1. DOMAČA NALOGA - TEHNIŠKA VARNOST

predmet: MATEMATIKA

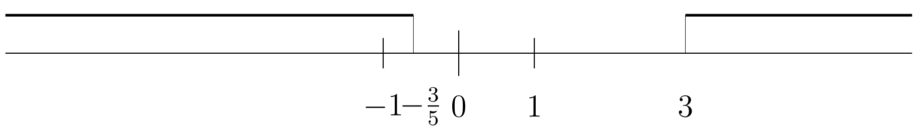
asist. Andreja Drobnič Vidic

REALNA IN KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Inženir mora obvladati splošne matematične metode, primerne za reševanje množice nalog; samo tedaj lahko rešuje resnično nove probleme iz svoje stroke.

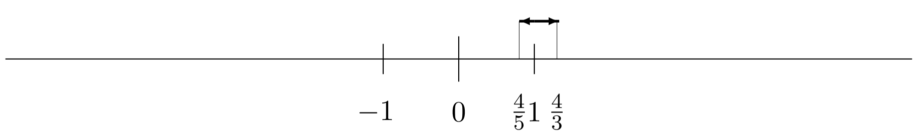
A.N. Krilov

1. popolna matematična indukcija
2. **a)** $[\frac{7}{2}, \infty)$
   b) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
   c) $\{\} = \emptyset$
   d) $\mathbb{R}$
3. **a)** $(-\infty, -\frac{3}{5}] \bigcup [3, \infty)$



Skica 1. Grafičen prikaz rešitve naloge.

   b) $(\dfrac{4}{5}, \dfrac{4}{3})$



Skica 2. Grafičen prikaz rešitve naloge.

4. Rešitev: $|2x-3| - |x+2| = \begin{cases} -x-1, & \text{za } x < -2 \\ -3x+1, & \text{za } -2 \leq x < \frac{3}{2} \\ x-5, & \text{za } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

5. **a)** $x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i$

   b) $x_1 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{11}}{4}i, \quad x_2 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{11}}{4}i$

   c) $x_1 = 0, \quad x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{6}i, \quad x_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{23}}{4}i$

6. **a)** $z = -\frac{1}{2}$

   b) $z = 3 - i$

   c) $z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = -\sqrt{3} - i$

7. **a)** $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{13}(\cos 56{\cdot}31^\circ + i\sin 56{\cdot}31^\circ)$
   $-z = -2 - 3i = \sqrt{13}(\cos 236{\cdot}31^\circ + i\sin 236{\cdot}31^\circ)$

   b) $z = -2+3i = \sqrt{13}(\cos 123{\cdot}69^\circ + i\sin 123{\cdot}69^\circ)$ $-z = 2-3i = \sqrt{13}(\cos 303{\cdot}69^\circ + i\sin 303{\cdot}69^\circ)$

8. Za izmenično napetost v električnem krogu z upornikom in kondenzatorjem velja zaradi faznega zamika enačba

$$U = U_R - iU_C,$$

saj množenje z $-i$ pomeni zmanjšanje kota za 90°. Dalje lahko zapišemo s pomočjo enačb Ohmovega zakona ($U_R = IR$, $U_L = I\omega L$, $U_C = \frac{I}{\omega C}$) napetost

$$U = IR - iI\frac{1}{\omega C} = I(R - i\frac{1}{\omega C}),$$

kjer je $Z = R - i\frac{1}{\omega C}$ impedanca tega električnega kroga.

9. $R = 60\ \Omega$; $\quad C \approx 31{\cdot}83\ \mu F$; $\quad |Z| \approx 116{\cdot}62\ \Omega$

10. **a)** Število $z = \frac{-4i^{33}}{i-1}$ najprej poenostavimo, da dobimo realno in imaginarno komponento

$$z = \frac{-4i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = -2 + 2i.$$

Nato izračunamo

$$z^2 = z \cdot z = (-2+2i)(-2+2i) = -8i.$$

   b) Vrednost z^{23} računamo s pomočjo Moivreove formule. Polarna oblika števila $z = -2 + 2i$ je enaka $z = \sqrt{8}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$. Nato izračunamo

$$\begin{aligned} z^{23} &= (\sqrt{8}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)^{23}) = \\ &= (\sqrt{8})^{23}(\cos((3105)^\circ) + i\sin((3105)^\circ) = \\ &= 8^{11} \cdot \sqrt{8}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \\ &= 8^{11} \cdot \sqrt{8}(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = 2^{34}(1+i). \end{aligned}$$

11. **a)**

$$\begin{array}{lll} k=0: & z_0 = \sqrt[6]{2}(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ) & = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}) \\ k=1: & z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) & = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}) \\ k=2: & z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos 345^\circ + i\sin 345^\circ) & = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}) \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} k=0: & z_0 = \sqrt[4]{10}(\cos 54\text{'}217^\circ + i\sin 54\text{'}217^\circ) \approx 1\text{'}93(\cos 0\text{'}95 + i\sin 0\text{'}95) \\ k=1: & z_1 = \sqrt[4]{10}(\cos 234\text{'}217^\circ + i\sin 234\text{'}217^\circ) \approx 1\text{'}93(\cos 4\text{'}09 + i\sin 4\text{'}09) \end{array}$$

12. $z = 2^{-\frac{2}{3}}(1+i)$

13. REŠITEV PROBLEMA: KRATEK STIK POD MORSKO GLADINO

Označimo upornost kabla v prvem primeru R_a in v drugem primeru R_b. Upoštevamo, da je zaradi homogenosti upornost kabla sorazmerna z njegovo dolžino. Zapišemo enačbe za električni krog v obeh podanih primerih.

$$R_a = \frac{U}{I_a}, \qquad R_a = R_x + R_y$$

$$R_b = \frac{U}{I_b}, \qquad R_b = R_x + (\frac{1}{R_{l-x}} + \frac{1}{R_y})^{-1}$$

Izpeljemo kvadratno enačbo za neznano upornost

$$R_x^2 - 2R_bR_x + R_b(R_l + R_a) - R_aR_l = 0,$$

katere rešitev je

$$R_x = R_b \pm \sqrt{(R_l - R_b)(R_a - R_b)}.$$

Rešitev nima realnih rezultatov, ko je $R_b > R_a$. To pri natančno opravljeni meritvi sicer ni možno, a se lahko zgodi, če je meritev obremenjena s precejšnjo naključno eksperimentalno napako.

Če je vodnik na poškodovanem mestu ozemljen preko kondenzatorja, poškodba kabla ne bi bila opazna pri nizkih frekvencah signalov, pri visokih pa bi kondenzator postajal vse boljši prevodnik in bi se precej signala zaradi vse boljše ozemljitve preko kondenzatorja izgubilo. Poleg tega tudi tok ne bi bil več v fazi z napetostjo. Če napetost zapišemo kot kompleksno število velikosti U_0 v polarni obliki, dobimo za tok izraz

$$I = U_0\frac{R_x(\omega C)^2 + i\omega C}{1 + (\omega R_x C)^2}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)),$$

katerega realni del je

$$Re(I) = U_0\frac{\omega C}{1 + (\omega R_x C)^2}(\omega R_x C\cos(\omega t) - \sin(\omega t)),$$

ki predstavlja rešitev drugega dela problema.