Matematika - KT: rešitev 2. kolokvija z dne 2.2.2009

1. naloga Podana je ravnina

$$\Sigma : \qquad -x - 5y + 3z = 16.$$

a. Izračunaj presečišče ravnine Σ s premico P, ki je podana parametrično

$$\vec{r}_P(t) = (4, 2, 1) + t(2, 2, -1).$$

Rešitev: Koordinate točke na premici $(x, y, z) = (4 + 2t, 2 + 2t, 1 - t)$ vstavimo v enačbo ravnine in dobimo $\boxed{t = -\frac{9}{5},}$ kar pomeni, da je iskana točka $\boxed{(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{14}{5}).}$

b. Izračunaj pravokotno projekcijo točke $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ na ravnino Σ.

Rešitev: Iskana točka leži na premici, ki vsebuje točko $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{7}{2})$, za smerni vektor pa ima normalo ravnine $(-1, -5, 3)$. Zato nastavimo

$$(x, y, z) = (\tfrac{7}{2}, \tfrac{9}{2}, -\tfrac{7}{2}) + t \cdot (-1, -5, 3) = (\tfrac{7}{2} - t, \tfrac{9}{2} - 5t, -\tfrac{7}{2} + 3t).$$

Vstavimo v enačbo ravnine in dobimo $\boxed{t = \frac{3}{2},}$ kar pomeni, da je iskana točka $\boxed{(2, -3, 1).}$

2. naloga Izračunaj vse rešitve sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_5 + 4x_6 &= -3,\\
2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 10x_5 + 12x_6 &= -8,\\
2x_1 - 5x_2 - 4x_4 + 10x_5 + 24x_6 &= -8,\\
x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 6x_5 - 3x_6 &= -5.
\end{aligned}$$

Zapiši tudi rang matrike ter rang razširjene matrike sistema in število parametrov.

Rešitev:

① Razširjena matrika sistema se glasi:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
\boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 4 & 4 & -3\\
2 & -4 & 4 & 0 & 10 & 12 & -8\\
2 & -5 & 0 & -4 & 10 & 24 & -8\\
1 & -1 & 6 & 4 & 6 & -3 & -5
\end{array}\right]$$

② Prva faza eliminacije: eliminiramo elemente v stolpcu pod označenim elementom. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & -2 & 2 & 0 & 4 & 4 & -3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2\\
0 & \boxed{-1} & -4 & -4 & 2 & 16 & -2\\
0 & 1 & 4 & 4 & 2 & -7 & -2
\end{array}\right]$$

③ Potrebna je zamenjava vrstice: vrstico 2 zamenjamo z vrstico 3. Dobljeno množimo z -1. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & -2 & 2 & 0 & 4 & 4 & -3\\
0 & \boxed{1} & 4 & 4 & -2 & -16 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2\\
0 & 1 & 4 & 4 & 2 & -7 & -2
\end{array}\right]$$

④ Druga faza eliminacije: eliminiramo elemente v stolpcu pod označenim elementom. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & -2 & 2 & 0 & 4 & 4 & -3\\
0 & 1 & 4 & 4 & -2 & -16 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & -4
\end{array}\right]$$

⑤ Izvedemo zadnjo fazo eliminacije. Rezultat je matrika v stopničasti obliki:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & -2 & 2 & 0 & 4 & 4 & -3\\
0 & 1 & 4 & 4 & -2 & -16 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

⑥ Rang (razširjene) matrike sistema je 4, pripadajoče število parametrov je 2.
Parametra: x_3, x_4
Popolna rešitev se glasi:

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1 &= -10x_3 - 8x_4 + 1,\\
x_2 &= -4x_3 - 4x_4,\\
x_5 &= -1,\\
x_6 &= 0.
\end{aligned}}$$

3. naloga

a. Izračunaj:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 4 & 3\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 3\\4 & 0 & 0\end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\5 & 1 & -1\\4 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\12 & 4 & 12\\-1 & 3 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6 & -3\\15 & 3 & -3\\12 & 12 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\-3 & 1 & 15\\-13 & -9 & -12\end{bmatrix}$$

b. Reši matrično enačbo:

$$2\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}\cdot X-\begin{bmatrix}7 & 1\\6 & -3\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}3 & 7\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

Rešitev: Poenostavimo:

$$\left(2\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 1\\6 & -3\end{bmatrix}\right)\cdot X=\begin{bmatrix}3 & 7\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}3 & 7\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

Dobimo $X=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}3 & 7\\-1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 7\\-1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{bmatrix}.$

4. naloga Izračunaj limiti:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-5}{n+2}-\dfrac{2n+2}{n-5}\right)$

Rešitev $= 5 - 2 = 3.$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^4+2n^2+5}-\sqrt{3n^4-2n^2+7}\right)$

Rešitev

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^4+2n^2+5}-\sqrt{3n^4-2n^2+7}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+2n^2+5-(3n^4-2n^2+7)}{\sqrt{3n^4+2n^2+5}+\sqrt{3n^4-2n^2+7}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2}{\sqrt{3n^4+2n^2+5}+\sqrt{3n^4-2n^2+7}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}.$$