MATRIKE

D: **REALNA MATRIKA** velikosti m×n, $M_{m,n}$, je tabela oblike

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]$$

¤ **Stolpec**: $M_{m,1}$, **Vrstica**: $M_{1,n}$, **Kvadratna matrika**: $M_{n,n}=M_n$

¤**Diagonalna matrika**: $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$, **Identična matrika**: $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Skalarna matrika: $A=\alpha I$, **Zgornja trikotna n×n matrika** (podobno **spodnja**):

$$Z_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix};\ 0=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\quad E_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & e_{ij} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, e_{ij}=1$$

T: Matrika $M_{m,n}$ je za naslednji operaciji vektorski prostor z dimenzijo m×n.

$$A,B\in M_{m,n}$$
$$A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]\in M_{m,n}$$
$$\alpha A=\alpha\left[a_{ij}\right]=\left[\alpha a_{ij}\right]\in M_{m,n}$$

¤ $A=\left[a_{ij}\right]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$; **Ogrodje**: $\{E_{ij}\ : i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n\}$

D: **TRANSPONIRANA MATRIKA** matrike A je tista matrika, ki ima na mestu ij tisti element matrike A, ki je v njej na mestu ji. $A^T=\left[a_{ji}\right]\Leftrightarrow A=\left[a_{ij}\right]$

D:

$$A\in M_{m,n}, B\in M_{n,p}$$

$$AB=\left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}\right]=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{mj}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n}a_{mj}b_{jp} \end{bmatrix}$$

$$AB\neq BA$$
$$(AB)C=A(BC)$$
$$(A+B)C=AC+BC$$
$$(\alpha A)B=\alpha(AB)=A(\alpha B)$$
$$(AB)^T=B^TA^T$$

¤ **Nilpotentna matrika**: $A^2 = 0$, **Idempotentna matrika**: $A^2 = A$, **Antisimetrična matrika**: $A^T = -A$.

D: Preslikava $A: R^n \to R^m$ je **LINEARNA**, če obstaja taka matrika A velikosti m×n, da je $A(x) = Ax \quad \forall x \in R^n$.

T: Preslikava $A: R^n \to R^m$ je **LINEARNA** natanko takrat, ko je
$A(a+b) = A(a) + A(b),\ A(\alpha a) = \alpha A(a) \quad \forall a, b \in R^n, \alpha \in R$ oz.
$A(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot A(a) + \beta \cdot A(b) \quad \forall a, b \in R^n, \alpha, \beta \in R$.

¤ Linearna preslikava preslika 0 v 0. $(A(0) = 0)$.

D: **LINEARNA PRESLIKAVA** $A: U \to V$ je predpis, ki vsakemu vektorju $u \in U$ priredi natanko določen vektor $A(u) \in V$, pri čemer velja:
$A(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot A(a) + \beta \cdot A(b) \quad \forall a, b \in U, \forall \alpha, \beta \in R(C)$.

¤ **LINEARNI FUNKCIONAL** je taka funkcija A, ki slika iz R^n v R $(A: R^n \to R)$.

T: Naj bo $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za U, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ pa poljubni vektorji iz V. Potem obstaja natanko ena preslikava $A: U \to V$, da je: $A(a_1) = b_1, \ldots, A(a_n) = b_n$.

¤ $(Au)_M = A_{M,N} u_N$

D: $A: U \to V$ linearna preslikava.
ZALOGA VREDNOSTI: $R_A = \{Au : u \in U\} = \{v \in V : \exists u \in U, v = Au\} \subseteq V$.
JEDRO: $N_a = \{u \in U : Au = 0\} \subseteq U$.

T: R_A je vektorski podprostor za V, N_A pa za U.

T: Če je $A: U \to V$ linearna preslikava in $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za U, je potem $\{A(a_1), \ldots, A(a_n)\}$ ogrodje za R_A.
(Če je $A: R^n \to R^m$, potem stolpci matrike A tvorijo ogrodje za R_A.)

T: $A: U \to V$. A je **SURJEKTIVEN** (operator) $\Leftrightarrow R_A = V$.
A je **INJEKTIVEN** $\Leftrightarrow N_A = 0$.

D: A je **INJEKTIVEN**, če iz $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$.

T: $A: U \to V$ linearen operator. $\dim N_A + \dim R_A = \dim U$.

D: $\dim R_A = \text{rang} A$

¤ $\text{rang} A = \text{št. linearno neodvisnih vrstic/stolpcev}$ (množenje vrstice/stolpca z neničelnim številom; menjava vrstic/stolpcev; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu).

¤ $\dim N_A = \text{št. spremenljivk} - \text{rang} A$

¤ stolpci matrike A so elementi R_A, R_A je množica vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A.

¤ **SISTEMI LINEARNIH ENAČB**: (množenje vrstice z neničelnim številom; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic neki vrstici; menjava vrstic). **HOMOGEN SISTEM** je vedno rešljiv (0,…,0), množica rešitev je vektorski podprostor v R^n;
$\dim(\text{v.pr. rešitev}) = \text{št. rešitev} = \text{št. spremenljivk} - \text{rang prirejene matrike}$

NEHOMOGEN SISTEM je rešljiv $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A_{(\text{prirejena mat.})} = \operatorname{rang} \overline{A}_{(\text{razširjena mat.})}$; Če je rešljiv: $\text{mn.reš.} = \text{partikularna reš.} + \text{mn.reš. prirejenega homogenega sistema}$

T: Naj bo u **PARTIKULARNA REŠITEV** sistema $Ax = b$. Vsako rešitev tega sistema lahko izrazimo kot vsoto $x = u + h$, kjer je h rešitev homogenega sistema $Ah = 0$. Pri danem b ima sistem $Ax = b$ največ eno rešitev, če ima homogen sistem $Ax = 0$ le rešitev $x = 0$.

D: $A \in M_n$. **INVERZNA MATRIKA** je taka matrika, da je $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

T: $A \in M_n$, $A : R^n \to R^n$. $N_A = 0 \Leftrightarrow \exists! X \in M_n : XA = AX = I$

T: $R_A = R^n \Rightarrow \exists! X \in M_n : XA = AX = I$

D: **PERMUTACIJA** števil 1,…,n je bijektivna preslikava množice vase.

D: **TRANSPOZICIJA** je permutacija, ki zamenja le dva elementa.

D: $\sigma, \tau \in S_n \to \sigma \cdot \tau \in S_n \quad (\sigma, \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Produkt $\sigma\tau$ je permutacija, ki jo dobimo, če najprej izvedemo τ in nato σ.

T: Vsako permutacijo lahko izrazimo kot produkt transpozicij.

D: **SODE PERMUTACIJE** so tiste, ki se dajo zapisati kot produkt sodomnogih transpozicij. Enako velja za **LIHE**.

¤ **INVERZIJA** je pojav, da je večje število pred manjšim. Pri **SODI INVERZIJI** nastopa sodo število inverzij, pri **LIHI** pa liho.

D: Predznak permutacije: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1; & \sigma \text{ je soda} \\ -1; & \sigma \text{ je liha} \end{cases} = \operatorname{sgn}\sigma$

D: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

T: • $\det \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ • $\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ • $\det \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ enako za stolpce •

$\det A^T = \det A$

¤ (če zamenjamo dve vrstici/stolpca, se predznak spremeni; če vrstico/stolpec pomnožimo s skalarjem, se determinanta pomnoži s tem skalarjem; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu; razvoj po vrstici/stolpcu). Determinanta trikotne ali diagonalne matrike je enaka produktu elementov na diagonali.

T: $\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad A, B \in M_n$

¤ **MINOR** k elementu a_{ij}, D_{ij}, je poddeterminanta, v kateri izpustimo vrstico i in stolpec j iz determinante. **KOFAKTOR** k elementu a_{ij} je $(-1)^{i+j} D_{ij}$.

¤ $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) \cdot I$; $\tilde{A}$ je **PRIREJENKA** k matriki A: $\tilde{A} = \left[(-1)^{i+j} D_{ij}\right]$.

T: Matrika $A \in M_n$ je **OBRNLJIVA** $(\exists A^{-1}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Takrat je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

¤ $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ $\quad \det A^2 = (\det A)^2$ $\quad \det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$

¤ **CRAMERJEVO PRAVILO**: Če je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ in $Ax = b$,

potem je $x_i = \frac{1}{\det A} \cdot D_i$, $i = 1, \dots, n$.

T: $A \in M_{m,n}$; rangA je največji tak k, da v A obstaja k×k podmatrika z determinanto različno od 0.

D: Vektor $a \in V$ je **LASTNI VEKTOR** za linearno preslikavo $A : V \to V$, če je $Aa = \lambda a$ za kak $\lambda \in R(C)$. Število λ imenujemo **LASTNA VREDNOST** za A, če $a \neq 0$.

T: λ je lastna vrednost za linearno preslikavo A natanko takrat, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$.

D: **KARAKTERISTIČNI POLINOM** je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ za linearno preslikavo A.

T: Linearno preslikavo $A : V \to V$ lahko predstavimo z **DIAGONALNO MATRIKO** (A se da diagonalizirati) natanko tedaj, ko obstaja baza za V iz lastnih vektorjev za A.

D: Matrika $S \in M_n(R)$ je **SIMETRIČNA**, če je $S^T = S$.

T: Če je $S \in M_n$ simetrična, je $y^T S x = x^T S y \ \forall x, y \ (\text{stolpca}) \in R^n$

T: Lastne vrednosti simetrične matrike $S \in M_n(R)$ so realna števila.

T: Lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim simetrične matrike, so med seboj pravokotni.

I: Če je $S \in M_n(R)$ simetrična matrika, obstaja taka matrika $P \in M_n(R)$, da je $P^T S P = D$ diagonalna lastna vrednost matrike S. Matrika P ima za stolpce ortonormirane lastne vektorje matrike S. Velja: $P^{-1} = P^T$.

¤ $A^n : PD^nP^{-1}$ $\quad P : \left[\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_m\right]$ $\quad D^n : \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m^n \end{bmatrix}$

$\vec{v}$ - lastni vektorji (stolpci)
λ - lastne vrednosti

D: Matrika P je **ORTOGONALNA**, če je $P^{-1} = P^T$, $P^T P = P P^T = I$.

T: $P \in M_n(R)$ je ortogonalna $\Leftrightarrow P^T P = P P^T = I \Leftrightarrow$ stolpci in vrstice matrike P so ortonormirani.

¤ A^{-1} / $AX = B$ $XA = B$ / A^{-1}

$X = A^{-1}B$ $X = BA^{-1}$