VEKTORJI IN VEKTORSKI PROSTORI

$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\|\alpha\vec{r}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{r}\|$

$\alpha\vec{r} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$\forall \vec{a} \quad \exists (-\vec{a}): \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

$1\vec{a} = \vec{a}$

$0\vec{a} = 0$

$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{r}\|} \quad \cos\beta = \frac{y}{\|\vec{r}\|} \quad \cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{r}\|}$ smerni koti

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|\vec{r}\|^2}$

¤ $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$; $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **KOLINEARNA** $\Leftrightarrow \exists k \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Takrat je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

¤ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ sta **KOPLANARNI** $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

D: **LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORJEV** $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ je vsak vektor oblike $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n \quad (\alpha_i \in R)$. Vektor O je vedno linearna kombinacija vektorjev. **<u>Trivialna linearna kombinacija</u>**: Vsi koeficienti v kombinaciji so 0.

D: Vektorji $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ so **LINEARNO NEODVISNI**, če iz $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ sledi $\alpha_i = 0$

T: $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Potem nista kolinearna.

ENAČBA PREMICE:

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

ENAČBA RAVNINE:

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

$ax + by + cz = d \quad d = \vec{r}_0 \circ \vec{n} \quad \vec{n} = (a, b, c)$

<u>skozi tri točke</u>:

$\vec{r}_A = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{r}_B = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{r}_C = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \quad \vec{d} = (x, y, z)$

$$(\vec{d} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

RAZDALJA TOČKE OD PREMICE: $d(T, p) = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|}$

RAZDALJA TOČKE OD RAVNINE: $D(T_1, \Psi) = \dfrac{|a x_1 + b y_1 + c z_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

RAZDALJA MED DVEMA PREMICAMA:

<u>vzporednici</u>

$p : \vec{r} = \vec{r}_p + t\vec{s} \quad q : \vec{r} = \vec{r}_q + t\vec{s}$

$$d(p,q) = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q)\|}{\|\vec{s}\|}$$

<u>mimobežnici</u>

$p : \vec{r} = \vec{r}_p + t\vec{s}_p \quad q : \vec{r} = \vec{r}_q + t\vec{s}_q$

$$d(p,q) = \frac{\|(\vec{r}_p - \vec{r}_q), \vec{s}_p, \vec{s}_q\|}{\|\vec{s}_p \times \vec{s}_q\|}$$

SKALARNI PRODUKT:

$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi = \|\vec{a}\| \cdot \mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

$\vec{a} \circ (\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a} \circ \vec{b})$

$\vec{a} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0; \quad \vec{a} \circ \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

VEKTORSKI PRODUKT:

$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_1 \quad \vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \ \vec{b}_1 \perp \vec{a}, \ \vec{b}_2 \| \vec{a}$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b})$

$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{e} \perp \vec{a}, \ \|\vec{e}\| = 1; \quad \|\vec{e} \times \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$

MEŠANI PRODUKT:

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$

$V_{paralelpiped} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$

$V_{piramida} = \dfrac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$

$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

$(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}) = \alpha\beta\gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha_1(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \alpha_2(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

Trije vektorji so **KOPLANARNI**, ko je njihov mešani produkt enak 0.

VEČKRATNI PRODUKTI:

1. **<u>dvojni vektorski produkt</u>**:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\circ\vec{c})\circ\vec{b}-(\vec{b}\circ\vec{c})\circ\vec{a}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0 \quad \text{Jacobijev identiteta}$$

2. **<u>Lagrangeova identiteta</u>**:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\circ\vec{c} & \vec{a}\circ\vec{d}\\ \vec{b}\circ\vec{c} & \vec{b}\circ\vec{d}\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}=\vec{c}\quad \vec{d}=\vec{b}\Longrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\circ\vec{b})^2$$

3. $(a\times b)\times(c\times d)=(a,c,d)b-(b,c,d)a=d,a,b)c-(c,a,b)d$

D: Realen **VEKTORSKI PROSTOR** V je neprazna množica V (njeni elementi so vektorji), opremljena z operacijama seštevanja in množenja s skalarjem, ki zadoščata naslednjim pogojem:

$\forall u,v,w\in V,\ \forall\alpha,\beta\in R$

$u+v=v+u$

$(u+v)+w=u+(v+w)$

$\exists 0\in V:\quad u+0=u=0+u$

$\exists(-u):\quad u+(-u)=0=(-u)+u$

$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha b$

$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

$(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

$1\cdot u=u$

D: Podmnožica U vektorskega prostora V je **VEKTORSKI PODPROSTOR**, če je vektorski prostor za isti operaciji kot V.

T: Neprazna podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor $\Leftrightarrow u,v\in U\Rightarrow u+v\in U$ in $u\in U,\alpha\in R\Rightarrow \alpha u\in U$.

T: Neprazna podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor $\Longleftrightarrow\forall u,v\in U,\ \forall\alpha,\beta\in R\Longrightarrow\alpha u+\beta v\in U.$

T: $\forall v\in V: 0\cdot v=0 \quad -v=(-1)\cdot v$

T: Če je U vektorski podprostor V, potem je $\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n\in U$ za $\forall u_i\in U,\ \alpha_i\in R.$ s

D: **LINEARNA LUPINA** podmnožice S v vektorskem prostoru V je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz S.

$[S]=\{\lambda_1 s_1+\ldots+\lambda_n s_n : s_i\in S,\ \lambda_i\in R,\ n\in N\}$

$S=\{a_1,\ldots,a_n\}\Rightarrow[S]=\{\lambda_a a_1+\ldots+\lambda_n a_n : \lambda_i\in R\}$

T: [S] je vektorski podprostor v V, $S\subseteq[S]$, če je U vektorski podprostor V in $S\subseteq U\Rightarrow[S]\subseteq U.$

D: Podmnožica S v vektorskem prostoru V je **OGRODJE**, če je $[S]=V$. To pomeni, da se mora dati vsak vektor iz V izraziti kot linearna kombinacija vektorjev iz S.

D: Končna množica $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$ je **LINEARNO NEODVISNA**, če iz $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n=0\Rightarrow\alpha_i=0.$

¤ Če je S linearno neodvisna, je linearno neodvisna tudi vsaka njena neprazna podmnožica.

D: Neskončna množica v vektorskem prostoru V je linearno neodvisna, če je linearno neodvisna vsaka njena končna podmnožica.

D: Podmnožica B v vektorskem prostoru V je **BAZA**, če je ogrodje in je linearno neodvisna hkrati.

I: V vsakem vektorskem prostoru (razen 0) obstaja baza.

D: Vektorski prostor V je **KONČNO RAZSEŽEN**, če ima kako končno ogrodje.
$S = \{v_1, \ldots, v_n\}$

L: Če je S ogrodje vektorskega prostora V in T taka podmnožica V, da lahko vsak vektor iz S izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz T, potem je tudi T ogrodje.

L: Če je A linearno neodvisna, S pa ogrodje v vektorskem prostoru V, je $|A| \leq |S|$.
$(A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad S = \{s_1, \ldots, s_n\} \quad m \leq n)$.

I: Vsak končno razsežen vektorski prostor V $(V \neq 0)$ ima bazo; vse baze imajo enako moč in vsako linearno neodvisno podmnožico $A \subseteq V$ lahko dopolnimo do baze.

D: **DIMENZIJA ALI RAZSEŽNOST**, dimV, vektorskega prostora V je moč baze.

T: Če je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linearno neodvisna množica v n–razsežnem vektorskega prostora, je baza.

D: **EVKLIDSKI PROSTOR** je realen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom. **<u>Skalarni produkt</u>** na realnem vektorskem prostoru V je predpis, ki vsakemu urejenemu paru (a,b) vektorjev iz V priredi realno število $\langle a, b \rangle$. Pri tem mora veljati:

$\forall a, a_1, a_2, b \in V, \ \forall \alpha \in R$

$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

$\langle a_1 + a_2, b \rangle = \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle$

$\langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$

$\langle a, a \rangle \geq 0 \quad \langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$

D: **NORMA ALI DOLŽINA VEKTORJA** a v vektorskem prostoru V s skalarnim produktom je $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ trikotniška neenakost ali neenakost Minkovskega

$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$

$\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$

L (Schwarz, Couchy, Bunjakovski): $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Enakost velja, če sta vektorja linearno odvisna.

D: **KOT MED VEKTORJEMA** $a, b \in V, \ a, b \neq 0$ je tisti kot $\varphi \in [0, \pi]$, ki zadošča pogoju: $\cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$. Če je a=0 ali b=0 pravimo, da sta vektorja pravokotna.

D: Vektorja a in b v evklidskem prostoru sta **ORTOGONALNA ALI PRAVOKOTNA**, če je $\langle a, b \rangle = 0$. Množica vektorjev je **ORTOGONALNA**, če sta poljubna dva različna vektorja v njej ortogonalna. Množica je **ORTONORMIRANA**, če je ortogonalna in imajo vsi njeni vektorji dolžino 1.

T: Vsaka ortogonalna množica $\{a_1, \ldots, a_n\}$ neničelnih vektorjev je linearno neodvisna.

¤ **GRAMM–SCHMIDTOV POSTOPEK**: Postopek, po katerem dobimo ortogonalno ali ortonormirano bazo s popravljanjem vektorjev iz prostora.

$\lambda_a^b = \frac{\langle \vec{x}_a, \vec{y}_b \rangle}{\langle \vec{y}_b, \vec{y}_b \rangle}$ $x \to$ originalni vektorji, $y \to$ popravljeni vektorji npr. $y_3 = x_3 - \lambda_3^2 y_2 - \lambda_3^1 y_1$.

I: V vsakem evklidskem prostoru $V \neq 0$ obstaja ortonormirana baza.

D: **KOMPLEKSNI VEKTORSKI PROSTOR** je množica V, opremljena z operacijama seštevanja in množenja. Veljajo enaki pogoji kot za realni vektorski prostor

D: **UNITARNI PROSTOR** je kompleksen končno razsežen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom. **Skalarni produkt** je predpis, ki vsakemu paru vektorjev $u, v \in V$ priredi kompleksno število $\langle u, v \rangle$. Pri tem mora veljati:

$u, u_1, u_2, v \in V, \alpha \in C$

$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$

$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \qquad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$