1.

a. Izračunaj vse realne rešitve neenačbe $|2x-3|<5$.

REŠITEV: $\boxed{x \in (\frac{3}{2}-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}+\frac{5}{2}) = (-1, 4)}$

Pomožni računi:

Vemo: $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & 2x-3 \geqslant 0, \\ -(2x-3), & 2x-3 \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-3, & x \geqslant \frac{3}{2}, \\ -(2x-3), & x \leqslant \frac{3}{2}. \end{cases}$

$x \geqslant \frac{3}{2}$	$x \leqslant \frac{3}{2}$
Enačba se glasi: $2x-3<5$ To pomeni: $x < \frac{3}{2}+\frac{5}{2} = 4$	Enačba se glasi: $-(2x-3)<5$ To pomeni: $x > \frac{3}{2}-\frac{5}{2} = -1$
Delna rešitev: $x \in [\frac{3}{2}, 4)$.	Delna rešitev: $x \in (-1, \frac{3}{2}]$.

b. Skiciraj graf funkcije $f(x) = |x-7| + |x+3|$.

REŠITEV:

Pomožni računi:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4, & \text{če } x \leqslant -3, \\ 10, & \text{če } -3 \leqslant x \leqslant 7, \\ 2x-4, & \text{če } 7 \leqslant x. \end{cases}$$

2.

a. Izračunaj realno in imaginarno komponento števila $\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+3i}\right)^{176}$.

REALNA KOMPONENTA: $\cos\left(176\cdot\dfrac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(58\cdot 4\pi+\dfrac{8\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{8\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

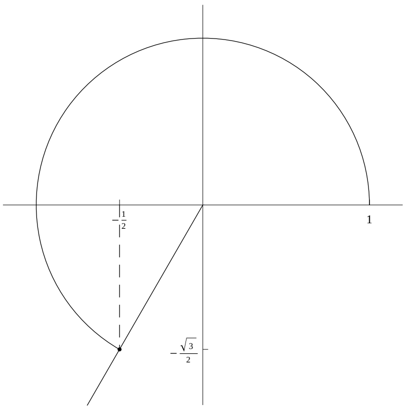
IMAGINARNA KOMPONENTA: $\sin\left(176\cdot\dfrac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(58\cdot 4\pi+\dfrac{8\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{8\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Pomožni računi:

Najprej okrajšamo in potem po postopku za deljenje delimo:

$$\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+3i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{(1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Za uporabo de Moivrove formule število $w=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ zapišemo v polarni obliki.



Kot običajno si pomagamo s skico (glej levo). Kompleksno število w, ki ga potenciramo, je v 3. kvadrantu, zato za pripadajoči polarni kot φ velja

$$\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}.$$

Dalje $|w|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{1}=1$, torej se polarni zapis števila w glasi:

$$\boxed{w=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right).}$$

Po de Moivrovi formuli velja $w^{176}=\cos\left(176\cdot\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(176\cdot\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Za popoln izračun delimo $176=3\cdot 58+2$, kar vstavimo, da dobimo

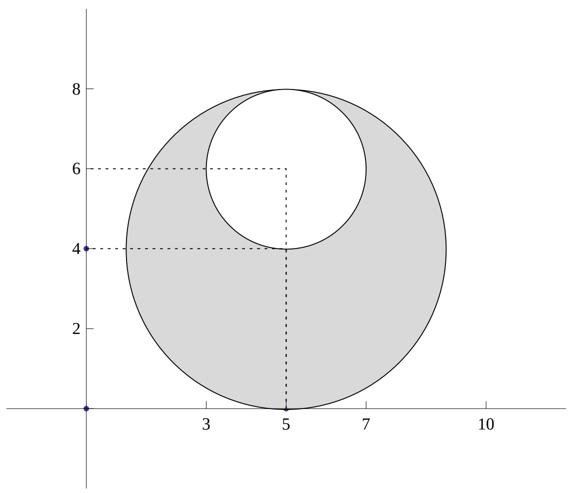
$$w^{176}=\cos\left((3\cdot 58+2)\cdot\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left((3\cdot 58+2)\cdot\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(58\cdot 4\pi+\frac{8\pi}{3}\right)+i\sin\left(58\cdot 4\pi+\frac{8\pi}{3}\right).$$

Zaradi periodičnosti kotnih funkcij je slednji izraz enak izrazu

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

b. V ravnini predstavi množico kompleksnih števil $\{z\,;\,|z-5-4i\,|\leqslant 4,\ |z-5-6i\,|\geqslant 2\}$.

Gre za tista kompleksna števila, ki so od $5+4i$ oddaljena za kvečjemu 4, od $5+6i$ pa vsaj za 2.
Glej skico na desni.



3.

Izračunaj vse kompleksne rešitve enačbe

$$(z + 12 - 8i)^3 - 14 = 0.$$

REŠITVE:

$$z_0 = -12 + 8i + \sqrt[3]{14} \cdot 1,$$
$$z_1 = -12 + 8i + \sqrt[3]{14} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right),$$
$$z_2 = -12 + 8i + \sqrt[3]{14} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

Pomožni računi:

Enačbo preuredimo kot $(z + 12 - 8i)^3 = 14$.
Vidimo, da mora biti število $z + 12 - 8i$ enako enemu od treh različnih tretjih korenov kompleksnega števila

$$14 = 14\Big(\cos(0) + i \sin(0)\Big).$$

Takoj napišemo:

$$z + 12 - 8i = \sqrt[3]{14}\left(\cos\left(\frac{0+0}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+0}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{14}\Big(\cos\big(0\big) + i \sin\big(0\big)\Big),$$
$$z + 12 - 8i = \sqrt[3]{14}\left(\cos\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{14}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$
$$z + 12 - 8i = \sqrt[3]{14}\left(\cos\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0+4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{14}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

4.

Podana sta vektorja $\vec{a} = (-3, 1, 1)$, $\vec{b} = (-4, -2, 3)$.

a. Zapiši vektorsko enačbo (parametrizacijo) premice P, ki poteka skozi krajišči vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
Zapiši točko na premici, ki pripada parametru „t"= 4.

Premica P: $\boxed{\vec{r}_t^P = (-3, 1, 1) + t \cdot (-1, -3, 2).}$

Točka, ki pripada „t"= 4: $\boxed{(-7, -11, 9).}$

b. Naj bo premica Q podana s parametrizacijo

$$\vec{r}_t^Q = (4, 2, -17) + t \cdot (-1, 2, 3).$$

Ali se premici P in Q sekata? Če se, izračunaj, v kateri točki.

Premici P in Q se sekata (DA ali NE): $\boxed{\text{DA, in sicer v (0,10,-5).}}$

Pomožni računi:

Vprašanje presečišča je vprašanje rešljivosti (in rešitve) sistema enačb:

$$\begin{aligned} -3 - t = 4 - s \quad &\Longleftrightarrow \quad -t + s = 7, \\ 1 - 3t = 2 + 2s \quad &\Longleftrightarrow \quad -3t - 2s = 1, \\ 1 + 2t = -17 + 3s \quad &\Longleftrightarrow \quad 2t - 3s = -18. \end{aligned}$$

Rešitev prvih dveh enačb je par $t = -3$, $s = 4$. Ko to rešitev vstavimo v tretjo enačbo, vidimo, da par $t = -3$, $s = 4$ zadošča tudi tretji enačbi.