REŠITVE 2. DOMAČE NALOGE - TEHNIŠKA VARNOST

predmet: MATEMATIKA

asist. Andreja Drobnič Vidic

VEKTORJI

Inženir mora obvladati splošne matematične metode, primerne za reševanje množice nalog; samo tedaj lahko rešuje resnično nove probleme iz svoje stroke.

A.N. Krilov

1. Kot med vektorjema $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ je tisti kot, pod katerim iz točke opazovanja O vidimo objekt. Določimo vektorja $\overrightarrow{OA} = (50, -5, 5)$, $\overrightarrow{OB} = (180, -10, 0)$ in ju vstavimo v formulo za izračun kota med njima.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

   Dobimo

$$\cos\varphi = \frac{(50, -5, 5) \cdot (180, -10, 0)}{\sqrt{2500 + 25 + 25}\sqrt{32400 + 100}} = 0{\cdot}99.$$

   Od tod določimo $\varphi = 6{\cdot}2°$. Objekt med točkama A in B vidimo iz opazovališča O približno pod kotom $6°$.

2. Na točkasto telo deluje sila velikosti $10{\cdot}2\ N$.

3. *Letalo leti v smeri $5°$ severno od zahodne smeri. Dejanska hitrost je 363 vozlov.

4. $T(0, 1, 1)$, razdalja $\sqrt{2}$

5. Dobimo dve rešitvi: 1 in 5.

6. Uporabimo dejstvo, da je skalarni produkt pravokotnih vektorjev enak 0.

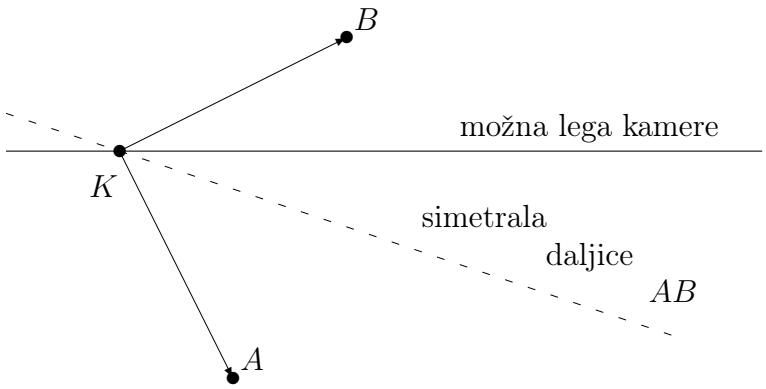
$$0 = (-2, 2, -1)(1, 2, x), \quad x = 2$$

   Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ je polovica kvadrata $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{\cdot}5$, obseg pa $o = 3 + 3 + \sqrt{3^2 + 3^2} \approx 10{\cdot}2$.

7. $k = -4$

8. *Kamerman lahko zasede dva položaja:
   - položaj $K_1(1, 2, 0)$, v katerem je od objekta A oddaljen $|\overrightarrow{K_1A}| = \sqrt{5} \approx 2{\cdot}2\ m$, od objekta B pa $|\overrightarrow{K_1B}| = 3\ m$;
   - položaj $K_2(1, 4, 0)$, v katerem je od objekta A oddaljen $|\overrightarrow{K_2A}| = 3\,m$, od objekta B pa $|\overrightarrow{K_2B}| = \sqrt{5} \approx 2{\cdot}2\ m$.

9. Narišimo skico 1.



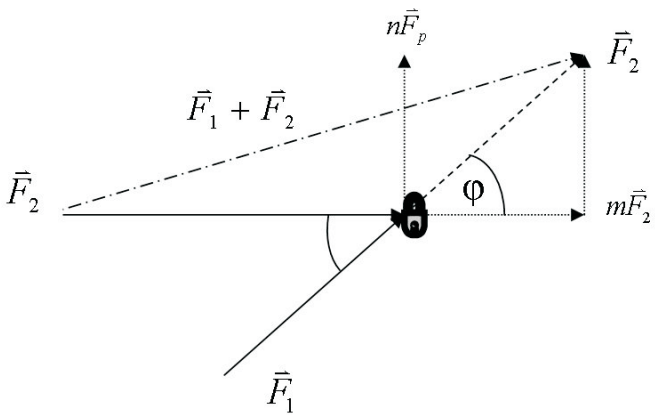
Skica 1. Nadzorovanje s kamero dveh od nje enako oddaljenih strojev.

Ker sta razdalji od K do A in od K do B enaki, iz $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{KB}|$ določimo koordinate kamere $K(-1{\cdot}5, 1{\cdot}5, 2{\cdot}5)$. Izračunamo še oddaljenost kamere K od objekta A: $\sqrt{8{\cdot}75} \approx 2{\cdot}96$ metrov. Izračunamo še kot $\sphericalangle AKB$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB}}{|\overrightarrow{KA}||\overrightarrow{KB}|} = \frac{7{\cdot}25}{8{\cdot}75},$$

ki znaša približno $\varphi = 34°$. Kamera nadzoruje stroja pod kotom $34°$.

10. Pravokotnica $\overrightarrow{F_p}$ ima koordinato z enako 0 in jo zato lahko zapišemo $\overrightarrow{F_p} = (x, y, 0)$. Določimo jo iz skalarnega produkta z njeno pravokotnico $\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_p} = 0$ do skalarnega faktorja natančno. Dobimo na primer $\overrightarrow{F_p} = (1, -1, 0)$. Razstavmo silo $\overrightarrow{F_1}$ na linearno kombinacijo preostalih dveh sil $(3, 4, 0) = m(2, 2, 0) + n(1, -1, 0)$ in določimo $m = \frac{7}{4}$ in $n = -\frac{1}{2}$.



Skica 2. Linearna kombinacija sil, ki delujejo na telo.

Silo $\overrightarrow{F_1}$ razstavimo torej takole: $\overrightarrow{F_1} = \frac{7}{4}\overrightarrow{F_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{F_p}$. Na točkasto telo deluje rezultanta (vsota) sil $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, ki jo izračunamo s pomočjo zapisane linearne kombinacije sil

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = (\frac{7}{4}\overrightarrow{F_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{F_p}) + \overrightarrow{F_2} = \frac{11}{4}\overrightarrow{F_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{F_p} = \frac{11}{4}(2,2,0) - \frac{1}{2}(1,-1,0).$$

V smeri sile $\overrightarrow{F_2}$ deluje sila velikosti $7{\cdot}8\ N$, v smeri pravokotnice pa sila velikosti $0{\cdot}7\ N$. Prva sila je po velikosti 22-krat večja od pravokotno delujoče sile.

11. 2:1.

12. (Namig: Pokaži, da je vektor, ki leži na višini npr. z oglišča B pravokoten na vektor $\overrightarrow{AC}$.)

13. Dolžina diagonal je $\sqrt{3}$, dolžina osnovnice pa 1.

14. Diagonali se sekata pod kotom $92{\cdot}7°$.

15. 30

16. 14

17. *

18. $V_{\text{paralelepipeda}} = 8; \qquad V_{\text{prizme}} = \frac{1}{2}V_{\text{paralelepipeda}} = 4$

19. $V_{\text{paralelepipeda}} = 17$

20. $V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3}V_{\text{prizme}} = \frac{1}{6}V_{\text{paralelepipeda}} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}$

21. Določimo sile, usmerjene po posameznih vodih od točke $P = (0,0,8)$ do vseh treh hiš

$$\overrightarrow{F_A} = \frac{900}{\sqrt{404}}(0,20,-2), \quad \overrightarrow{F_B} = \frac{900}{\sqrt{329}}(-1,-18,2), \quad \overrightarrow{F_C} = \frac{900}{\sqrt{494}}(-22,3,-1).$$

Pomagamo si lahko z nalogo 2.1.4. Izračunamo njihovo rezultanto

$$\overrightarrow{F} \approx (-940,124,-31), \quad \text{vse enote so v njutnih.}$$

To rezultanto sil uravnoteža sila, ki je usmerjena po kablu do točke $X(x_1,x_2,x_3)$ na tleh (torej $x_3 = 0$). Upoštevamo kot

$$\frac{16}{\sqrt{2}} = |\overrightarrow{PX}|$$

ter dejstvo, da je vsota sil v vodoravni smeri 0

$$x_1 = -\frac{940}{124} x_2,$$

da končno izpeljemo koordinate točke, v katero je vpet kabel. To so

$$(7^{\cdot}9, -1^{\cdot}04, 0) \quad \text{z enotami v metrih } m,$$

kjer je izhodišče $(0, 0, 0)$ nožišče droga.

Drog pritiska na tla s silo 31 N.

Najbližje kablu je pritrdišče do hiše B (uporabimo formulo (2.17) in upoštevamo, da kabel ni premica, temveč le daljica).