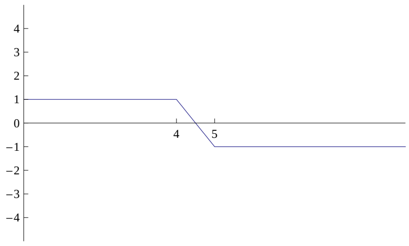
1. naloga

Poišči vse rešitve neenačbe

$$|x-5|-|x-4| \geqslant 0.$$

Rešitev: $x \leqslant \frac{9}{2}$.



Podrobno:

$$\begin{array}{lllll} \text{Za } x \leqslant 4 \text{ se neenačba glasi: } & 1 \geqslant 0. & \text{Rešitev: } x \in \mathbb{R}. & & \text{Presek: } x \leqslant 4. \\ \text{Za } 4 \leqslant x \leqslant 5 \text{ se neenačba glasi: } & 9-2x \geqslant 0. & \text{Rešitev: } x \leqslant \dfrac{9}{2}. & & \text{Presek: } 4 \leqslant x \leqslant \dfrac{9}{2}. \\ \text{Za } 5 \leqslant x \text{ se neenačba glasi: } & -1 \geqslant 0. & \text{Rešitev: } \emptyset. & & \text{Presek: } \emptyset. \end{array}$$

Končna rešitev je unija delnih rešitev: $(-\infty, 4] \cup [4, \frac{9}{2}] = (-\infty, \frac{9}{2}]$.

2. naloga

a. Poišči kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

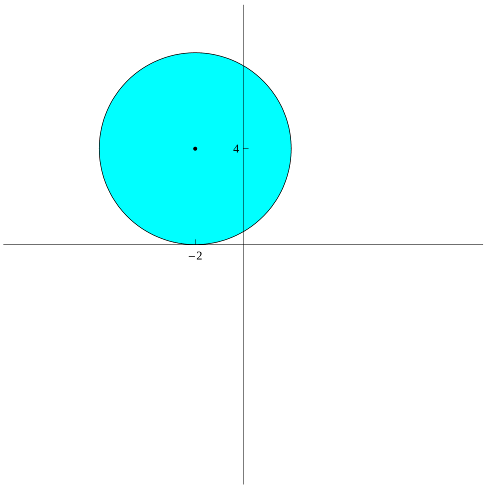
$$\frac{1}{z-2}+\frac{2+i}{1+i}=2.$$

Rešitev: Računajmo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2}+\frac{2+i}{1+i} &= 2 \\ \frac{1}{z-2} &= 2-\frac{2+i}{1+i} \\ z-2 &= \frac{1}{2-\frac{2+i}{1+i}} \\ z-2 &= \frac{1+i}{2+2i-(2+i)} \\ z-2 &= \frac{1+i}{i} = -i+1 \\ z &= 3-i. \end{aligned}$$

b. V ravnini predstavi množico kompleksnih števil

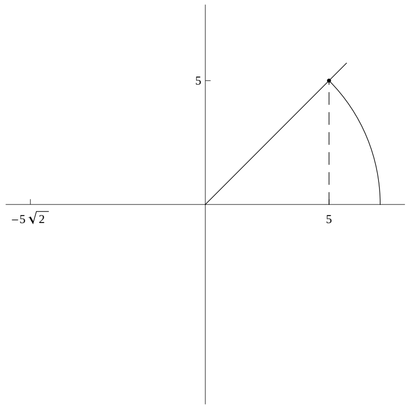
$$\{z\,;\, |z+2-4i\,| \leqslant 4\}\,.$$



3. NALOGA

Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$(z-2+i)^3 = 5+5i.$$



Rešitev: Polarni zapis desne strani: $w = 5+5i = 5\sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\Big)$.

Prva rešitev za $\sqrt{w}$ je $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{\frac{\pi}{4}}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{4}}{3})\Big) = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\Big)$.

Druga rešitev: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3})\Big) = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\Big)$.

Tretja rešitev: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3})\Big) = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12})\Big)$.

Tako se rešitve enačbe glasijo:

$$z_0 = 2-i+\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\Big),$$
$$z_1 = 2-i+\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\Big),$$
$$z_2 = 2-i+\sqrt[3]{5\sqrt{2}}\Big(\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12})\Big).$$

4. NALOGA

Dana je premica p:

$$x = -1+t, \quad y = -2t, \quad z = -4-3t.$$

a. Ugotovi, ali točki $(0,-2,-7)$ in $(0,-2,-3)$ ležita na premici p.
b. Izračunaj projekcijo točke $(-1,-5,-3)$ na premico p.
c. Zapiši enačbo vzporednice k p, ki gre skozi točko $(0,0,0)$.

Rešitev:

a. Podajmo premico p kanonično:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-3}.$$

Za $x = 0$,$y = -2$, $z = -7$ gornji enakosti veljata, torej leži $(0,-2,-7)$ na premici. Za $x = 0$,$y = -2$, $z = -3$ pa enakosti ne veljata, torej točka $(0,-2,-3)$ ne leži na premici.

b. Označimo $\vec{r}_0 = (-1,0,-4)$ in $\vec{x} = (-1,-5,-3)$. Naj bo $\vec{x}'$ vektor, katerega krajišče je v projekciji točke $(-1,-5,-3)$ na premico. Vemo, da velja $\vec{x}' = \vec{r}_0 + \vec{y}$, kjer je $\vec{y}$ projekcija vektorja $\vec{x} - \vec{r}_0 = (0,-5,1)$ na smerni vektor premice p, torej na vektor $\vec{s} = (1,-2,-3)$. To pomeni

$$\vec{y} = \frac{1}{|\vec{s}|^2}\Big((\vec{x}-\vec{r}_0)\cdot\vec{s}\Big)\vec{s} = \frac{1}{14}\cdot 7\cdot(1,-2,-3).$$

Končno

$$\vec{x}' = \vec{r}_0 + \vec{y} = (-1,0,-4) + \frac{1}{2}(1,-2,-3) = (-\frac{1}{2},-1,-\frac{11}{2}).$$

c. Iskana vzporednica je:

$$x = t, \quad y = -2t, \quad z = -3t.$$