FUNKCIJE, ODVOD, TAYLORJEVA VRSTA, INTEGRAL IN KRIVULJE

D: **FUNKCIJA** $f: D \to R$ je predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi točno določen element $f(x) \in R$.

D: $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)); x \in D\}$

D: **ZALOGA VREDNOSTI** funkcija f je $R_f = \{f(x); x \in D\}$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **SURJEKTIVNA**, če je $R_f = R$, se pravi če je vsak $y \in R$ slika kakega $x \in D$. Vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije f. Funkcija $f: D \to A \subseteq R$ je surjektivna, če je $\forall f(x) \in A$ slika vsaj enega $x \in D$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **INJEKTIVNA**, če velja: $x_1, x_2 \in D; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Če $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije f kvečjemu enkrat. Funkcija $f: D \to A \subseteq R$ je injektivna, če je $\forall f(x) \in A$ slika kvečjemu enega $x \in D$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **BIJEKTIVNA**, če je injektivna in surjektivna.

D: **KOMPOZITUM** $g \circ f$ je definiran kot $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ni komutativen, je pa asociativen.

D: **IDENTIČNA PRESLIKAVA (IDENTITETA)** na množici D vsak x preslika samega vase. $i_D(x) = x$

D: **KONSTANTNA PRESLIKAVA** je: $f(x) = \alpha \in R; \forall x \in D$.

D: **INVERZNA PRESLIKAVA** injektivne funkcije f, f^{-1}, je definirana kot $f^{-1}: A \to D$. $\forall y \in A$ preslika v tisti $x \in D$, ki ga f preslika v y. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

D: Funkcija f je **(NAVZGOR, NAVZDOL) OMEJENA**, če je taka njena zaloga vrednosti.

¤ f je **NAVZGOR OMEJENA** $\Leftrightarrow \exists M \in R : f(x) \leq M, \forall x \in D$

¤ f je **NAVZDOL OMEJENA** $\Leftrightarrow \exists m \in R : f(x) \geq m, \forall x \in D$

¤ f je **OMEJENA**, če je omejena navzgor in navzdol.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **(STROGO) NARAŠČAJOČA**, če $x_1, x_2 \in D; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq (<) f(x_2)$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **(STROGO) PADAJOČA**, če $x_1, x_2 \in D; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq (>) f(x_2)$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **SODA / LIHA**, če je za $\forall x \in D$ tudi $-x \in D$ in je $f(-x) = f(x)$ / $f(-x) = -f(x)$. Funkcija f je soda, če je njen graf simetričen glede na os y. Funkcija f je liha, če je njen graf simetričen glede na koordinatno izhodišče.

D: $f: D \to R$; $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

T: Vsota, razlika, produkt in kvocient dveh sodih funkcij ter produkt in kvocient dveh lihih funkcij je soda funkcija. Vsota in razlika dveh lihih funkcij je liha funkcija.

D: $\alpha \in R$ je **NIČLA** funkcije f, če je $f(\alpha) = 0$. V tej točki seka graf funkcije f os x.

D: V $\alpha \in R$ je **POL** funkcije f, če je $\lim_{x \to \alpha} |f(x)| = \infty$. $(\forall M \in R)(\exists \delta > 0)(|x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$

D: $f: D \to R$, $a \in D$. Funkcija f je **ZVEZNA V TOČKI a**, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Funkcija f je **ZVEZNA**, če je zvezna za vsak $a \in D$ ($(\forall \varepsilon > 0)(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$).

T: Funkcija $f: D \to R$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko takrat, ko za vsako zaporedje $(x_n) \subseteq D$, ki konvergira proti a, konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti f(a).

T: Vsota, razlika in produkt zveznih funkcij so zvezne funkcije. Kvocient dveh zveznih funkcij je zvezen v točkah a, kjer $g(a) \neq 0$. Kompozitum dveh zveznih funkcij je zvezna funkcija.

T: I, J sta intervala, $f : I \to J$ je zvezna bijekcija. Potem je f strogo monotona (strogo naraščajoča ali strogo padajoča), njena inverzna funkcija pa je tudi zvezna in strogo monotona.

D: $b = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$.

ASIMPTOTE:

<u>vodoravna</u>: $y = b; b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

<u>navpična</u>: $x = a; \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

<u>poševna</u>: $y = kx + n; \lim_{x \to \pm\infty} [kx + n - f(x)] = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$

T: Naj bo $f : [a, b] \to R$ zvezna, a<b, $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Potem $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$. (**METODA BISEKCIJE)**

T: Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu omejena.

T: $f : [a, b] \to R$, zvezna, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. Potem $\exists x_M \in [a, b] : f(x_M) = M$ in $\exists x_m \in [a, b] : f(x_m) = m$, da za $(\forall c \in [m, M])(\exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c)$.

T: Če je $f : [a, b] \to R$ injektivna zvezna funkcija, potem je f bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča; če $f : [a, b] \to [c, d]$, potem je inverzna preslikava $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ tudi zvezna in strogo monotona.

D: $D \subseteq R, f : D \to R$. Funkcija f je **ENAKOMERNO ZVEZNA** na D, če $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

¤ Vsaka enakomerno zvezna funkcija je zvezna.

T: Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to R$ je na zaprtem intervalu [a,b] enakomerno zvezna.

D: **ODVOD** funkcije f v točki x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x = x_0} = \operatorname{tg}\varphi = k_T$$

¤ Geometrijsko je odvod smerni koeficient tangente na graf funkcije.

D: Funkcija f je v točki x_0 **ODVEDLJIVA**, če $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

T: Naj bosta f in g odvedljivi funkciji. Potem so odvedljivi tudi vsota, razlika, produkt in kvocient (kjer g ni nič).

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{Leibnitzov pravilo}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}; g(x) \neq 0$$

T: Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.

T: f in g sta odvedljivi funkciji. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; u = g(x), y = f(u)$$

T: f je odvedljiva in bijektivna ter $f'(x) \neq 0, \forall x \in D$. Potem je f^{-1} tudi odvedljiva in velja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

P: Če je $f:(a,b) \to R$ taka, da je $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b),$ potem je f konstantna.

VIŠJI ODVODI: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

D_f in obnašanje na robovih; ničle; f(0); f' (intervali naraščanja in padanja, ekstremi); f'' (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

KANDIDATI ZA EKSTREME:

- ničle f'
- krajišča intervala
- točke, kjer f ni odvedljiva

$f(x) = g(x)$ na I

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = C$ na I

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h$$

T: Če je $f'(x_0) > 0,$ funkcija v bližini točke x_0 narašča, če pa je $f'(x_0) < 0,$ pa pada.

D: V točki x_m je **LOKALNI MINIMUM** funkcije f, če $\exists \delta > 0 : f(x_m) \leq f(x) \forall x \in (x_m - \delta, x_m + \delta)$.
V točki x_M je **LOKALNI MAKSIMUM** funkcije f, če $\exists \delta > 0 : f(x_M) \geq f(x) \forall x \in (x_M - \delta, x_M + \delta)$.

T: Če je v točki x_0 **LOKALNI EKSTREM** odvedljive funkcije f, potem je $f'(x_0) = 0$.

D: Točka x_0 je **STACIONARNA** za funkcijo f, če je $f'(x_0) = 0$.

T: x v bližini x_0. Če je za $x < x_0$ $f'(x) < f'(x_0)$ za $x > x_0$ pa $f'(x) > f'(x_0)$, je to lokalni minimum. Če pa je za $x < x_0$ $f'(x) > f'(x_0)$ za $x > x_0$ pa $f'(x) < f'(x_0)$, je to lokalni maksimum.

T: f, f' in f'' so zvezne funkcije. Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.
Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum.

T: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(m)}(x_0) = 0, f^{(m+1)}(x_0) \neq 0, f^{(m+1)}$ je zvezna funkcija. Če je m+1 liho število, potem v točki x_0 ni ekstrema. Če pa je m+1 sodo število, je v točki x_0 lokalni ekstrem, in sicer minimum, če je $f^{(m+1)}(x_0) > 0,$ ali maksimum, če je $f^{(m+1)}(x_0) < 0.$

ROLLEJEV IZREK: Naj bo $f:[a,b] \to R$ zvezna funkcija in odvedljiva na (a,b). Če je $f(a) = f(b)$, potem $\exists \xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = 0$.

LAGRANGEOV IZREK: Naj bo $f:[a,b] \to R$ zvezna funkcija in odvedljiva na (a,b). Potem $\exists \xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

L'HOPITALOVO PRAVILO: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $f(a) = g(a) = 0$. Velja tudi za $|f(a)| = |g(a)| = \infty$

D: Funkcija $f:[a,b] \to R$ je **KONVEKSNA**, če za $x_1<x<x_2$ iz [a,b] velja

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Funkcija $f:[a,b]\rightarrow R$ je **KONKAVNA**, če za $x_1<x<x_2$ iz [a,b] velja

$$f(x)\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$

D: Če je funkcija levo od x_0 konveksna, desno pa konkavna (in obratno), pravimo, da je v x_0 **PREVOJ** funkcije f.

T: Če je f' naraščajoča funkcija in $f''>0$, je funkcija konveksna, če pa je f' padajoča in $f''<0$, je funkcija konveksna. Če je x_0 prevoj za f, je $f''(x_0)=0$.

T: Če vrsta $f(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$ konvergira na intervalu $(a-r,a+r)$, potem smemo to vrsto členoma odvajati in dobljena vrsta konvergira na istem intervalu. Enako velja za integriranje.

DIFERENCIAL: $dy=f'(x_0)dx$

TAYLORJEVA FORMULA:

f je $(n+1)$-krat odvedljiva

$$f(x)=T_n+R_n$$

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\qquad \xi\in(a,x)$$

¤ Ko je $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ (f je ∞-krat odvedljiva) je $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$

KONVERGENCA TAYLORJEVE VRSTE:

$\exists R: x\in(a-R,a+R)$ konvergira (absolutno)

$x\in(-\infty,a-R)\cup(a+R,\infty)$ divergira

NEDOLOČENI INTEGRAL:

$$F(x)=\int f(x)dx\Leftrightarrow f(x)=F'(x)$$

$$G(x)=F(x)+C\Leftrightarrow G'(x)=F'(x)\Leftrightarrow G(x)=\int f(x)dx$$

$$t=tg\frac{x}{2}\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$ UNIVERZALNA SUBSTITUCIJA

DOLOČENI INTEGRAL:

RIEMANNOVA VSOTA: $S_p(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\quad;\xi\in[x_i,x_{i-1}]$

DELITEV ALI PARTICIJA INTERVALA [a,b]: končna množica točk

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

$$\Delta_i x=x_i-x_{i-1}$$

$$\Delta_p=\max_{1\leq i\leq n}\Delta_i x$$

D: **RIEMANNOV INTEGRAL:** Število I je limita Riemannovih vsot:

$I=\lim\limits_{\Delta_p\to 0}S_p(f)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\Delta_p<\delta\Rightarrow|S_p(f)-I|<\varepsilon)$. Če limita Riemannovih vsot $S_p(f)$ obstaja, pravimo, da je f na intervalu [a,b] integrabilna v Riemannovem smislu.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta_p\to 0}S_p(f)$$

I: Vsaka zvezna funkcija $f:[a,b]\to R$ je integrabilna. To velja tudi za funkcije, ki so nezvezne v končno ali števno neskončno mnogo točkah.

T: $a \le b;\ f,g:[a,b]\to R$. Če je f(x)≤g(x), potem je $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

P: $m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a,b]\ b \ge a \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

T: Če je $f:[a,b]\to R$ zvezna, $\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

IZREK O POVPREČNI VREDNOSTI: Med infimumom m in supremumom M na intervalu [a,b] zvezne funkcije f obstaja med taka točka c, da je $c = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$.

T: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad a \le b$

OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA: Če je f zvezna funkcija, je njen določeni integral $F(t) = \int_a^b f(x)dx$ odvedljiva funkcija zgornje meje r in velja: $F\ (t) = f(t)$.

P: (**DRUGI OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA**): Če je $F'(x) = f(x)\ \forall x$, je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

¤ $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

T: Če je $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ monotona odvedljiva funkcija in f zvezna, potem velja $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi(t)dt$, če je $\varphi(\alpha) = a$ in $\varphi(\beta) = b$.

D: **IZLIMITIRANI INTEGRALI:** $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Če limita obstaja, pravimo, da je integral $\int_a^\infty f(x)dx$ **<u>konvergenten</u>**, če pa ne, je **<u>divergenten</u>**.

¤ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} = \frac{a}{r-1} \quad r > 1$

D: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to a}\int_a^b f(x)dx$ Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ je **ABSOLUTNO KONVERGENTEN**, če je konvergenten integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$.

T: Vsak absolutno konvergenten integral je konvergenten.

T: Če je $|f(x)| \le g(x)$ in je integral $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergenten, potem je integral $\int_a^\infty f(x)dx$ **<u>absolutno konvergenten</u>**.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{matrix} \alpha > 1 \Rightarrow \exists, \text{konvergira} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \nexists, \text{nekonvergira} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \int_a^{a+1} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \\ \int_{a-1}^{a} \frac{dx}{(a-x)^\alpha} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \alpha < 1 \Rightarrow \exists, \text{konvergira} \\ \alpha \ge 1 \Rightarrow \nexists, \text{nekonvergira} \end{matrix}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \ \exists \wedge 0 \le g(x) \le f(x) \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx \ \exists$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \ \nexists \wedge 0 \le f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx \ \nexists$$

TRAPEZNA FORMULA: $\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$

SIMPSONOVA FORMULA: $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \right.$
$\left. + 2f(a+4h) + \ldots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)\right)$

PLOŠČINA MED KRIVULJAMA: $S = \int (f(x) - g(x))dx, \ f(x) \ge g(x) \ \forall x$

DOLŽINA KRIVULJE: $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

– parametrično podane: $s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$

– v polarnih koordinatah: $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$

PROSTORNINA VRTENINE: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

POVRŠINA VRTENINE: $S_{pl} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

TEŽIŠČE RAVNINSKEGA LIKA: $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx \quad y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx$

PAPPUSOVI IZREKI: $S = 2\pi y_T s = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ **<u>Površina vrtenine</u>**, ki nastane, ko se ravninska krivulja zavrti okrog osi, ki je ne seka, je enaka produktu dolžine krivulje in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče te krivulje. $V = 2\pi y_T S = \pi \int_a^b y^2 dx$ **<u>Prostornina vrtenine</u>**, ki nastane, ko se ravninski lik zavrti okrog osi, ki ga ne seka, je enaka produktu ploščine tega lika in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče.