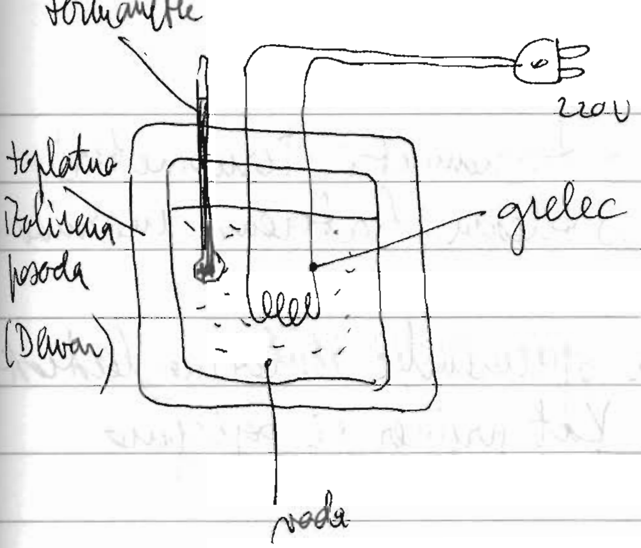
Primerjaj te temperature z ekstremnimi temperaturami, ki jih lahko dosežemo v laboratorijih (10^6 K in 10^3 K)

Kako spreminjamo temperaturo teles:

a) dovajamo zunanje delo, npr. električno ali mehansko

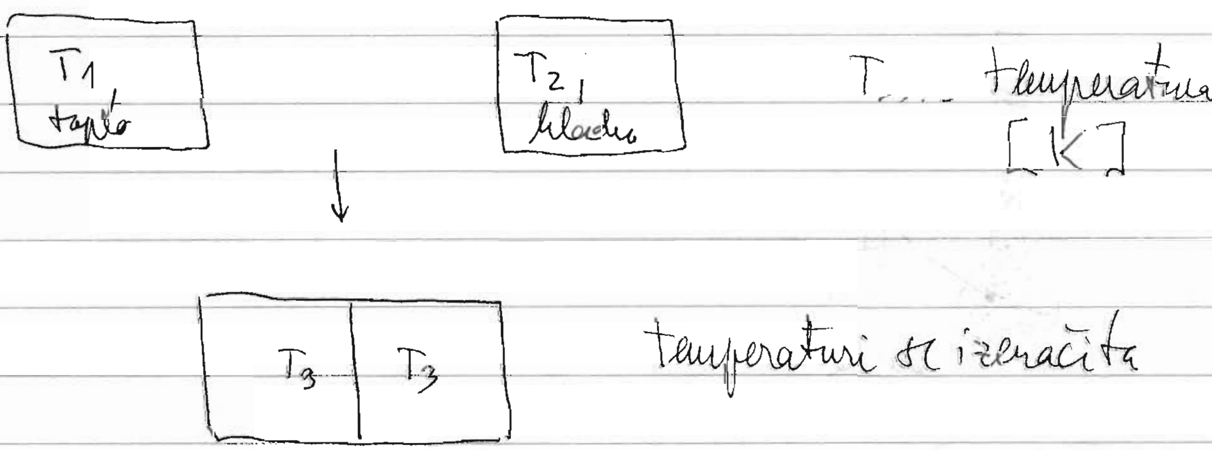


Z mehanskim mešanjem dovajamo mehansko energijo. Zaradi trenja se temperatura vode poviša!



z električnim grelcem dovajamo električno delo. Grelec se segreje in potem toploto oddajava(?) vodi. Temperatura vode se poviša.

b) Telo damo v stik z drugim telesom z drugačno temperaturo. Opazimo, da se čez čas temperaturi obeh teles izenačita.



Pravimo, da med telesi prehaja toplota: telo z višjo temperaturo oddaja toploto sistemu z nižjo temperaturo.

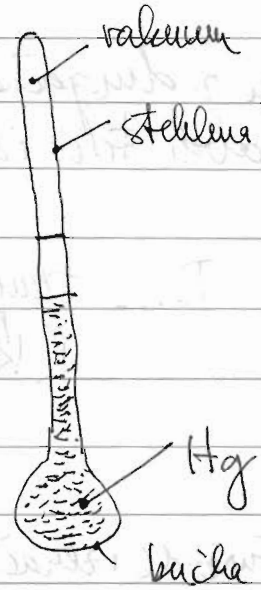
Temperaturo teles torej spreminjamo na dva načina:

- dovajamo ali odvzemamo delo A
- dovajamo ali odvzemamo toploto Q

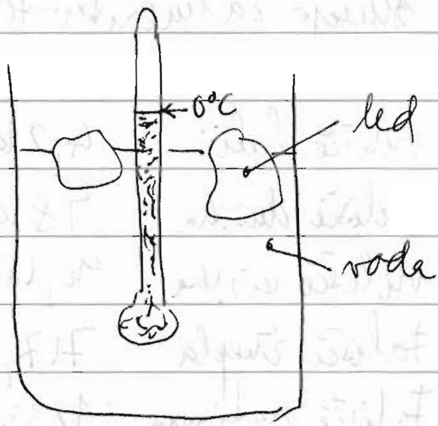
A ... delo [J]
Q ... toplota [J]
} obe imata mero za energijo!

Kako merimo temperaturo teles: s termometri. Termometer mora priti v toplotno ravnovesje s telesom, katerem merimo temperaturo.

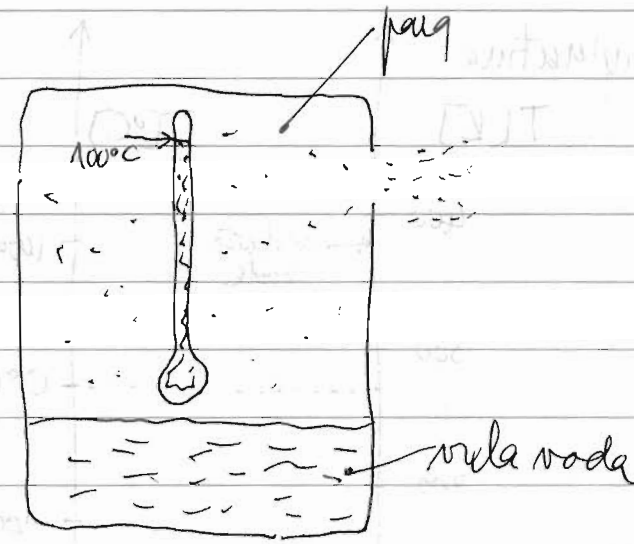
Termometri delujejo na principu spremembe določene lastnosti s spremenljivo temperaturo. Kot primer si oglejmo živosrebrni termometer:



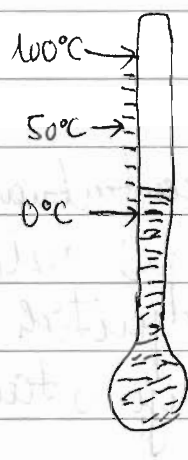
Če živo srebro segrejemo, se poveča volumen, zato se živo srebro povzpne v področje kapilare. Podaljšek živosrebrnega stolpca je sorazmeren s temperaturo. Vendar je potrebno vsak termometer umeriti, t.j. določiti skalo. To naredimo ponavadi pri dveh znanih (referenčnih) temperaturah. Za področje običajnih temperatur uporabljamo tališče ledu in vrelišče vode pri tlaku 1,01 bar (normalni zračni tlak) tališče ledu



0°C, označimo do koder sega stolpec

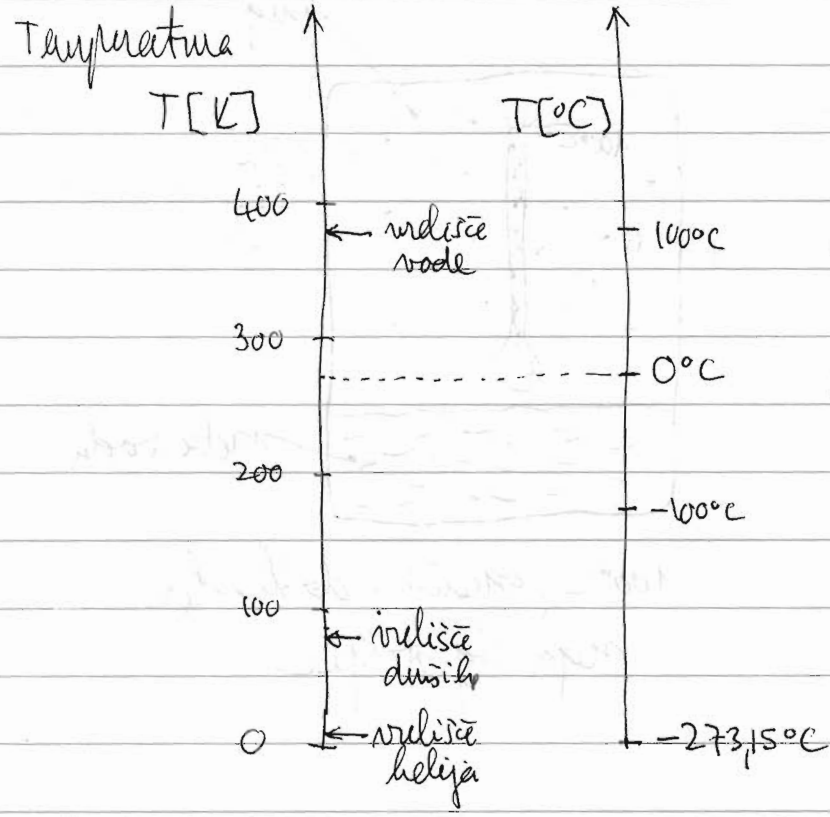


100°C, označimo do koder sega Hg stolpec



Dobimo umerjen termometer. Vmesne temperature določimo z linearno razdelitvijo dolžine kapilare med 0°C in 100°C

Dobimo Celzijevo temperaturno skalo. Obstaja še druga, fizikalna temperaturna skala, t.j. Kelvinova temperaturna skala. Ta skala je absolutna in ima ničlo pri ~~0K~~, T=0K

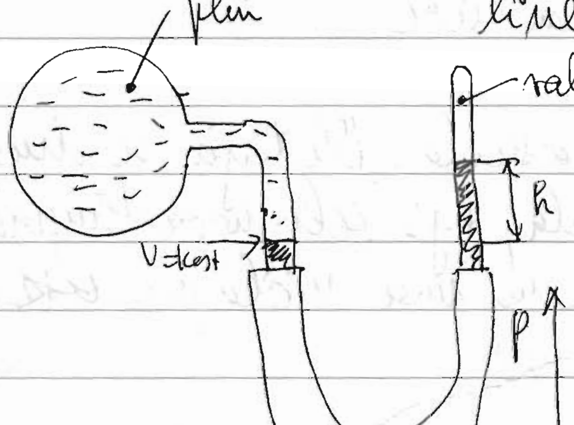


Temeljne temperature, ki služijo za umeritev termometra

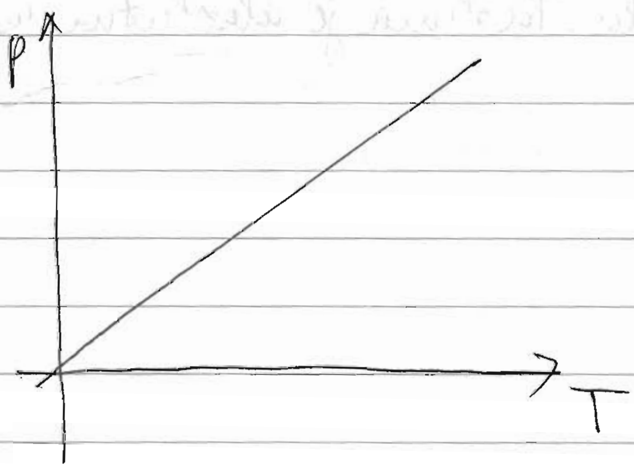
vrelišče helija	4,2 K
vrelišče dušika	78 K
vrelišče kisika	90,18 K
tališče žvepla	717,75 K
tališče antimona	1233,95 K
tališče zlata	1336,15 K

Vrste termometrov

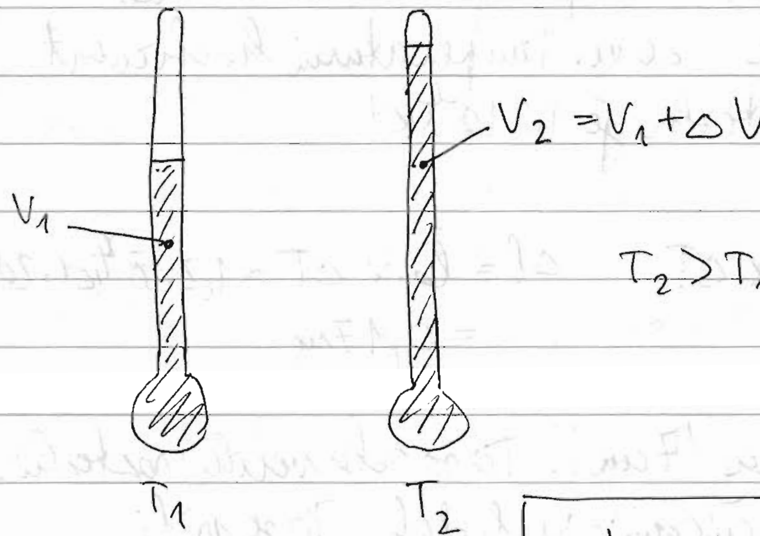
a) plinski termometer: plin držimo pri konstantnem volumnu in merimo pritisk pri različnih T. Ugotovimo, da se pritisk plina linearno povečuje s temperaturo



$\Rightarrow p = \rho \cdot g \cdot h$ tlak plina



b) živosrebrni ali alkoholni termometri



$T_2 > T_1$ volumen snovi se poveča s povečano temp.

Velja linearna zveza: $\boxed{\dfrac{\Delta V}{V_1} = \dfrac{V_2 - V_1}{V_1} = \beta \cdot \Delta T}$

Velikosti β:

glicerin $\beta = 4{,}9 \cdot 10^{-4}\ 1/K$

ž. srebro $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$

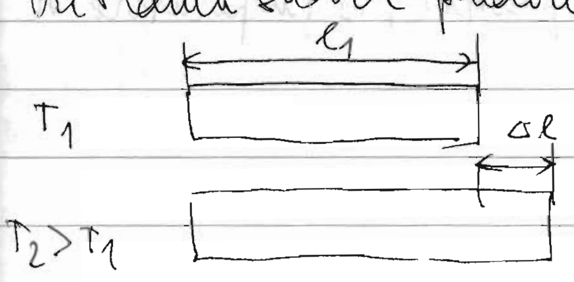
ΔV .... sprememba volumna

V_1 .... začetni volumen pri T_1

β ..... temperaturni koeficient prostorninskega raztezka

$\Delta T = T_2 - T_1$ sprememba temperature

Pri trdnih snoveh pa navadi navajamo dolžinski raztezek



$\boxed{\dfrac{\Delta l}{l_1} = \alpha \cdot \Delta T}$

Primeri:

aluminij $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$

steklo $\alpha = 0{,}8 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$

Δl .... sprememba dolžine

l_1 .... začetna dolžina

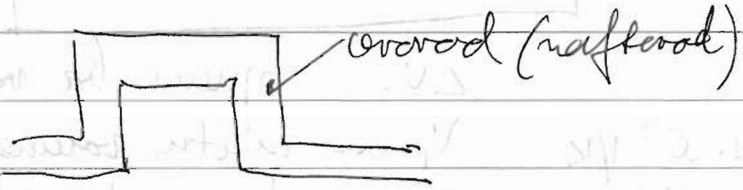
α .... temperaturni koef. dolžinskega raztezka.

Primer: Izračunaj za koliko se poveča dolžina železniške tračnice poleti na $+50°C$, če je dolžina tračnice pozimi na $-20°C$ $20m$. Temperaturni koeficient dolžinskega raztezka je $1{,}2\cdot10^{-4}K^{-1}$

$\alpha = 1{,}2\cdot10^{-4}K^{-1}$
$l_0 = 20m$
$\Delta l = ?$

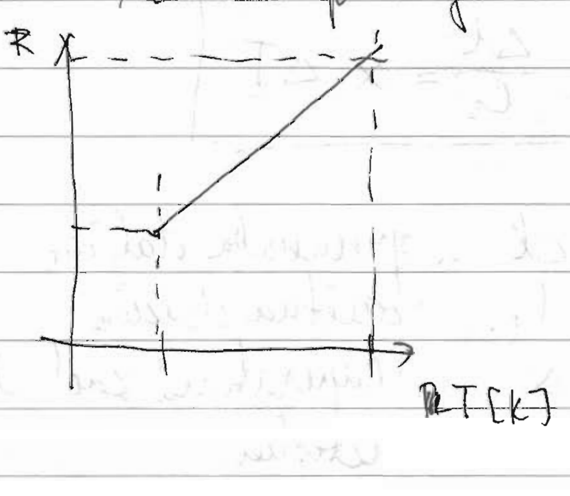
$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\cdot\Delta T \qquad \Delta l = l_0\cdot\alpha\cdot\Delta T = 1{,}2\cdot10^{-4}K^{-1}\cdot 20m\cdot 70K = 0{,}17m$$

Tračnica se podaljša za 17cm!! To so zelo veliki raztezki. Zato mora biti med tračnicami predelek. To se vidi tudi na cevovodih



Moderni termometri:

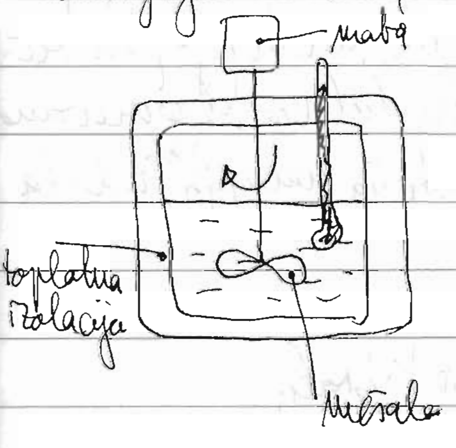
a) uporovni termometer: upor iz platine, s temperaturo se linearno poveča



5.2. Prvi zakon termodinamike

Notranja energija: spomnimo se poskusa s trki teles, ko smo poznali samo kinetično in potencialno energijo teles. Takrat smo rekli, da za neprožne trke ne velja energijski zakon v tisti obliki, kot smo ga poznali. Ugotovili smo, da se pri trku telesa deformirajo in zaradi tega segrejejo. Del energije se torej "porabi" za segrevanje teles. Trdimo, da se poveča notranja energija teles, ki se izrazi v spremembi temperature telesa.

Podobno zasledimo pri Joulovem poskusu. V toplotno izolirani posodi imamo določeno maso vode. Vodo mešamo z mehanskim mešalom in s tem dovajamo zunanje delo. Ker delo dovajamo, se spremeni (poviša) notranja energija telesa (vode).



Ugotovimo, da se voda segreje. Definiramo

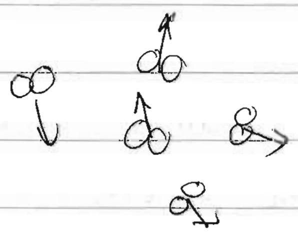
$$\boxed{W_n - W_n' = A}$$

W_n ... notranja energija telesa
A ... delo zunanjih sil

Sprememba notranje energije telesa se odrazi v spremembi temperature telesa. Ugotovimo da je notranja energija telesa enolično določena s temperaturo telesa in tlakom

$$\boxed{W_n(p,T) - W_n'(p',T') = A}$$

Kakšen pomen ima pojem notranja energija? Za razlago se je potrebno spustiti v svet atomov in molekul, iz katerih je sestavljena snov. Če imamo npr. plin, se molekule plina gibljejo v različnih smereh, vrtijo. Zaradi gibanja molekul imajo določeno kinetično energijo. Seštevek vseh kinetičnih energij plinskih molekul nam da notranjo energijo plina.

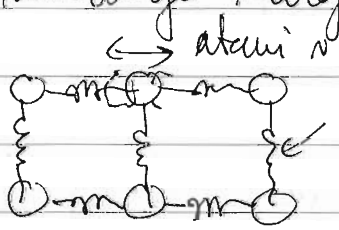


molekule imajo kinetično energijo zaradi gibanja in vrtenja

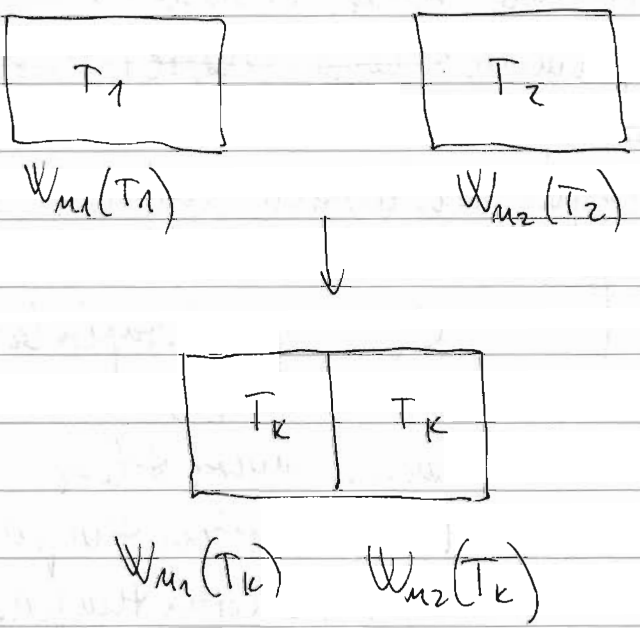
↓

to sestavlja notranjo energijo plina.

Kaj pa pri kristalih? Tudi tukaj atomi ne mirujejo, temveč nihajo okoli mirovne lege. Torej ~~imajo~~ jih lahko obravnavamo kot majhna nihala → kinetična in elastična energija vseh nihal sestavlja notranjo energijo kristala.



Toplota: če damo dve telesi z različnima temperaturama v toplotni stik (tesno se prilegata) se sčasoma toplejše telo ohladi, hladnejše telo pa segreje. To pomeni, da se notranja energija toplejšega telesa zmanjša, hladnejšega pa zveča. Pride torej do prenosa energije s toplejšega na hladnejše telo. Pravimo, da toplejše telo odda toploto hladnejšemu. Toploto označimo s Q.



Toplejše telo odda toploto: $W_{n1}(T_K) - W_{n1}(T_1) = -Q$

Hladnejše telo sprejme toploto: $W_{n2}(T_K) - W_{n2}(T_2) = Q$

Skupaj niti ne sprejmeta niti ne oddata toplote!
Zunanje delo in zunanja toplota oba spreminjata notranjo energijo teles:

$$\boxed{W_n - W_n' = A + Q}$$

Od tu pa dobimo prvi zakon termodinamike

$$\boxed{W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_n - W_n' = A + Q}$$

Sprememba polne energije telesa je enaka dovedenemu delu vseh zunanjih sil razen sile teže in dovedeni toploti.

Specifična toplota: dovedeno toploto izrazimo s spremembo temperature telesa. Razlikovati moramo dva primera: ~~če je telesu dovajamo toploto~~ pri

a) telesu dovajamo toploto pri konstantnem volumnu $V = konst$

$$\boxed{m \cdot c_v (T_2 - T_1) = Q}$$

c_v ... specif. toplota pri $V = konst$
m ... masa telesa
T_2 ... končna temperatura
T_1 ... začetna temperatura
Q ... dovedena/odv. toplota

b) telesu dovajamo toploto pri konstantnem tlaku $p = konst$

$$\boxed{m \cdot c_p (T_2 - T_1) = Q}$$

c_p ... spec. topl. pri $p = konst$

Specifični toploti c_p in c_v sta skoraj enaki pri trdni snovi, se pa razlikujeta pri plinih. Vedno $c_p > c_v$.
Voda $c_v = 4200\ J/kgK$ zelo velika vrednost, voda je dober shranjevalec toplote.

<u>Specifična talilna toplota</u>: taljenje: iz trdne snovi dobimo z dovajanjem toplote tekočino. Spremeni se torej agregatno stanje. Pri tem se temperatura ne spremeni.

Led, T=0°C $\longrightarrow$ Voda, 0°C

$q_T = 0{,}336\,MJ/kg$
spec. tal. toplota ledu pri 0°C

potrebna porabljena toplota je

$$\boxed{Q = m \cdot q_T}$$

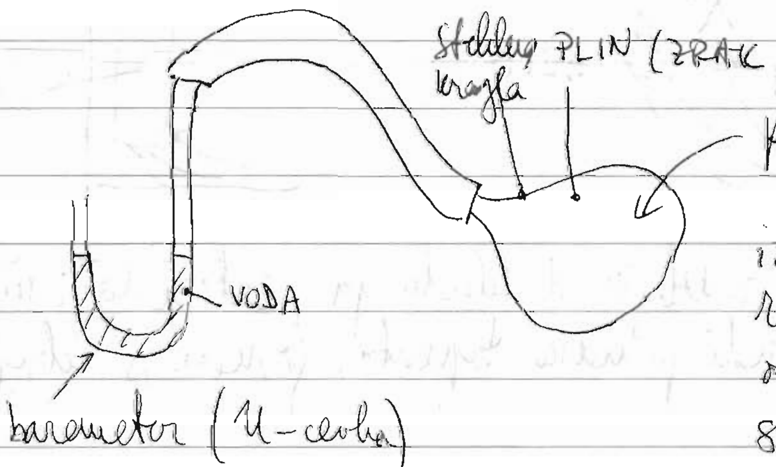
q_T ... specifična talilna toplota
m ... masa
Q ... dovedena toplota

Podobno je pri izparevanju, kjer imamo specifično izparilno toploto: Tu se ~~se~~ ~~spr~~ spremeni ~~iz~~ agregatno stanje iz tekočine v plin. Za to se porabi toplote.

$$\boxed{Q = m \cdot q_i}$$

Voda: 2,26 MJ/kg $= q_i$ pri 100°C

<u>Poskus</u>: izparevanje etra, izparilna toplota

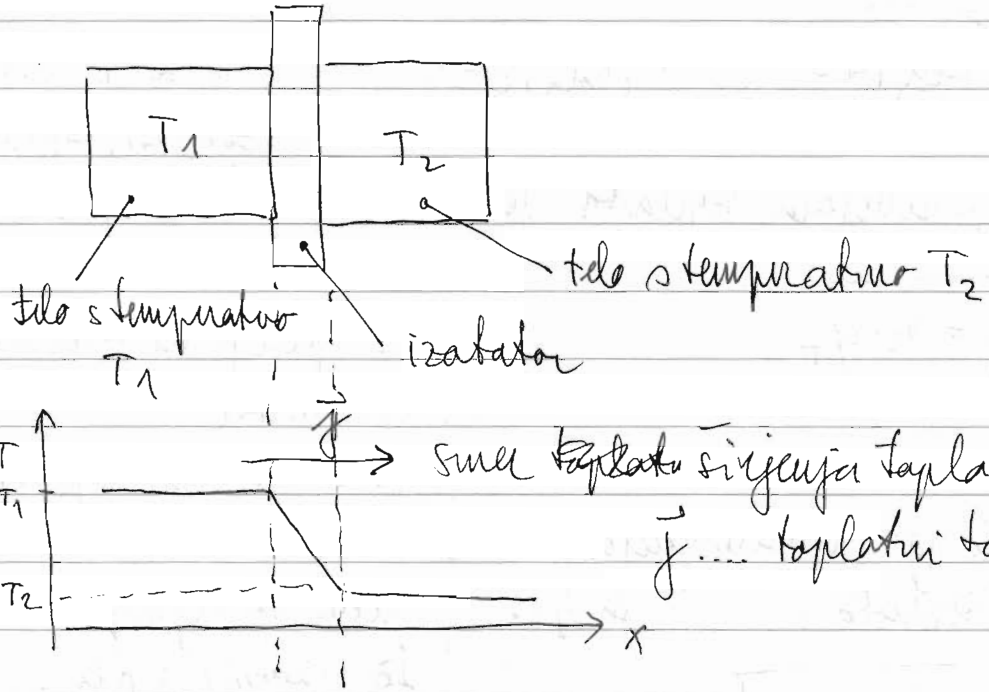


površino polijem z etrom. Ker eter izpareva za to rabi toploto. Kje jo odvzame? Od steklenega plina, ki se ohladi in skrči

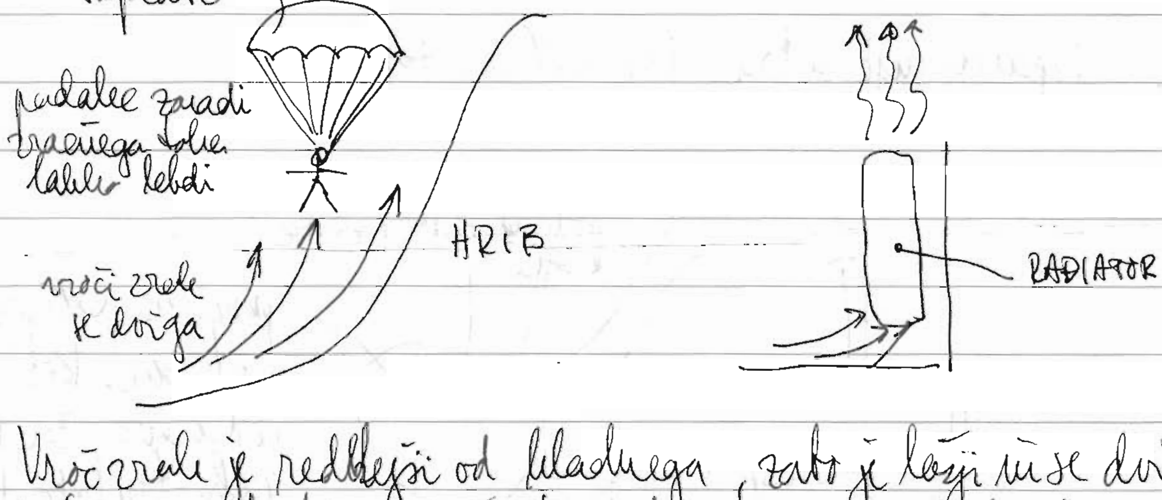
5.3. Razširjanje toplote

Toplota se razširja na tri načine:

a) s prevajanjem preko teles, ki so v termičnem stiku

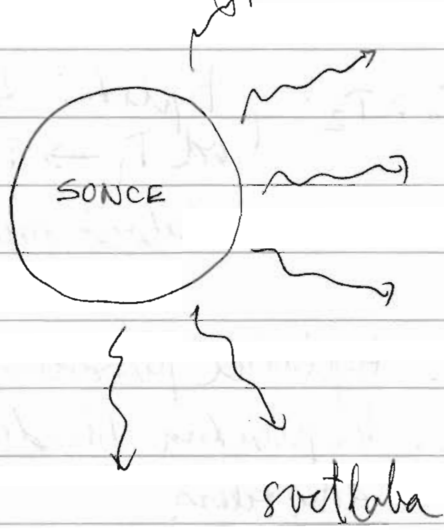


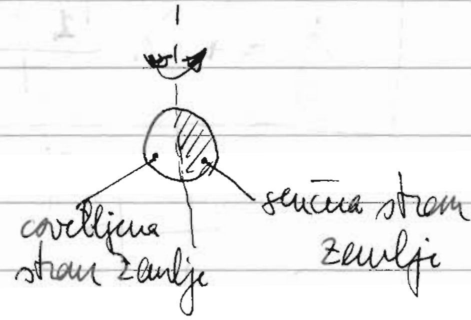
b) s konvekcijo (snov se fizično giblje in s tem prenaša toploto



Vroč zrak je redkejši od hladnega, zato je lažji in se dviga. S tem pa tudi prenaša toploto, jo nosi s seboj!

c) S sevanjem:

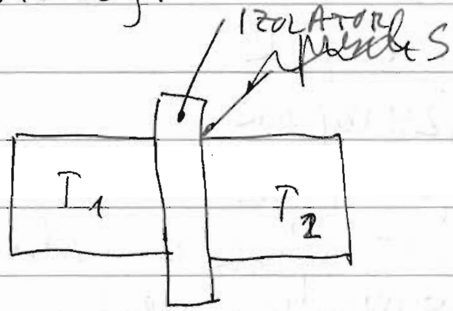




Zemlja se segreva zaradi toplote, ki jo dobiva od Sonca: svetloba torej predstavlja energijo, saj segreva telesa!!!

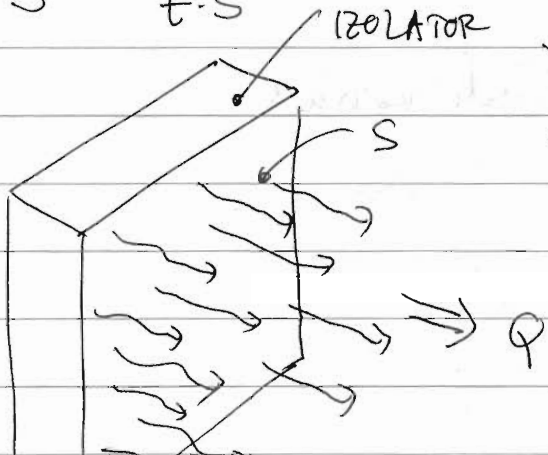
Obravnavali bomo samo prevajanje toplate preko teles, ki so v termičnem ravnovesju (stiku).

Toplotni tok:



$T_1 > T_2$

$$j = \frac{P}{S} = \frac{Q}{t \cdot S}$$



toplota teče od toplejšega dela (T_1) v hladnejši del (T_2). Vsako sekundo naj gre Q toplote

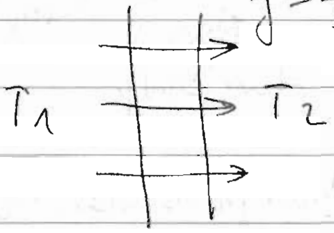
Moč: $P = \frac{Q}{t}$ to je količina toplote Q, ki gre vsako sekundo skozi izolator

Za prevajanje toplote velja

$$\boxed{j = +\lambda \frac{T_1 - T_2}{d}}$$ velikost

$T_1 > T_2$, toplotni tok teče od $T_1 \to T_2$. To določa smer toka.

$\vec{j} = \frac{P}{S}$



λ .... toplotna prevodnost

T_2 .... temperatura hladnejšega ~~tela~~ telesa

T_1 .... temperatura toplejšega telesa

d .... debelina izolacije

Vrednosti toplotne prevodnosti:

Baker: 390 W/mK

Stekl. volna 0,04 W/mK

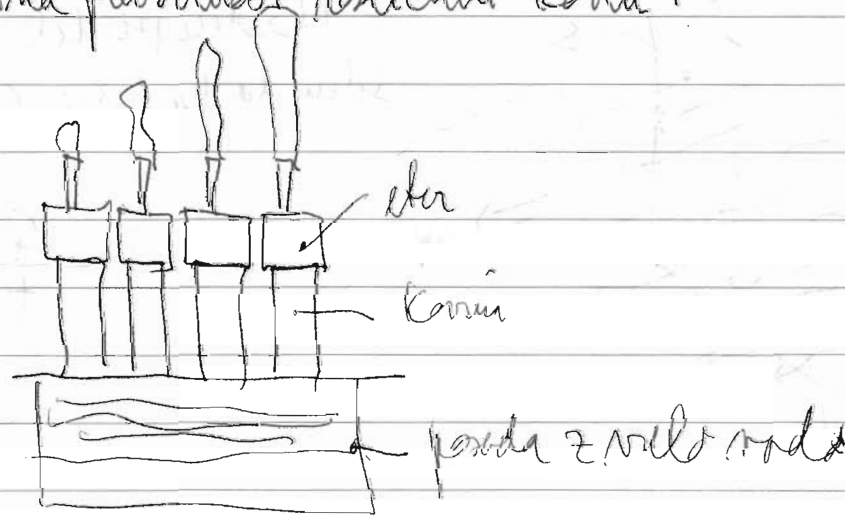
Beton 0,29 W/mK

Opeka 0,6 W/mK

Zrak 0,025 W/mK ← zelo dober izolator !!

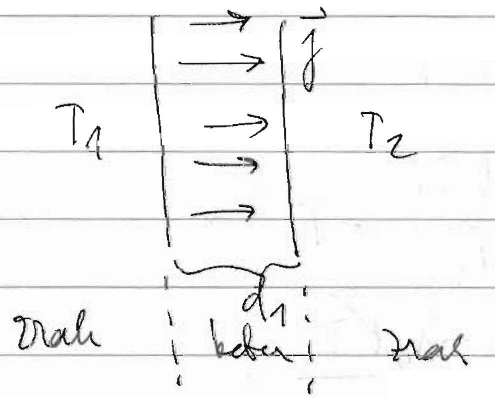
Voda 0,5 W/mK izolator

Poskus: toplotna prevodnost različnih kovin:



Zgled: Izračunaj za koliko odstotkov se zmanjša toplotni tok skozi 10 cm betonsko steno, če na zunanjo stran damo izolacijsko plast debeline 4 cm in s toplotno prevodnostjo 0,03 W/mK. Temperaturna razlika je 20 K, toplotna prevodnost betona je 0,29 W/mK.

Najprej izračunamo toplotni tok skozi betonsko steno.



$T_1 - T_2 = 20K$

$d_1 = 10\,cm$

$d_2 = 4\,cm$

$\lambda_1 = 0{,}29\,W/mK$

$\lambda_2 = 0{,}03\,W/mK$

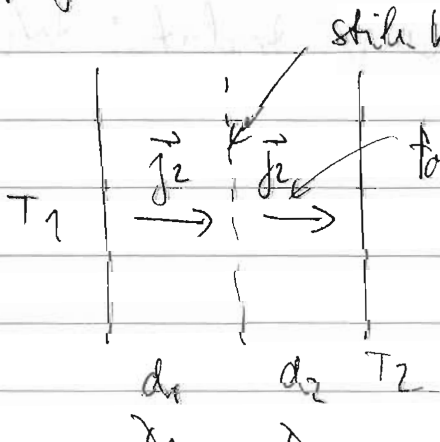
$$\frac{\Delta j}{j_1} = ? = \frac{j_1 - j_2}{j_1} = ?$$

$$j = \frac{P}{S} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}$$

$$j_1 = \lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{d} = \underline{\underline{58\,W/m^2}}$$

Kako pa je če dam dva izolatorja

stik bo na temperaturi T_S



toplotni tok je v obeh materialih enak!!

$$j_2 = \lambda_1 \frac{T_1 - T_s}{d_1} = \lambda_2 \cdot \frac{T_s - T_2}{d_2}$$

$$\lambda_1 d_2 (T_1 - T_s) = \lambda_2 d_1 (T_s - T_2)$$

$$\lambda_1 d_2 T_1 - \lambda_1 d_2 T_s = \lambda_2 d_1 T_s - \lambda_2 d_1 T_2$$

$$-T_s(\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1) = -\lambda_2 d_1 T_2 - \lambda_1 d_2 T_1$$

$$T_s = \frac{\lambda_2 d_1 T_2 + \lambda_1 d_2 T_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1}$$

$$j_2 = \frac{\lambda_2}{d_2}(T_s - T_2) = \frac{\lambda_2}{d_2}\left(\frac{\lambda_2 d_1 T_2 + \lambda_1 d_2 T_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} - T_2\right) =$$

$$= \frac{\lambda_2}{d_2} \cdot \frac{\cancel{\lambda_2 d_1 T_2} + \lambda_1 d_2 T_1 - \lambda_1 d_2 T_2 - \cancel{\lambda_2 d_1 T_2}}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} =$$

$$= \frac{\lambda_2}{\cancel{d_2}} \cdot \frac{\lambda_1 \cancel{d_2}(T_1 - T_2)}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1}(T_1 - T_2) = 12\,W/m$$

$j_1 = 58\,W/m^2$

$j_2 = 12\,W/m^2$

$$\frac{j_2 - j_1}{j_1} = \frac{12 - 58}{58} = -\underline{\underline{79\%}}\ !!$$

skoraj 5x manjši toplotni tok!!