Numerična integracija

Pogosto imamo opravka z izračunom določenega integrala dane funkcije. V primerih, ko ne poznamo nedoločenega integrala te funkcije oziroma je pot do njega prezapletena, lahko izberemo lažjo pot in določeni integral izračunamo kar numerično. To je običajno pri tabelarično podanih funkcijah, npr. pri zabeleženih meritvah raznih senzorjev ali instrumentov, ko zelo pogosto niti ne poznamo funkcijske zveze.

Izmed numeričnih načinov izstopata dve metodi, in sicer **trapezna** ter **Simpsonova**.

Trapezna metoda

Interval *[a,b]*, kjer računamo določeni integral dane funkcije, razdelimo na *N* podintervalov, za kar potrebujemo *N+1* točk. Točki $[x_i, x_{i+1}]$ sta krajišči enega podintervala. Zaradi enostavnosti računa vzemimo, da so vsi intervali enako široki. Naj bo funkcijska vrednost v točki x_i enaka y_i, v točki x_{i+1} pa y_{i+1}. Funkcijo na vsakem podintervalu nadomestimo s premico, ki gre skozi točki (x_i, y_i) in (x_{i+1}, y_{i+1}). Lik pod premico je na vsakem podintervalu trapez, katerega ploščino enostavno izračunamo po enačbi :

$$s_i = (x_{i+1} - x_i)\frac{y_{i+1} + y_i}{2}$$

kjer je $\frac{y_{i+1}+y_i}{2}$ povprečna vrednost premice na tem podintervalu in *h* širina podintervala $[x_i, x_{i+1}]$.

Celotna ploščina je vsota vseh delnih ploščin:

$$S = \sum_{i=1}^{N} s_i = s_1 + s_2 + \ldots + s_N = \frac{h}{2}((y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \ldots + (y_N + y_{N+1}))$$

$$S = \frac{h}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_N + y_{N+1})$$

Vidimo, da vse točke, razen prve in zadnje, štejemo dvakrat.

Napako integrala *e* na enem podintervalu širine *h* ocenimo po enačbi:

$$e = -\frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

kjer je $f''(\xi_i)$ drugi odvod funkcije v neki točki ξ_i na podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$.

Celotna napaka *E* je vsota napak e_i na vseh podintervalih (vsota teče po podintervalih):

$$E=\sum_{i=1}^{N}e_i=-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{N}f''(\xi_i)=-\frac{(b-a)^3}{12N^3}\sum_{i=1}^{N}f''(\xi_i)=-\frac{(b-a)^3}{12N^2}\frac{\sum_{i=1}^{N}f''(\xi_i)}{N}=-\frac{(b-a)^3}{12N^2}\langle f''\rangle$$

Tu smo upoštevali, da je *h=(b-a)/N*, $\langle f''\rangle$ pa je povprečna vrednost 2. odvoda funkcije na intervalu *[a,b]*. Navzgor napako E ocenimo tako, da vzamemo največjo absolutno vrednost 2. odvoda na intervalu *[a,b]*.

Simpsonova metoda

Pri Simpsonovi formuli funkcijo *f(x)* na vsakem podintervalu nadomestimo s parabolo (polinom 2. stopnje oblike $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$). Polinom enolično določimo z uporabo t.i. Lagrangeve formule:

$$\begin{aligned}p(x)&=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_N)}y_1+\\&+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_N)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_N)}y_2+\dots\\&+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_2)(x_N-x_3)\dots(x_N-x_{N-1})}y_N\end{aligned}$$

Oglejmo si en podinterval *[a,b]*[1] z vmesno točko *c = (a+b)/2* in pa polovično dolžino intervala *h=(b-a)/2*. Zgornja enačba se sedaj glasi:

$$\begin{aligned}p_2(x)&=\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)=\\&=\frac{(x-c)(x-b)}{2h^2}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{-h^2}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{2h^2}f(b)\end{aligned}$$

Sedaj integriramo:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b p_2(x)dx=\frac{h}{3}(f(a)+4f(c)+f(b))$$

Seveda moramo tudi sedaj sešteti prispevke posameznih podintervalov, da dobimo celotni integral (=ploščino lika pod krivuljo). Če imamo *N+1* točk, dobimo *N/2* podintervalov širine *2h*. Na razpolago moramo torej imeti liho število točk.

$$S=\sum_{i=1}^{N/2}s_i=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+2y_3+4y_4+\dots+4y_N+y_{N+1})$$

[1] Zaradi združljivosti oznak z drugimi viri tu izjemoma uporabljamo [a,b] kot oznaki za *pod*interval.

Prvo in zadnjo točko štejemo enkrat, vse sode točke z utežjo 4, vse lihe pa z utežjo 2.

Napaka *e* na enem podintervalu širine *2h* je:

$$e = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

kjer je $f^{(4)}(\xi)$ četrti odvod funkcije $f(x)$ v neki točki ξ na tem podintervalu.

Tako kot pri trapezni metodi je tudi tu celotna napaka E vsota vseh napak e_i na posameznih podintervalih:

$$E = \sum_{i=1}^{N/2} e_i = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{N/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{(b-a)^5}{90N^5} \sum_{i=1}^{N/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{(b-a)^5}{90N^4} \frac{\sum_{i=1}^{N/2} f^{(4)}(\xi_i)}{N} = -\frac{(b-a)^5}{90N^4} \left\langle f^{(4)} \right\rangle$$

Tudi tu smo upoštevali, da je $h=(b-a)/N$, $\left\langle f^{(4)} \right\rangle$ pa je povprečna vrednost 4. odvoda funkcije na intervalu $[a,b]$. Navzgor napako E ocenimo tako, da vzamemo največjo absolutno vrednost 4. odvoda na intervalu $[a,b]$.