FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK, PARCIALNI ODVODI, TOTALNI DIFERENCIAL, POSREDNO ODVAJANJE, TANGENTNA RAVNINA IN TAYLORJEVA VRSTA, EKSTREMI ZA FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

D: $D \subseteq R^n$, **FUNKCIJA** $f : D \to R$ je predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi natanko določeno število $y = f(x) \in R$.

D: $f : D \to R, D \subseteq R^n$. f je **V TOČKI** $a \in D$ **ZVEZNA**, če $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Ko se x bliža a, se f(x) bliža f(a): $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. f je zvezna na D, če je **ZVEZNA** v vsaki točki $a \in D$.

T: Če je $f : D \to R$ zvezna funkcija, je zvezna po vsaki spremenljivki posebej. Obrano ni res.

D:

$$z = f(x_1, \ldots, x_n), f : D \to R, D \subseteq R^n,$$
$$a \in D, a = (a_1, \ldots, a_n), f_1(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = f_1'(a); \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = f_2'(a); \ldots$$

D: Podmnožica $D \subseteq R^n$ je **ODPRTA**, če okrog vsake njene točke lahko opišemo n–razsežno kroglo, ki je vsa vsebovana v D. $(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(K(a, \delta) = \{x \in R^n : \|x - a\| < \delta\} \subseteq D)$.

D: Množica je **ZAPRTA**, če je njen komplement odprt.

D:

$$D^{odprta} \subseteq R^n, f : D \to R, a \in D, a = (a_1, \ldots, a_n)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots a_n)}{h};$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_n) - f(a)}{h}$$
$$(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) = a + he_1$$
$$\ldots$$
$$(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + h) = a + he_n$$

D: **VIŠJI ODVODI**:

$$z = f(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

T: Če sta odvoda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ zvezni funkciji, potem je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. To velja tudi za funkcije več kot dveh spremenljivk.

D:

$$U^{odprta} \subseteq R^n, f : U^{odprta} \to R, a \in U,$$
$$\text{grad} f(a) = (\nabla f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

D: $u=f(x_1,\dots,x_n), D\subseteq R^n, f: D\to R, a\in D.$ **TOTALNI DIFERENCIAL FUNKCIJE f V TOČKI a**

je $du=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$. $du=\mathrm{grad}f(a)dx=(\nabla f)(a)dx.$

T: Če je $D^{odprta}\subseteq R^n, f: D^{odprta}\to R$ funkcija z zveznimi parcialnimi odvodi, potem za $\forall a\in D$ velja:

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\Delta u-du(a)}{\|h\|}=0. \qquad \Delta u=f(a+h)-f(a), \quad du(a)=(\nabla f)(a)\circ h$$

¤ $\frac{du}{dt}(t_0)=\frac{\partial u}{\partial x_1}(x(t_0))\frac{dx_1}{dt}(t_0)+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}(x(t_0))\frac{dx_n}{dt}(t_0)=(\nabla u)(x(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)$

T: Naj ima funkcija $u=u(x_1,\dots,x_n)$ zvezne parcialne odvode in naj bo $x=x(t)$ odvedljiva funkcija. Potem velja $\frac{d}{dt}u(x(t))=(\nabla u)(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)$.

¤ $\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial t_m}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$

¤ $f(x,y)=0,\ y=y(x);\ \frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

D: **ODVOD FUNKCIJE u GLEDE NA VEKTOR v V TOČKI a**:

$$(\nabla_v u)(a)=\frac{d}{dt}f(a+tv)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot v_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot v_n=\langle(\nabla_v f)(a),v\rangle; \qquad u=f(x),\ x=a+tv,\ t\in R.$$

¤ Če ima v isto smer kot $(\nabla f)(a)$, potem je $(\nabla_v u)(a)=\|(\nabla f)(a)\|$. Če pa ima v nasprotno smer kot $(\nabla f)(a)$, potem je $(\nabla_v u)(a)=-\|(\nabla f)(a)\|$.

T: $\mathrm{grad}f(a)=(\nabla f)(a)$ kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f v okolici točke a.

¤ $(\nabla f)(a)$ je pravokoten na **TANGENTNO RAVNINO** na ploskev v točki a.

¤ **TAYLORJEVA VRSTA**:

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{[i]}\Bigg|_{(a,b)}+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{[n+1]}\Bigg|_{(a+\xi h,b+\xi k)} \qquad \xi\in(0,1),\ h=x-a,\ k=y-b$$

T: Če ima odvedljiva funkcija $u=f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ v točki $a=(a_1,\dots,a_n)$ lokalni ekstrem, so v tej točki vsi njeni parcialni odvodi enaki 0. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0,\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0$

T: $K(a,b)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}_{(a,b)}$. Če ima $u=f(x,y)$ v točki (a,b) stacionarno točko in je

$K(a,b)>0$, potem **je** v (a,b) **lokalni ekstrem**, in sicer **lokalni minimum**, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$, ali **lokalni maksimum**, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$. Če je $K(a,b)<0$, potem v točki (a,b) **ni lokalnega ekstrema**. Če pa je $K(a,b)=0$, **ne moremo določiti**, če je v točki (a,b) lokalni ekstrem ali ne.