

1. NALOGA

Podani sta premici

$$p: \quad \vec{r}_p(t) = (3, 1, 1) + t(2, -1, -1)$$

$$q: \quad \vec{r}_q(t) = (1, -1, 1) + t(3, -3, 1)$$

in točka $T(1, -9, -3)$. Izračunaj enačbo ravnine Σ , ki je vzporedna premicama p in q in ki vsebuje točko T . (20 točk)

REŠITEV:

$$4x + 5y + 3z = -50$$

Podrobnosti:

Če je ravnina Σ vzporedna premicama p in q , je njena normala vzporedna vektorskemu produktu smernih vektorjev $(2, -1, -1) \times (3, -3, 1) = (-4, -5, -3)$. V enačbo $-4x - 5y - 3z = d$ moramo vstaviti le še koordinate točke T , torej $(x, y, z) = (1, -9, -3)$. Rešitev sledi.

2. NALOGA

Poišči vse rešitve sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_5 + 3x_6 &= -3, \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 10x_5 + 9x_6 &= -8, \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4 + 6x_5 + 6x_6 &= -3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 + 10x_6 &= -10. \end{aligned}$$

Rešitev:

① Razširjena matrika sistema se glasi:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & -3 & 2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

② Prva faza eliminacije: eliminiramo elemente v stolpcu pod označenim elementom. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

③ Druga faza eliminacije: eliminiramo elemente v stolpcu pod označenim elementom. Dobimo:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Zgornja matrika je že v stopničasti obliki.

④ Rang (razširjene) matrike sistema je 4, pripadajoče število parametrov je 2.

Parametra: x_2, x_3

Popolna rešitev se glasi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 - 2x_3 + 1, \\ x_4 &= -1, \\ x_5 &= -1, \\ x_6 &= 0. \end{aligned}$$

3. NALOGA

a. (10 točk) Podane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunaj $A B - 2 C$.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 0 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

b. (20 točk) Reši matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -23 & -34 \\ -19 & -28 \end{bmatrix}$$

Podrobnosti:

Matrični račun se glasi:

$$A B - 2 C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \\ -4 & -7 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 0 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

Enačbo

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

preuredimo in dobimo enačbo

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Enačbo (*) na obeh straneh pomnožimo (z leve) z matriko $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$ in dobimo končno rešitev.