2. kolokvij iz Matematike za študente FKKT-VSŠ z dne 29.2.2008: vzorec nalog z rešitvami

1. naloga

Izračunaj:

$$2\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \ldots &= \left(2\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. naloga

Poišči vse rešitve sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_5 + 3x_6 &= -4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 13x_5 + 6x_6 &= -14, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 10x_5 + 6x_6 &= -8, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 4x_6 &= -16. \end{aligned}$$

Rešitev:

① Razširjena matrika sistema se glasi:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 5 & 4 & 13 & 6 & -14 \\ 2 & -4 & 4 & 0 & 10 & 6 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & 8 & 11 & 4 & -16 \end{array}\right]$$

② Prva faza eliminacije: eliminiramo elemente v stolpcu pod označenim elementom. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 6 & 1 & -12 \end{array}\right]$$

③ Druga faza eliminacije: eliminiramo elemente v stolpcu pod označenim elementom. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right]$$

④ Potrebna je zamenjava vrstice: vrstico 3 zamenjamo z vrstico 4.
Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zgornja matrika je že v stopničasti obliki.

⑤ Rang (razširjene) matrike sistema je 3, pripadajoče število parametrov je 3.
Parametri: x_2, x_4, x_5
Popolna rešitev se glasi:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + 8x_4 + x_5 + 8, \\ x_3 &= -4x_4 - 3x_5 - 6, \\ x_6 &= 0. \end{aligned}}$$

3. naloga

Izračunaj limiti:

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-5}{n+3}-\frac{3n+3}{n-7}\right)$

Rešitev:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\frac{6n-5}{n+3}-\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n-7}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}}{1-\frac{7}{n}}\\
&= 6-3=3.
\end{aligned}$$

b. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n-2}{n^2+2n+15}\right)^{n+1}$

Rešitev:

Preoblikujmo:

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n^2-5n-2}{n^2+2n+15}\right)^{n+1}\\
&= \left(1+\frac{-7n-17}{n^2+2n+15}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n+15}{-7n-17}}\right)^{n+1}\\
&= \left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n+15}{-7n-17}}\right)^{\frac{n^2+2n+15}{-7n-17}\frac{-7n-17}{n^2+2n+15}(n+1)}\\
&= \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n+15}{-7n-17}}\right)^{\frac{n^2+2n+15}{-7n-17}}\right)^{-\frac{(7n+17)(n+1)}{n^2+2n+15}}
\end{aligned}$$

Velja torej:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n-2}{n^2+2n+15}\right)^{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty}-\frac{(7n+17)(n+1)}{n^2+2n+15}}.$$

Ker je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}-\frac{(7n+17)(n+1)}{n^2+2n+15} &= \lim_{n\to\infty}-\frac{(7+\frac{17}{n})(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2}}\\
&= -\frac{7+0}{1+0+0}=-7,
\end{aligned}$$

je končno: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n-2}{n^2+2n+15}\right)^{n+1}=e^{-7}$.

4. naloga

a. Ugotovi, kakšna je vrsta:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}+\frac{8}{5\sqrt{5}}+\frac{16}{25}+\dots$$

Ali je konvergentna ali ne?
(Odgovor utemelji.)

Rešitev: Vrsta je geometrična s koeficientom $q=+\frac{2}{\sqrt{5}}$.
Ker je $|q|<1$, je vrsta konvergentna.

b. S pomočjo korenskega kriterija obravnavaj konvergenco vrste:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{16n^2+7n+5}-4n\right)^n$$

Pišimo $a_n=\left(\sqrt{16n^2+7n+5}-4n\right)^n$.
Obravnavamo konvergenco zaporedja

$$p_n=\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt{16n^2+7n+5}-4n.$$

Preoblikujmo:

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{(16n^2+7n+5)-(4n)^2}{\sqrt{16n^2+7n+5}+4n}\\
&= \frac{7n+5}{\sqrt{16n^2+7n+5}+4n}\\
&= \frac{7+\frac{5}{n}}{\frac{\sqrt{16n^2+7n+5}}{n}+4}\\
&= \frac{7+\frac{5}{n}}{\sqrt{16+\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}}+4}.
\end{aligned}$$

Velja:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{7}{4+4}=\frac{7}{8}.$$

Ker je $\frac{7}{8}<1$, je vrsta konvergentna.